УДК 621.391: 517. 518:510.52

В.М. УДОВИЧЕНКО, канд. техн. наук, НТУ ”ХПІ”, (м. Харків)

ВЗАЄМОЗВ'ЯЗОК ТРИВИМІРНИХ ІНТЕГРАЛІВ ФУР'Є ТА ХАРТЛІ ДЛЯ ФІНІТНИХ ФУНКЦІЙ

Сформульована та доведена теорема, що встановлює взаємозв'язок між тривимірними інтегралами Фур'є та Хартлі для фінітних функцій. Ця теорема є узагальненням відповідних теорем, які встановлюють взаємозв'язок між операторами обчислення дискретних та дискретно-неперервних тривимірних перетворень Фур'є та Хартлі.

The theorem establishing interrelation between integrals of Fourier and integrals of Hartley for limited function is formulated and proved. This theorem is generalisation of the corresponding theorems, establishing interrelation between operators of calculations of discrete and discrete-continuous transformation of Fourier and transformation of Hartley.

Проблема, яку ми розв'язуємо в даній статті, полягає в доповнені інструментарію інформаційних технологій у базисах Фур'є та Хартлі (скорочено $F\&H$) [1, 2] теоремою, яка встановлює взаємозв'язок між тривимірними інтегралами $F\&H$ для фінітних функцій. Ця теорема є узагальненням відповідних теорем, які були раніше сформульовані для операторів обчислення тривимірних перетворень $F\&H$ і потрібна для подальшої розбудови інструментарію інформаційних технологій у базисах $F\&H$. Тому проблема є актуальною.

У літературі, присвяченій застосуванню перетворень $F\&H$, основними напрямками досліджень є теоретичні аспекти перетворень $F\&H$ та їх застосування для вирішення практичних задач обробки сигналів [3 – 6], порівняння швидких алгоритмів дискретних перетворень $F\&H$ [7], створення багатовимірних варіантів дискретних перетворень $F\&H$ [8], але відсутня теорема, що встановлює взаємозв'язок між тривимірними інтегралами $F\&H$ для фінітних тривимірних функцій.

Метою роботи є формулювання та доведення теореми, що встановлює взаємозв'язок між тривимірними інтегралами $F\&H$ для фінітних тривимірних функцій з метою подальшого її застосування для розбудови інструментарію інформаційних технологій в базисах $F\&H$.

Побудова теореми, що встановлює взаємозв'язок між тривимірними інтегралами $F\&H$, для фінітних тривимірних функцій. Не зменшуючи загальності ми вважаємо, що носій фінітних тривимірних функції $f(x, y, z)$, $\operatorname{supp} f(x, y, z)=D$, $D=[-p,p]^3$. Відомо [4, 6], прямі тривимірні перетворення $F\&H$ фінітної, абсолютно інтегрованої функції $f(x, y, z)$,

$\mathrm{Re}[f(x, y, z)], \mathrm{Im}[f(x, y, z)] \in C(D)$ (C – множина комплексних функцій дійсного аргументу. Умова V), можуть бути представлені у вигляді:

$$\Omega^{F\backslash H}_{\rho,\sigma,\tau}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\left\{\begin{matrix}\exp[-j2\pi(\rho x+\sigma y+\tau z)]\\ cas[2\pi(\rho x+\sigma y+\tau z)]\end{matrix}\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (1)$$

де $F\backslash H$ – скорочення “Фур’є або Хартлі”, $(\rho, \sigma, \tau)\in\Re$, $\Re$ – множина дійсних чисел, $cas(\alpha)=\cos(\alpha)+\sin(\alpha)$, $d=1/(8\pi^3)$, $j=\sqrt{-1}$.

