



**ВЕСТНИК**

**НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО  
УНИВЕРСИТЕТА  
“ХПИ”**

**25'2001**

**Харьков**

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

# **ВЕСТНИК НАЦИОНАЛЬНОГО ТЕХНИЧЕСКОГО УНИВЕРСИТЕТА "ХПИ"**

---

**Сборник научных трудов**

**25'2001**

## **Тематический выпуск "Динамика и прочность машин"**

Издание основано Национальным техническим университетом  
"Харьковский политехнический институт" в 2001 году

Государственное издание

Свидетельство о государственной регистрации

Серия КВ № 5256 от 2 июля 2001 года

### **КООРДИНАЦИОННЫЙ СОВЕТ:**

#### **Председатель**

Л.Л.Товажнянский, д-р техн.наук, проф.

#### **Заместитель председателя**

А.П.Марченко, д-р техн.наук, проф.

Е.И.Сокол, д-р техн.наук, проф.

#### **Секретарь координационного совета**

О.Б.Анишко, д-р техн.наук, проф.

#### **Члены координационного совета**

М.Д.Годлевский, д-р техн.наук, проф.

А.И.Грабченко, д-р техн.наук, проф.

В.Д.Дмитриенко, д-р техн.наук, проф.

О.К.Морачковский, д-р техн.наук, проф.

М.И.Рыщенко, д-р техн.наук, проф.

В.П.Себко, д-р техн.наук, проф.

В.И.Таран, д-р техн.наук, проф.

А.Ф.Шеховцев, д-р техн.наук, проф.

**Харьков 2001**

**Вісник Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут".** Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Динаміка і міцність машин. – Харків: НТУ "ХПІ". – 2001. № 25. – 167 с.

В збірнику представлені результати досліджень статичної і динамічної міцності елементів конструкцій сучасних машин і енергетичних установок. Для викладачів, наукових співробітників, спеціалістів.

В сборнике представлены результаты исследований статической и динамической прочности элементов конструкций современных машин и энергетических установок. Для преподавателей, научных сотрудников, специалистов.

Адреса редколегії: 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21. Національний технічний університет "ХПІ". Тел. (0572) 400-879.

Тематична редакційна колегія:

д-р техн. наук проф. Морачковський О.К. (відп. ред.), канд. техн. наук доц. Андреев А.Г. (відп. секр.), д-р техн. наук проф. Александров Є.Є., канд. техн. наук доц. Бортовий В.В., д-р техн. наук проф. Воробйов Ю.С., д-р техн. наук проф. Голоскоков Є.Г., д-р фіз.-мат. наук проф. Горошко О.О., д-р техн. наук проф. Гриньов В.Б., д-р техн. наук Жовдак В.О., д-р техн. наук проф. Львов Г.І., д-р фіз.-мат. наук проф. Остапенко В.Л., акад. НАН України Писаренко Г.С., д-р техн. наук проф. Фільштинський Л.А., чл.-кор. НАН України Шевченко Ю.М.

**Рекомендовано до друку Вченою радою НТУ "ХПІ";  
Протокол № 10 від 26 жовтня 2001 р.**

© Національний технічний університет "ХПІ"

## АНАЛИЗ БИФУРКАЦИЙ УДВОЕНИЯ ПЕРИОДА КУСОЧНО-НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА АМПЛИТУДНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

К.В.Аврамов

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The response surface is used to analyze the period doubling bifurcations under the condition of the two parameters change. The bifurcation analysis of piecewise-nonlinear system is fulfilled with the help of the response surface under the condition of the frequency and the amplitude of the excitation change. Different codimension two bifurcations were discovered in the piecewise-nonlinear system.

### 1 Введение и описание механической системы

В статье используются амплитудные поверхности для анализа бифуркаций удвоения периода в кусочно-нелинейной системе при изменении двух управляющих параметров. В механике бифуркации удвоения периода часто исследуются с помощью амплитудно-частотных характеристик (бифуркационных диаграмм) [1-4]. Амплитудная поверхность является трехмерным обобщением амплитудно-частотных характеристик. В статье предлагается численный метод для построения амплитудных поверхностей кусочно-нелинейных систем. Благодаря использованию этих поверхностей удалось обнаружить различные бифуркации коразмерности два в кусочно-нелинейной системе. Эти бифуркации образованы в результате соединения двух бифуркационных линий удвоения периода и в результате соединения бифуркационной линии удвоения периода и касательной бифуркационной линии.

Рассмотрим кусочно-нелинейную систему с одной степенью свободы, которая моделирует колебания материальной точки между двумя ограничениями. Реакции этих ограничений определяются нелинейной зависимостью  $R(\xi) = \xi + c\xi^n$ . Используя обычные безразмерные переменные [5,6], уравнение движения системы запишем в виде

$$\omega^2 \ddot{x} + 2\alpha\omega \dot{x} + H(x) = f \sin(t); \quad (1)$$

$$H(x) = \begin{cases} x + c(x+1)^2; & x > -1; \\ -1; & -2l-1 < x < -1; \\ x + 2l + (-1)^{n+1} c(x+2l+1)^n; & x < -2l-1, \end{cases}$$

где  $\omega$  - частота возмущающего воздействия;  $\alpha$  - коэффициент вязкого сопротивления;  $2l$  - расстояние между ограничениями. Систему (1) можно записать относительно переменных состояния  $(y_1, y_2) = (\dot{x}, x)$ , которые будут использоваться в следующем разделе.



## 2 Метод амплитудных поверхностей

Амплитудные поверхности удобно использовать для геометрического представления бифуркаций удвоения периода предельных циклов при изменении двух управляющих параметров системы. Далее такими параметрами примем  $\omega$  и  $f$ , а амплитудную поверхность представим зависимостью полуразмахов периодических движений  $S$  от  $\omega$  и  $f$ . Поэтому амплитудную поверхность в пространстве  $(s, \omega, f) \in R^3$  представим функцией  $s = G(\omega, f)$ . Каждой точке амплитудной поверхности соответствует определенный предельный цикл.

Следуя [7], предельные циклы системы (1) разделим на группы согласно величинам их мультипликаторов  $(\rho_1, \rho_2)$  следующим образом: направленно неустойчивые циклы  $(\rho_1 > 1; 0 < \rho_2 < 1)$  обратно неустойчивые циклы  $(\rho_1 < -1; -1 < \rho_2 < 0)$  устойчивые циклы  $(|\rho_i| < 1; i = 1, 2)$ . Циклы одного вида преобразуются в другие циклы вследствие локальных бифуркаций. Отметим, что бифуркации удвоения периода определяются  $\rho_1 = -1$ , а касательные бифуркации, которые также наблюдаются в системе (1) имеют  $\rho_1 = 1$ . Определим геометрическое представление бифуркаций с точки зрения амплитудной поверхности. Амплитудные поверхности содержат бифуркационные линии удвоения периода. В результате этой бифуркации рождаются предельные циклы удвоенного периода, которые в свою очередь могут претерпевать другие бифуркации. Очевидно, что вдоль линий удвоения периода соединяются три вида циклов: устойчивые циклы порядка  $N$ ; обратно неустойчивые циклы того же порядка и устойчивые циклы порядка  $2N$ . Отметим, что устойчивость циклов  $2N$  около бифуркаций удвоения периода может быть другой [8]. Вдоль линий касательных бифуркаций устойчивые циклы порядка  $N$  соединяются с направленно неустойчивыми циклами того же порядка. Заметим, что бифуркационные линии соединяются в бифуркационных точках коразмерности два [8,9,10].

Теперь изложим алгоритм построения амплитудной поверхности. Во-первых, рассчитывается амплитудно-частотная характеристика ( бифуркационная диаграмма), по которой определяются бифуркационные точки. Во-вторых, зная бифуркационные точки, определяются бифуркационные линии на параметрической плоскости  $(\omega, f) \in R^2$ . Наконец, по данным об амплитудно-частотных характеристиках и бифуркационных линиях определяем амплитудную поверхность. Итак, для получения амплитудной поверхности используются два алгоритма: алгоритм расчета амплитудно-частотных характеристик и алгоритм построения бифуркационных линий на плоскости  $(\omega, f)$ . Для расчета амплитудно-частотных характеристик воспользуемся алгоритмом изложенным в [11,12]. Поэтому не будем останавливаться на этом алгоритме, а рассмотрим метод расчета бифуркационных линий для

системы (1). Решения уравнений (1) представим в виде  $y_i(\omega, f, y_{01}, y_{02}, t); i = 1, 2$ , где  $y_{0i}$  - начальные состояния системы. Тогда циклы порядка  $N$  удовлетворяют нелинейным уравнениям:

$$y_i(\omega, f, y_{01}, y_{02}, 2\pi N) - y_{0i} = 0; i = 1, 2. \quad (2)$$

Негиперболические циклы описываются уравнениями (2) и дополнительным уравнением:

$$w(\omega, f, y_{01}, y_{02}) = \det \left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} - E\rho \right] = 0, \quad (3)$$

где  $\left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right]$  - матрица Якоби;  $E$  - единичная матрица. Бифуркационную линию представим сеточной функцией  $(\omega_1, f_1)$ ,  $(\omega_2, f_2)$ ,  $(\omega_m, f_m)$ .

Каждая точка этой функции является решением системы уравнений (2,3). Поэтому для получения бифуркационной линии  $M$  раз решается система (2,3). Далее остановимся на численном решении этой системы. Эта система решается относительно одного из векторов  $V_1 = (\omega, y_{01}, y_{02})$  или  $V_2 = (f, y_{01}, y_{02})$ . Если вектором неизвестных является  $V_1(V_2)$ , то перед решением уравнений задается  $f(\omega)$ , соответственно. Переменная, которая задается называется параметризующей [12]. Выбор параметризующей переменной производится перед расчетом каждой точки бифуркационной линии по методу, изложенному в [12]. Для решения уравнений (2,3) воспользуемся методом Ньютона. Теперь рассмотрим метод расчета матрицы Якоби, использующейся в методе Ньютона. Для краткости записи введем обозначения:  $\pi_1 = \omega; \pi_2 = f$ , тогда матрицу Якоби запишем в следующем виде:

$$\left[ \frac{\partial(y_1 - y_{01}, y_2 - y_{02}, w)}{\partial(y_{01}, y_{02}, \pi_i)} \right] = \left[ \begin{array}{c} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \\ Q \\ R \end{array} P \right] = \left[ \begin{array}{ccc} \frac{\partial y_1}{\partial y_{01}} - 1 & \frac{\partial y_1}{\partial y_{02}} & \frac{\partial y_1}{\partial \pi_i} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} - 1 & \frac{\partial y_2}{\partial \pi_i} \\ \frac{\partial w}{\partial y_{01}} & \frac{\partial w}{\partial y_{02}} & \frac{\partial w}{\partial \pi_i} \end{array} \right]. \quad (4)$$

Так как применение конечно-разностных формул для определения производных в (4) приводит к плохой сходимости метода Ньютона, воспользуемся следующим способом определения элементов матрицы Якоби.