Представимо $\Re$ у вигляді: $\Re=\Re^{+}\bigcup\Re^{0}\bigcup\Re^{-}$, де $\Re^{+}$– підмножина $\Re$, множина додатніх дійсних чисел. $\Re^{-}$– підмножина $\Re$, множина від’ємних дійсних чисел. Введемо позначення:

$$\{\gamma_{-1}, \mu_{-1}, \lambda_{-1}\}\in\Re^{-},\ \{\gamma_{+1}, \mu_{+1}, \lambda_{+1}\}\in\Re^{+},\ \{\gamma_{0}, \mu_{0}, \lambda_{0}\}\in\Re^{0}. \qquad (2)$$

Хай виконуються умови:

$$\gamma_{+1}=-\gamma_{-1},\ \mu_{+1}=-\mu_{-1},\ \lambda_{+1}=-\lambda_{-1}. \qquad (3)$$

З урахуванням (2), (3) представимо елементи (1) у вигляді:

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mp1},\mu_{\mp1},\lambda_{\mp1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}\exp[-j2\pi(x\gamma_{\mp1}+y\mu_{\mp1}+z\lambda_{\mp1})]\\ cas[2\pi(x\gamma_{\mp1}+y\mu_{\mp1}+z\lambda_{\mp1})]\end{matrix}\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (4)$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mp1},\mu_{\mp1},\lambda_{0}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}\exp[-j2\pi(x\gamma_{\mp1}+y\mu_{\mp1})]\\ cas[2\pi(x\gamma_{\mp1}+y\mu_{\mp1})]\end{matrix}\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (5)$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mp1},\mu_{\mp1},\lambda_{\pm1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\left\{\begin{matrix}\exp[-j2\pi(x\gamma_{\mp1}+y\mu_{\mp1}+z\lambda_{\pm1})]\\ cas[2\pi(x\gamma_{\mp1}+y\mu_{\mp1}+z\lambda_{\pm1})]\end{matrix}\right\}dx\,dy\,dz, \qquad (6)$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mp1},\mu_{0},\lambda_{\mp1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp\left[-j2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+z\lambda_{\mathbf{m}1})\right] \\ cas\left[2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+z\lambda_{\mathbf{m}1})\right] \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{7}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mathbf{m}1},\mu_0,\lambda_0}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\begin{bmatrix} \exp(-j2\pi x\gamma_{\mathbf{m}1}) \\ cas(2\pi\, x\gamma_{\mathbf{m}1}) \end{bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{8}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mathbf{m}1},\mu_0,\lambda_{\pm1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp\left[-j2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+z\lambda_{\pm1})\right] \\ cas\left[2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+z\lambda_{\pm1})\right] \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{9}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mathbf{m}1},\mu_{\pm1},\lambda_{\mathbf{m}1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp\left[-j2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+y\mu_{\pm1}+z\lambda_{\mathbf{m}1})\right] \\ cas\left[2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+y\mu_{\pm1}+z\lambda_{\mathbf{m}1})\right] \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{10}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mathbf{m}1},\mu_{\pm1},\lambda_0}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp\left[-j2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+y\mu_{\pm1})\right] \\ cas\left[2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+y\mu_{\pm1})\right] \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{11}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_{\mathbf{m}1},\mu_{\pm1},\lambda_{\pm1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp\left[-j2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+y\mu_{\pm1}+z\lambda_{\pm1})\right] \\ cas\left[2\pi(x\gamma_{\mathbf{m}1}+y\mu_{\pm1}+z\lambda_{\pm1})\right] \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{12}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_0,\mu_{\mathbf{m}1},\lambda_{\mathbf{m}1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix} \exp\left[-j2\pi(y\mu_{\mathbf{m}1}+z\lambda_{\mathbf{m}1})\right] \\ cas\left[2\pi(y\mu_{\mathbf{m}1}+z\lambda_{\mathbf{m}1})\right] \end{Bmatrix} dx\,dy\,dz, \tag{13}$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_0,\,\mu_{\mp1},\,\lambda_0}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\begin{bmatrix}\exp(-j2\pi y\mu_{\mp1})\\ cas(2\pi y\mu_{\mp1})\end{bmatrix}dx\,dy\,dz, \qquad (14)$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_0,\,\mu_{\mp1},\,\lambda_{\pm1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\times$$