Хорошо известно, что подматрица  $\left[ \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \right]$  является решением системы дифференциальных уравнений в вариациях:

уравнений (8). Функцию  $d^2H/dy_2^2$  представим в следующем виде:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial(y_1, y_2)}{\partial(y_{01}, y_{02})} \end{bmatrix}_{t=0} = E;$$

$$[V(t)] = \begin{bmatrix} -2\alpha/\omega & -1/\omega^2 dH/dy_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5)$$

Для определения подматрицы [P] составим две системы дифференциальных уравнений относительно векторов  $[\partial y_1/\partial \pi_i, \partial y_2/\partial \pi_i]$ ;  $i=1$  или  $2$ . Эти системы получаются дифференцированием (1) по  $\pi_i$ . Представим эти системы в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial f} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial \omega} & \frac{\partial y_1}{\partial f} \\ \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial f} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{2\alpha}{\omega^2} y_1 + \frac{2H(y_2)}{\omega^3} - \frac{2f \sin(t)}{\omega^3} & \frac{\sin(t)}{\omega^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6)$$

Решения уравнений (6) с нулевыми начальными условиями при  $t = 2\pi v$  являются элементами подматрицы [P] из (4).

Наконец, рассмотрим способ определения подматриц [Q] и [R], входящих в (4). Определим  $\partial W/\partial y_{0v}$ :

$$\frac{\partial W}{\partial y_{0v}} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{01} \partial y_{0v}} & \frac{\partial y_1}{\partial y_{02}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{01} \partial y_{0v}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} - \rho \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial y_{01}} - \rho & \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0v} \partial y_{02}} \\ \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0v} \partial y_{02}} \end{bmatrix}; \quad v = 1, 2. \quad (7)$$

Формула для  $\partial W/\partial \pi_i$ ;  $i=1, 2$  имеет аналогичный вид. Теперь рассмотрим метод определения вторых производных, входящих в (7). Составим системы дифференциальных уравнений относительно векторов, состоящих из этих вторых производных. Эти системы дифференциальных уравнений получаются дифференцированием (5) по  $y_{0\mu}$  и  $\pi_i$ . В матричном виде эти системы имеют следующий вид:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \omega \partial y_{0v}} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y_1}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_1}{\partial \omega \partial y_{0v}} \\ \frac{\partial^2 y_2}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial f \partial y_{0v}} & \frac{\partial^2 y_2}{\partial \omega \partial y_{0v}} \end{bmatrix} +$$

$$+ \frac{1}{\omega^2} \begin{bmatrix} \frac{d^2 H}{dy_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} - \frac{d^2 H}{dy_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial f} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} & 2\alpha \frac{\partial y_1}{\partial y_{0v}} + \frac{2}{\omega} \frac{dH}{dy_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} - \frac{d^2 H}{dy_2^2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0v}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Уравнения (8) имеют нулевые начальные условия. Рассмотрим метод реше-

$$\frac{d^2 H}{dy_2^2} = \sigma(t) + q(y_2); \sigma(t) = \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\delta(t - \tau_j)}{|y_1(\tau_j)|} - \sum_{v=1}^{p_2} \frac{\delta(t - T_v)}{|y_1(T_v)|}, \quad (9)$$

где  $q(y_2)$  – нелинейная функция;  $\delta()$  – дельта-функция;  $\tau_j (j = \overline{1, p_1})$ ;  $T_v (v = \overline{1, p_2})$  – значения  $t$ , определяющиеся из нелинейных уравнений:

$$y_2(\tau_j) = -1; y_2(T_v) = -1 - 2\lambda. \quad (10)$$

Представим решения уравнений (8) в виде:

$$\frac{\partial^2 y_i}{\partial y_{0\mu} \partial y_{0\nu}} = u_{\mu\nu}^{(i)} + v_{\mu\nu}^{(i)}; \frac{\partial^2 y_i}{\partial \mathcal{F} \partial y_{0\nu}} = w_{\nu}^{(i)} + p_{\nu}^{(i)}; \frac{\partial^2 y_i}{\partial \omega \partial y_{0\nu}} = r_{\nu}^{(i)} + s_{\nu}^{(i)}; \quad (11)$$