$$\times\begin{Bmatrix}\exp\left[-j2\pi(y\mu_{\mp1}+z\lambda_{\pm1})\right]\\ cas\left[2\pi(y\mu_{\mp1}+z\lambda_{\pm1})\right]\end{Bmatrix}dx\,dy\,dz, \qquad (15)$$

$$\Omega^{F\backslash H}_{\gamma_0,\,\mu_0,\,\lambda_{\mp1}}(f)=d\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p}\int_{-p}^{p} f(x,y,z)\begin{bmatrix}\exp(-j2\pi z\lambda_{\mp1})\\ cas(2\pi\, z\lambda_{\mp1})\end{bmatrix}dx\,dy\,dz, \qquad (16)$$

Для подальшого застосування наводимо пряму та обернену теореми Удовиченка В.М. [9, 10]:

$$\exp(\pm j\alpha)=\left(\frac{1\pm j}{2}\right)cas(\alpha)+\left(\frac{1\mp j}{2}\right)cas(-\alpha),\ \alpha\in\Re. \qquad (17)$$

$$cas(\pm\alpha)=\left(\frac{1\mp j}{2}\right)\exp(j\alpha)+\left(\frac{1\pm j}{2}\right)\exp(-j\alpha),\ \alpha\in\Re. \qquad (18)$$

Теорема. (Удовиченко В.М.). Для інтегралів $\Omega^{F\backslash H}_{j_k}(f)$, $\Omega^{F\backslash H}_{y_k}(f)$, $k=\overline{1,13}$, де:

$j_1=(\gamma_{\mp1},\mu_{\mp1},\lambda_{\mp1})$, $y_1=(\gamma_{\pm1},\mu_{\pm1},\lambda_{\pm1})$; $j_2=(\gamma_{\mp1},\mu_{\mp1},\lambda_0)$, $y_2=(\gamma_{\pm1},\mu_{\pm1},\lambda_0)$;
$j_3=(\gamma_{\mp1},\mu_{\mp1},\lambda_{\pm1})$, $y_3=(\gamma_{\pm1},\mu_{\pm1},\lambda_{\mp1})$; $j_4=(\gamma_{\mp1},\mu_0,\lambda_{\mp1})$, $y_4=(\gamma_{\pm1},\mu_0,\lambda_{\pm1})$;
$j_5=(\gamma_{\mp1},\mu_0,\lambda_0)$, $y_5=(\gamma_{\pm1},\mu_0,\lambda_0)$; $j_6=(\gamma_{\mp1},\mu_0,\lambda_{\pm1})$, $y_6=(\gamma_{\pm1},\mu_0,\lambda_{\mp1})$;
$j_7=(\gamma_{\mp1},\mu_{\pm1},\lambda_{\mp1})$, $y_7=(\gamma_{\pm1},\mu_{\mp1},l_{\pm1})$; $j_8=(\gamma_{\mp1},\mu_{\pm1},l_0)$, $y_8=(\gamma_{\pm1},\mu_{\mp1},l_0)$;
$j_9=(\gamma_{\mp1},\mu_{\pm1},l_{\pm1})$, $y_9=(\gamma_{\pm1},\mu_{\mp1},l_{\mp1})$; $j_{10}=(\gamma_0,\mu_{\mp1},l_{\mp1})$, $y_{10}=(\gamma_0,\mu_{\pm1},l_{\pm1})$;
$j_{11}=(\gamma_0,\mu_{\mp1},l_0)$, $y_{11}=(\gamma_0,\mu_{\pm1},l_0)$; $j_{12}=(\gamma_0,\mu_{\mp1},l_{\pm1})$, $y_{12}=(\gamma_0,\mu_{\pm1},l_{\mp1})$;
$j_{13}=(\gamma_0,\mu_0,l_{\mp1})$, $y_{13}=(\gamma_0,\mu_0,l_{\pm1})$;

виконується наступне:

$$\Omega^{F}_{j_k}(f)=\left(\frac{1-j}{2}\right)\Omega^{H}_{j_k}(f)+\left(\frac{1+j}{2}\right)\Omega^{H}_{y_k}(f),\ k=\overline{1,13}. \qquad (19)$$

$$\Omega^{H}_{j_k}(f)=\left(\frac{1+j}{2}\right)\Omega^{F}_{j_k}(f)+\left(\frac{1-j}{2}\right)\Omega^{F}_{y_k}(f),\ k=\overline{1,13}. \qquad (20)$$

Доведення виконується шляхом застосування до $\Omega^{F}_{j_k}(f)$, $\Omega^{H}_{y_k}(f)$, $k=\overline{1,13}$, які визначені у (4) – (16), теорем (17), (18).