$$i = 1, 2; \mu = 1, 2; \nu = 1, 2.$$

Правые части соотношений (11) удовлетворяют матричным уравнениям:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{\mu\nu}^{(1)} & w_{\nu}^{(1)} & r_{\nu}^{(1)} \\ u_{\mu\nu}^{(2)} & w_{\nu}^{(2)} & r_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} u_{\mu\nu}^{(1)} & w_{\nu}^{(1)} & r_{\nu}^{(1)} \\ u_{\mu\nu}^{(2)} & w_{\nu}^{(2)} & r_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} - \frac{\sigma(t)}{\omega^2} \begin{bmatrix} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & \frac{\partial y_2}{\partial \mathcal{F}} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{\partial y_2}{\partial \omega} & \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad (12)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} v_{\mu\nu}^{(1)} & p_{\nu}^{(1)} & s_{\nu}^{(1)} \\ v_{\mu\nu}^{(2)} & p_{\nu}^{(2)} & s_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} = [V(t)] \begin{bmatrix} v_{\mu\nu}^{(1)} & p_{\nu}^{(1)} & s_{\nu}^{(1)} \\ v_{\mu\nu}^{(2)} & p_{\nu}^{(2)} & s_{\nu}^{(2)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} & \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial \mathcal{F}} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{2\alpha}{\omega^2} \frac{\partial y_1}{\partial y_{0\nu}} & \frac{2}{\omega^3} \frac{dH}{dy_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} & \frac{q(y_2)}{\omega^2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Линейные дифференциальные уравнения (12) имеют полуаналитические решения благодаря дельта-функциям, входящим в эти уравнения. Запишем решения уравнений (12), используя метод вариаций произвольных постоянных и формулу Остроградского-Лиувилля:

$$u_{\mu\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\mu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j); \quad (14)$$

$$w_{\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial \mathcal{F}} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial \mathcal{F}} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j); \quad (15)$$

$$r_{\nu}^{(i)}(2\pi N) = \sum_{k=1}^{p_2} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \Big|_{t=T_k} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=T_k} \Delta_i(T_k) - \sum_{j=1}^{p_1} \frac{\partial y_2}{\partial \omega} \Big|_{t=\tau_j} \frac{\partial y_2}{\partial y_{0\nu}} \Big|_{t=\tau_j} \Delta_i(\tau_j); \quad (16)$$

где

$$\Delta_i(z) = \frac{\exp\left(\frac{2\alpha z}{\omega}\right)}{\omega^2 |y_1(z)|} \left( \frac{\partial y_i}{\partial y_{01}} \Big|_{t=2\pi N} \frac{\partial y_2}{\partial y_{02}} \Big|_{t=z} - \frac{\partial y_i}{\partial y_{02}} \Big|_{t=2\pi N} \frac{\partial y_2}{\partial y_{01}} \Big|_{t=z} \right). \quad (17)$$

Формулы (4-17) позволяют численно определить матрицу Якоби. Потом

методом Ньютона находим решения системы (2,3) и бифуркационную линию в виде сеточной функции. В следующих двух разделах статьи, представим анализ бифуркационного поведения кусочно-линейной системы со следующими параметрами:  $c = 0$ ;  $\alpha = 0.005$ ;  $\lambda = 5$ , входящими в (1).

### **3 Бифуркационные точки коразмерности два**

Бифуркационные точки коразмерности два образуются в результате соединения бифуркационных линий [8]. Для лучшего понимания геометрии соединения линий в бифуркационных точках на рис.1 показаны участки амплитудных поверхностей около этих бифуркационных точек. Эти бифуркационные точки были получены в результате численного расчета предельных циклов порядка один и два системы (1). Как видно из рис.1 амплитудная поверхность представляет собой соединяющиеся листы. Листы амплитудной поверхности с направленно неустойчивыми циклами обозначаются буквой D, а листы с обратно неустойчивыми циклами буквой I. Листы с устойчивыми циклами не обозначаются.

Рассмотрим геометрические свойства амплитудной поверхности около бифуркационной точки коразмерности два  $L_1$ . Точка  $L_1$  наблюдается при  $f = f_{L1}$ . При  $f > f_{L1}$  существуют две бифуркационные линии  $pd1$  и  $pd2$ . Рассмотрим амплитудно-частотную характеристику при  $f > f_{L1}$ . Она содержит две бифуркационные точки удвоения периода. В этих точках рождаются направленно неустойчивые циклы удвоенного периода. Лист таких циклов показан на рис. 1а. В бифуркационной точке коразмерности два  $L_1$  эти две бифуркационные точки соединяются. При  $f < f_{L1}$  существуют две несвязанные ветви амплитудно-частотной характеристики. Одна ветвь образована устойчивыми циклами порядка один, а вторая направленно неустойчивыми циклами порядка два. Бифуркационная точка коразмерности два  $L_2$  имеет аналогичные геометрические свойства. Если бифуркационные точки коразмерности два  $L_1$  и  $L_2$  образованы соединением бифуркационных линий удвоения периода, то в бифуркационной точке коразмерности два  $L_3$  соединяются бифуркационная линия удвоения периода предельных циклов порядка один  $pd5$  и седло-узловая бифуркационная линия  $sn1$  предельных циклов порядка два. Бифуркационная точка коразмерности два  $L_3$  наблюдается при  $f = f_{L3}$ . При  $f > f_{L3}$  наблюдается бифуркационная линия  $pd5$ , а при  $f < f_{L3}$  имеет место две бифуркационные линии  $pd6$  и  $sn1$ . Рассмотрим свойства предельных циклов, которые показаны на амплитудной поверхности. При  $f > f_{L3}$  в результате бифуркации удвоения периода рождается направленно неустойчивый цикл удвоенного периода, а при  $f < f_{L3}$  в результате бифуркации  $pd6$  рождается устойчивый цикл удвоенного периода. Итак, бифуркационная точка коразмерности два  $L_3$  изменяет устойчивость циклов рождающихся в результате бифуркаций удвоения периода.

#### 4 Субгармонические колебания второго порядка

В этом разделе статьи исследуются бифуркации предельных циклов с периодом в двое больше периода возмущающего воздействия. Эти предельные циклы рождаются вследствие бифуркаций удвоения периода циклов первого порядка. Рассмотрим бифуркационное поведение предельных циклов, которые представлены амплитудной поверхностью (рис.2). Амплитудная поверхность содержит четыре бифуркационные точки коразмерности два  $C_1, C_2, C_3, C_4$ . Бифуркационная точка  $C_1$  соответствует точке представленной на рис.1а. Точка  $C_2$  отвечает бифуркационной точке представленной на рис.1с. Следуя [9] область амплитудной поверхности около  $C_3$  назовем начальной областью.

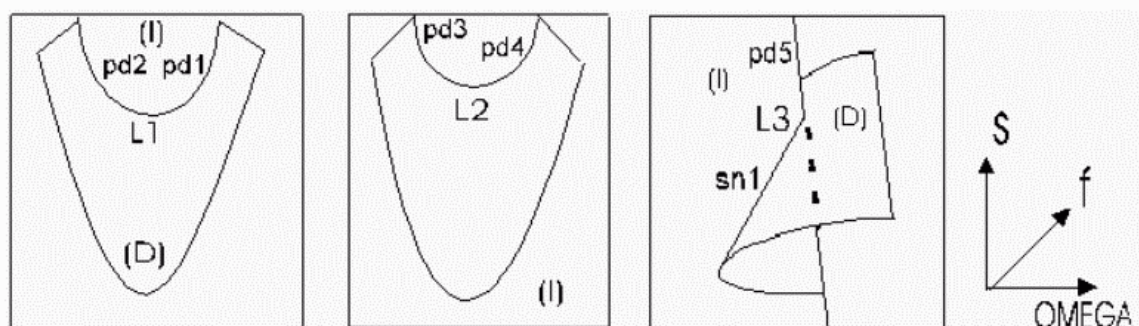


Рис.1. Бифуркационные точки коразмерности два.

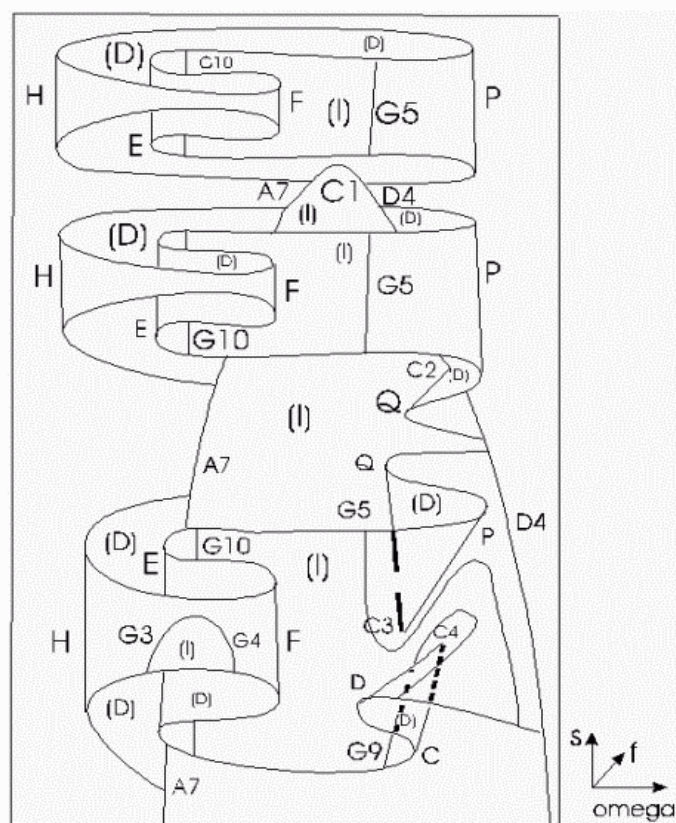


Рис.2. Амплитудная поверхность предельных циклов порядка два.

Эта область имеет лист направленно неустойчивых циклов, который ограничивается двумя седло-узловыми бифуркационными линиями P и Q. Точка  $C_3$  ранее была обнаружена в отображении. Бифуркационная точка коразмерности два  $C_4$  имеет такие же геометрические свойства как и  $C_3$ . Теперь рассмотрим поведение предельных циклов, представленное на амплитудной поверхности (рис.2). Благодаря бифуркационной линии удвоения периода  $A_7$  предельные циклы порядка один преобразуются в направленно неустойчивые циклы порядка два. Вдоль бифуркационной линии удвоения периода  $D_4$  на участке  $(C_1C_2)$  рождаются направленно неустойчивые циклы удвоенного периода, а на остальной части этой линии рождаются устойчивые предельные циклы. Остальное бифуркационное поведение предельных циклов порядка два можно проследить, используя амплитудную поверхность (рис.2).