Хай $\bar{\Omega}^{F\backslash H}_{j\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$ – значення інтегралів $F\backslash H$, які ми отримуємо при обчислені дійсних функцій $f(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$, $\tilde{\Omega}^{F\backslash H}_{j\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$ – значення інтегралів $F\backslash H$, які ми отримуємо при обчислені комплексних функцій дійсного аргументу $f(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$. Функції $f(\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0})$ задовольняють умову V.

Наслідок 1. Для інтегралів Фур'є $\bar{\Omega}^{F}_{j\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$, які ми обчислюємо через інтеграли Хартлі $\bar{\Omega}^{H}_{j\,k}(f),\ \bar{\Omega}^{H}_{y\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$ безпосередньо із (19) отримуємо:

$$\bar{\Omega}^{F}_{j\,k}(f)=\left\{\left[\bar{\Omega}^{H}_{j\,k}(f)+\bar{\Omega}^{H}_{y\,k}(f)\right]\pm j\left[\bar{\Omega}^{H}_{y\,k}(f)-\bar{\Omega}^{H}_{j\,k}(f)\right]\right\}/2,\ k=\overline{1,13}. \qquad (21)$$

Наслідок 2. Для інтегралів Хартлі $\bar{\Omega}^{H}_{j\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$, які ми обчислюємо через інтеграли Фур'є $\bar{\Omega}^{F}_{j\,k}(f),\ \bar{\Omega}^{F}_{y\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$ безпосередньо із (20) з урахуванням (21) отримуємо:

$$\bar{\Omega}^{H}_{j\,k}(f)=\mathrm{Re}\left[\bar{\Omega}^{F}_{j\,k}(f)\right]\pm\mathrm{Im}\left[\bar{\Omega}^{F}_{y\,k}(f)\right],\ k=\overline{1,13}. \qquad (22)$$

Табл. 1. Обчислені значення інтегралів (4), (6)

1	$\bar{\Omega}^{F}_{n_{-1},\,m_{-1},\,l_{-1}}(f)$	–4,06386E–3– –7,736615jE–3	2	$\bar{\Omega}^{H}_{n_{-1},\,m_{-1},\,l_{-1}}(f)$	3,672754E–3
3	$\bar{\Omega}^{F}_{n_{+1},\,m_{+1},\,l_{+1}}(f)$	–4,06386E–3+ +7,736615jE–3	4	$\bar{\Omega}^{H}_{n_{+1},\,m_{+1},\,l_{+1}}(f)$	–1,18005 E–2
5	$\bar{\Omega}^{F}_{n_{-1},\,m_{-1},\,l_{+1}}(f)$	1,424348E–5+ +3,015994jE–4	6	$\bar{\Omega}^{H}_{n_{-1},\,m_{-1},\,l_{+1}}(f)$	–2,87356E–4
7	$\bar{\Omega}^{F}_{n_{+1},\,m_{+1},\,l_{-1}}(f)$	1,424348E–5– –3,015994jE–4	8	$\bar{\Omega}^{H}_{n_{+1},\,m_{+1},\,l_{-1}}(f)$	3,158429E–4

Тестовий приклад 1. У табл.1 – результати обчислення інтегралів (4), (6) при значеннях $|\gamma_{\pm1}|=0{,}173$, $|\mu_{\pm1}|=0{,}377$, $|\lambda_{\pm1}|=0{,}513$ для функції $f(x,y,z)=\exp\left[-(x+y+z)^2\right]\sin\left[\sqrt{\pi}(x+y+z)+\pi/7\right]$.