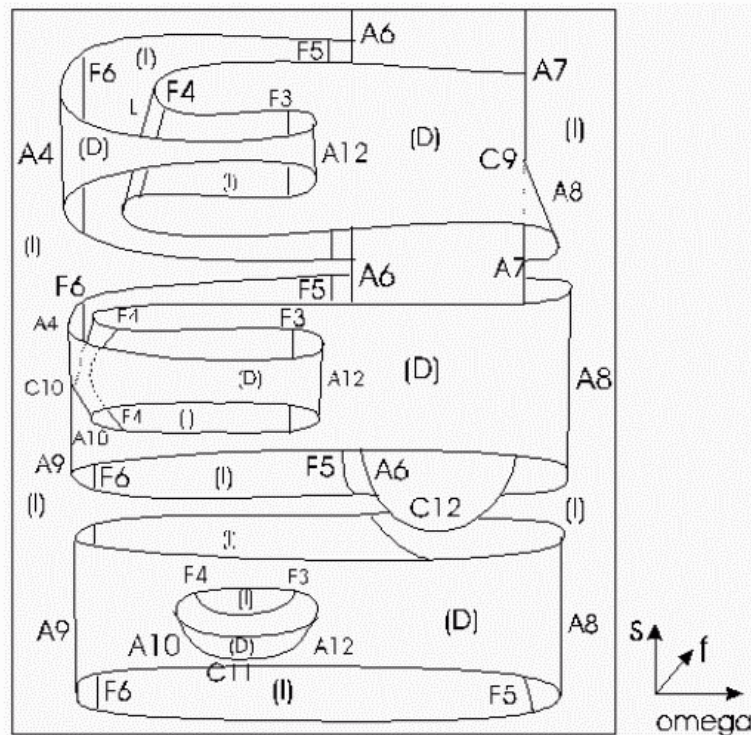


Рис.3. Амплитудная поверхность.

Теперь рассмотрим бифуркации предельных циклов, показанные на рис.3. Предельные циклы порядка два содержат четыре бифуркационные точки коразмерности два  $C_9, C_{10}, C_{11}, C_{12}$ . Бифуркационная точка коразмерности два  $C_9$  аналогична бифуркационной точке, показанной на рис.1с. В бифуркационной точке коразмерности два  $C_{10}$  соединяются четыре касательные бифуркационные линии  $A_4, F_4, A_9, A_{10}$ . Отметим, что в бифуркационной точке коразмерности два  $C_{11}$  соединяются две бифуркационные линии  $A_{10}$  и  $A_{12}$ . Бифуркационная точка коразмерности два  $C_{12}$  рассматривалась в предыдущем разделе. Вдоль бифуркационной линии удвоения периода  $A_6$  рождаются устойчивые предельные циклы порядка два. На участке  $(C_{12}C_9)$  бифур-



кационной линии удвоения периода  $A_7$  рождаются устойчивые предельные циклы порядка два, а на остальном участке этой линии появляются направленно неустойчивые циклы порядка два. Поведение предельных циклов порядка два можно проследить используя амплитудную поверхность (рис.3).

## 5 Заключение

Таким образом в данной работе предложен метод анализа бифуркаций удвоения периода на основе амплитудных поверхностей. Последние позволяют геометрически представить бифуркации удвоения периода механических систем. Подробно рассмотрен алгоритм построения амплитудных поверхностей к анализу бифуркационного поведения на примере кусочно-нелинейной системы. Использование амплитудной поверхности позволило выявить различные бифуркации удвоения периода в кусочно-нелинейных системах.

## Литература

1. Аврамов К.В. ,Беломытцев А.С. ,Карабан В. Н.Области хаотических колебаний дискретных механических систем с кусочно- линейными упругими характеристиками. Прикладная механика т.30(5), 1994, С. 81-88.
2. Аврамов К.В. , Карабан В. Н. Резонанс при хаотических колебаниях дискретных динамических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Прикладная механика, т.33(7),1997,стр. 84-88.
3. Аврамов К.В. ,Карабан В. Н. Особенности развития вынужденных колебаний нелинейных силовых передач. Известия вузов. Машиностроение. - N 4-6, 1994, С. 3-8.
4. Гуляев В.И., Баженов Е.А., Гозуляк Е.А. и др. Устойчивость периодических процессов в нелинейных системах.-Львов: Вища школа, 1983. - 288 с.
5. Бабицкий В.И. Теория виброударных систем. - М: Наука, 1978, 352 с.
6. Shaw S.W., Holmes P.J. A periodically forced piecewise linear oscillator J. of Sound and Vibration. - 1983. - 1. p.129-155.
7. Kawakami H. Bifurcation of periodic response in forced dynamic nonlinear circuits: computation of bifurcation values of the system parameters. IEEE Transactions of Circuits and Systems. - 1984. - 3. - P. 212-227.
8. Guckenheimer J., Holmes P.J. Nonlinear oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Field- Springer-Verlag. - 1983.
9. Allam R., Mira C. "Crossroad area-dissymmetrical spring area- symmetrical spring area" and "double crossroad area-double spring area" transitions. Int. J. of Bifurcation and Chaos, 1993-3. - P. 429-435.
10. Mira C., Kawakami H., Allam R. The dovetail bifurcation structure and its qualitative changes. Int. J. of Bifurcation and Chaos. - 1993. - 3. P. 903-919.
11. Беломытцев А.С. , Карабан В. Н. Алгоритм решения нелинейной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений в области многозначности. Журнал вычисл. мат. и мат. физ. - 1986. - 26. - N 7. - с. 1099-1102.
12. Seydel R. Nonlinear computation. Int. J. of Bifurcation



УДК 539.3

## **НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ДИСКОВ СИЛОВОГО КАРКАСА МАГНИТНОЙ СИСТЕМЫ ЭЛЕКТРОФИЗИЧЕСКОЙ УСТАНОВКИ**

Л.В.Автономова, В.Л.Хавин

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The stress-strain analysis of the disk of power flame magnetic system electro-physical plant was investigated by the finite element method with the object of receipt the nice calculation. The flagrant solution was considered for the whole disk and more accurate solution was considered for definition of concentration of stress in the region of the orifice under the sprig.

Одной из составных частей магнитной системы электрофизической установки является силовой каркас, воспринимающий действующие пондеромоторные нагрузки. Силовым каркасом установки является пространственная конструкция, состоящая из двух стальных дисков, соединенных между собой по периферии шестнадцатью наклонными силовыми талрепами. Расчет НДС такой конструкции представляет собой сложную пространственную задачу. В связи с этим целесообразно разбить задачу на две независимые: определение НДС от сил, действующих в плоскости дисков силового каркаса, и от сил, действующих перпендикулярно их плоскости.

Диски силового каркаса (рис. 1) представляют собой стальные плиты с периодически радиально расположенными отверстиями. По внешнему контуру плита жестко оперта в восьми точках, так как перемещения, обусловленные податливостью талрепов, на НДС плиты практически не влияют, то это позволяет при нахождении решения исключить перемещения плиты как абсолютно жесткого тела.

Диски воспринимают радиальные силы от блоков обмотки тороидального поля. На каждый диск действуют тридцать две опорные реакции, распределенные по периметру соответственно тридцати двух отверстий под штифты, расположенных симметрично относительно оси диска. При расчете напряженно-деформированного состояния силового диска вводится допущение, что модель имеет постоянную толщину, что позволяет решать плоскую задачу теории упругости.

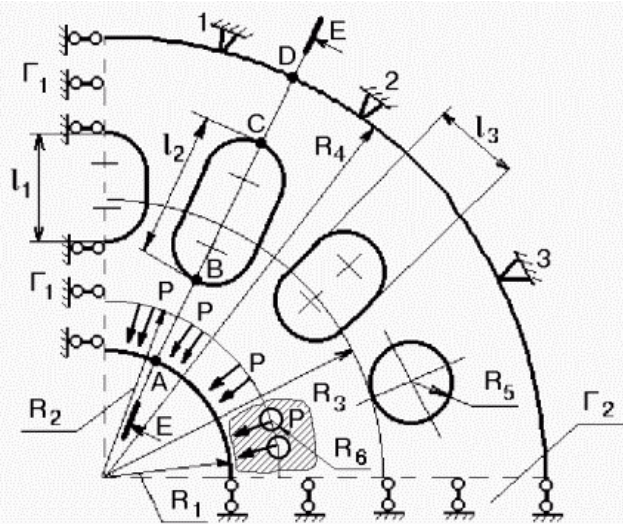


Рис. 1. Схема четверти силового каркаса конструкции магнитной системы.

Задача решается методом конечных элементов, позволяющим представить сплошное тело в виде совокупности отдельных конечных элементов, взаимодействующих между собой в конечном числе узловых точек, к которым прикладываются некоторые фиктивные усилия взаимодействия, характеризующие действие распределенных внутренних напряжений, приложенных вдоль реальных границ стыковки смежных элементов. Проблема сводится к расчету упругой системы с конечным числом степеней свободы. Замена исходной конструкции совокупностью дискретных элементов подразумевает равенство энергий конструкции и ее дискретной модели. Однако элементы реальной конструкции имеют вдоль своей границы непрерывные связи со смежными элементами, следовательно при построении дискретной модели необходимо делать некоторые априорные предположения о характере силового или кинематического взаимодействия между смежными элементами. Отсюда вытекает, что дискретная модель будет лишь приближенно отражать поведение исходной конструкции.

Метод конечных элементов реализуется в варианте метода перемещений. За основные неизвестные приняты приращения координат узлов от их текущих значений, то есть перемещения. Перемещения узловых точек  $\{w\}$  на шаге нагружения определяются в результате решения системы линейных алгебраических уравнений вида  $\{F\} = [C] \{w\}$ , где  $\{w\}$  – N-мерный вектор перемещения узлов конечноэлементной сетки на шаге нагружения;  $[C]$  – матрица жесткости системы, строится суммированием матриц жесткости отдельных конечных элементов, которые содержат коэффициенты соотношения между вектором узловых реакций и вектором узловых перемещений.

Для получения достаточно точного решения в силу сложной геометрии, наличия системы отверстий, необходимо разбиение с плотной сеткой конечных элементов со сгущением в зоне концентрации напряжений возле

отверстий. В силу циклической симметрии конструкции и действующих нагрузок рассматривается одна четвертая часть плиты, покрытая сеткой, содержащей 1525 узлов, на границах  $\Gamma_1$  и  $\Gamma_2$  – шарнирное опирание, то есть  $u/\Gamma_1 = 0$  и  $v/\Gamma_2 = 0$ , в узлах 1,2,3 –  $u_i = v_i = 0$ ;  $i = 1,3$  (см. рис. 1).