Наслідок 3. Для інтегралів Фур'є $\tilde{\Omega}^{F}_{j\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$, які ми обчислюємо через інтеграли Хартлі $\tilde{\Omega}^{H}_{j\,k}(f),\ \tilde{\Omega}^{H}_{y\,k}(f),\ k=\overline{1,13}$ безпосередньо із (19) отримуємо:

$$\hat{\Omega}^{F}_{j_k}(f)=\left[(a\pm b+c\mp d)+j(b\mp a+d\pm c)\right]/2,\ k=\overline{1,13}, \qquad (23)$$

де

$$a=\mathrm{Re}\left[\hat{\Omega}^{H}_{j_k}(f)\right],\ b=\mathrm{Im}\left[\hat{\Omega}^{H}_{j_k}(f)\right],\ c=\mathrm{Re}\left[\hat{\Omega}^{H}_{y_k}(f)\right],\ d=\mathrm{Im}\left[\hat{\Omega}^{H}_{y_k}(f)\right],\ k=\overline{1,13}.$$

Наслідок 4. Для інтегралів Хартлі $\hat{\Omega}^{H}_{j_k}(f)$, $k=\overline{1,13}$, які ми обчислюємо через інтеграли Фур'є $\hat{\Omega}^{F}_{j_k}(f)$, $\hat{\Omega}^{F}_{y_k}(f)$, $k=\overline{1,13}$ безпосередньо із (20) отримуємо:

$$\hat{\Omega}^{H}_{j_k}(f)=\left[(a\mp b+c\pm d)+j(b\pm a+d\mp c)\right]/2,\ k=\overline{1,13}, \qquad (24)$$

де $a=\mathrm{Re}\left[\hat{\Omega}^{F}_{j_k}(f)\right], b=\mathrm{Im}\left[\hat{\Omega}^{F}_{j_k}(f)\right], c=\mathrm{Re}\left[\hat{\Omega}^{F}_{y_k}(f)\right], d=\mathrm{Im}\left[\hat{\Omega}^{F}_{y_k}(f)\right], k=\overline{1,13}.$

Тестовий приклад 2. У табл. 2 – результати обчислення інтегралів (4), (6) при значеннях $|\gamma_{\pm1}|=0{,}173$, $|\mu_{\pm1}|=0{,}377$, $|\lambda_{\pm1}|=0{,}513$ для функції

$$f(x,y,z)=\exp\left[-(x+y+z)^2\right]\left\{\sin\left[\sqrt{\pi}(x+y+z)\right]-j\,0{,}37\times\right.$$
$$\left.\times\sin\left[(\sqrt{\pi}/3)(x+y+z)+\pi/7\right]\right\}.$$

Табл. 2. Обчислені значення інтегралів (4), (6).

1	$\hat{\Omega}^{F}_{n_{-1},m_{-1},l_{-1}}(f)$	–5,09505E–3– –6,16615jE–3	2	$\hat{\Omega}^{H}_{n_{-1},m_{-1},l_{-1}}(f)$	3,672754E–3+ +5,39277JE–4
3	$\hat{\Omega}^{F}_{n_{+1},m_{+1},l_{+1}}(f)$	–3,03267E–3+ +9,30708jE–3	4	$\hat{\Omega}^{H}_{n_{+1},m_{+1},l_{+1}}(f)$	–1,18005E–2+ +2,60166jE–3
5	$\hat{\Omega}^{F}_{n_{-1},m_{-1},l_{+1}}(f)$	3,07704E–5+ +3,56134jE–4	6	$\hat{\Omega}^{H}_{n_{-1},m_{-1},l_{+1}}(f)$	–2,87356E–4+ +7,10612jE–5
7	$\hat{\Omega}^{F}_{n_{+1},m_{+1},l_{-1}}(f)$	–2,28345E–6– –2,47065jE–4	8	$\hat{\Omega}^{H}_{n_{+1},m_{+1},l_{-1}}(f)$	3,158429E–4+ +3,80073jE–5

Наведені в табл. 1 і табл. 2 результати обчислення інтегралів (4), (6) задовольняють вимогам теореми, і, таким чином, підтверджують її справедливість.

Висновки. 1.Сформульована і доведена теорема (19), (20), яка встановлює взаємозв'язок між тривимірними інтегралами $F\&H$ у випадку фінітної функції. 2. Наведено наслідки (21) – (24) з теореми, які важливі для практичного застосування (19), (20). 3. Наведено тестові приклади, які підтверджують отримані теоретичні твердження.

Перспективи досліджень у даному напрямку автор вбачає у застосуванні наведеної теореми і наслідків (21) – (24), при подальшій розбудові інструментарію інформаційних технологій у базисах $F\&H$ [1], [2].

Зауваження. В роботі (11 с.155) з вини автора допущена помилка. Надруковано:

$$\exp(\pm\alpha)=\left(\frac{1\pm j}{2}\right)cas(\alpha)+\left(\frac{1\mp j}{2}\right)cas(-\alpha),\ \alpha=\sum_{i=1}^{n} z_i\ ,\ z_i\in\Re\,. \qquad (11)$$

Повинно бути:

$$\exp(\pm j\alpha)=\left(\frac{1\pm j}{2}\right)cas(\alpha)+\left(\frac{1\mp j}{2}\right)cas(-\alpha),\ \alpha=\sum_{i=1}^{n} z_i\ ,\ z_i\in\Re \qquad (11)$$

Список літератури: **1.** *Литвин О. М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Хартлі // Вестник НТУ "ХПІ": Сб. научн. тр. –Х.: НТУ "ХПІ", 2006. – Вып. 38. Тематический выпуск "Приборы и методы неразрушающего контроля". –С. 69-74. **2.** *Литвин О. М., Удовиченко В.М.* Інструментарій інформаційних технологій в базисі Фур'є // Вестник НТУ "ХПІ": Сб. научн. тр. –Х.: НТУ "ХПІ", 2007. – Вып. 10. Тематический выпуск "Автоматика и приборостроение". –С. 119–127. **3.** *Рабинер Л., Гоулд Б.* Теория и применение цифровой обработки сигналов. –М.: Мир, 1978. – 848 с. **4.** *Макс.Ж.* Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х томах, т.1. Перевод с французкого под ред. д-ра физ. мат. наук Н.Г. Волкова. –М.: Мир. 1983. –311с. **5.** *Марпл-мл. С. Л.* Цифровой спектральный анализ и его приложения, –М.: Мир, 1990. – 684 с. **6.** *БрейсуэллР.* Преобразование Хартли. –М.: Мир, 1990. – 175 с. **7.** *Болд Э.Дж.* Сравнение времени вычисления БПХ и БПФ // ТИИЭР. 1985, №12, – С. 184-185. **8.** *Маккленнан Дж. Х.* Многомерный спектральный анализ // ТИИЭР, т.70, №9, 1982. – С. 139–152. **9.***Удовиченко В. М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та кубічних сплайнів, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня // Вестник НТУ "ХПІ": Сб. научн. тр. –Х.: НТУ "ХПІ". 2007. – Вып. 19. Тематический выпуск "Інформатика и моделирование", № 8. – С. 182–190. **10.** *Удовиченко В. М.* Оператори Фур'є та Хартлі, побудовані на основі методу Файлона та В-сплайнів п'ятого степеня, точні на тригонометричних поліномах заданого степеня //Вестник НТУ "ХПІ", Сб. научн. тр. –Х.: НТУ "ХПІ", 2007. –Вып. 35, "Электроэнергетика и преобразовательная техника". Тематический выпуск "Приборы и методы неразрушающего контроля". – С. 3–12. **11.** *Удовиченко В.М.* Взаємозв'язок двовимірних інтегралів Фур'є та Хартлі для фінітних функцій //Вестник НТУ "ХПІ": Сб. научн. тр. –Х.: НТУ "ХПІ", 2008. –Тематический выпуск 31'2008 "Автоматика и приборостроение". –С. 153–158.

Поступила в редколегію 05. 05. 08