В первом приближении влияние отверстий радиуса  $R_6$  на НДС плиты сведено к действию сосредоточенных сил  $F$ . Геометрические размеры для стальной плиты с модулем упругости  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,23$  приведены в таблице. Суммарная нагрузка в радиальном направлении  $\sum F_i = 24 \cdot 10^5$  Н;  $i = 1,8$ .

Геометрические размеры детали, см

$R_1$	$R_2$	$R_3$	$R_4$	$R_5$	$R_6$	$l_1$	$l_2$	$l_3$
103,5	116	170	261	20	3,5	60	66	40

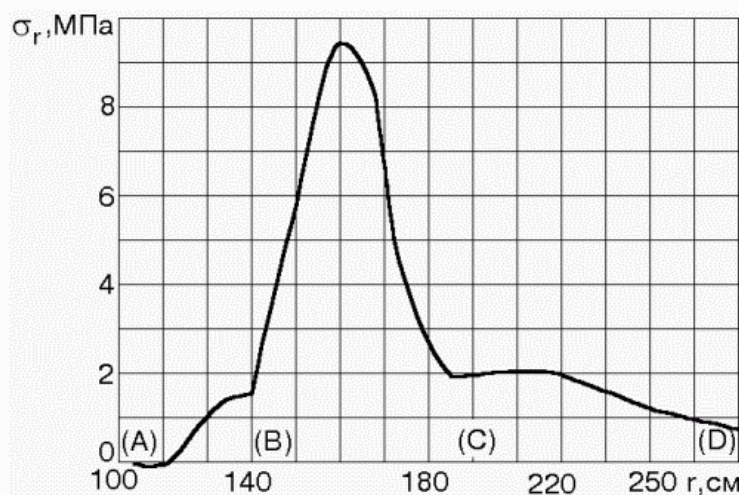


Рис. 2. Распределение радиальных напряжений в сечении E–E.

На рис. 2 приведено распределение радиальных упругих напряжений  $\sigma_r$  в сечении E-E. Анализ полученных результатов показывает, что напряжения  $\sigma_r$  являются знакопеременными, максимальные растягивающие напряжения достигаются вблизи отверстий диска, области сжатия диска соответствует кольцевой участок плиты, расположенный между центральным отверстием и окружностью, проходящей через узлы приложения внешних нагрузок. По оси абсцисс, кроме участков, лежащих в плоскости сечения АВ и CD, показан участок ВС, соответствующих поверхности отверстия под проводники, свободного от нагрузки. Эти отверстия также являются концентраторами напряжений, вблизи них наблюдаются наибольшие растягивающие напряжения. Величина напряжений в элементах, расположенных на расстоянии  $R_3$  от оси плиты вблизи отверстий, в 5–6 раз превышают напряжения в других

областях плиты и достигают  $\sigma_r \approx 20$  МПа.

С целью повышения точности расчетов НДС вблизи штифтовых отверстий радиуса  $R_6$  далее рассматривалась 1/16 часть диска, на которую накладывалась неравномерная сетка со значительным сгущением между отверстиями, включающая 1264 узла. При решении задачи учитывалось, что сосредоточенная радиальная сила  $F = 3 \cdot 10^5$  Н распределена по контуру отверстия, в котором закрепляется клиновое устройство, и направлена по нормали к поверхности отверстия радиуса  $R_6$ .

На рис. 3 приведено распределение радиальных  $\sigma_r$  и тангенциальных  $\sigma_\theta$  напряжений вдоль окружности штифтового отверстия в зависимости от угла (см. выделенную область на рис. 1).

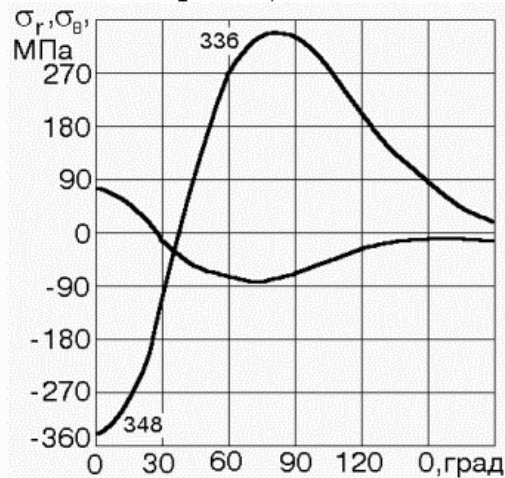


Рис. 3. Распределение напряжений вдоль контура штифтового отверстия.

Из полученных результатов следует, что области радиального сжатия соответствует 1/6 части отверстия  $R_6$  ( $\theta < 30^\circ$ ), а остальная область испытывает растяжение. При это максимальная величина радиального напряжения при сжатии и растяжении примерно одинакова:  $-348 \leq \sigma_r \leq 336$  МПа а достигается максимум при  $\theta = 0^\circ$  – сжатие,  $\theta = 90^\circ$  – растяжение. Область в промежутке между штифтовыми отверстиями является зоной с наибольшей концентрацией напряжений в плите. Максимальные значения напряжений достигаются на границах отверстий:  $-342 \leq \sigma_r \leq 336$  МПа,  $-68 \leq \sigma_\theta \leq 71$  МПа и превышают соответствующие напряжения в центре промежутка в 1,7 раза.

Полученные результаты позволяют сделать вывод о возможности возникновения (при данной толщине диска) явления текучести в зоне между отверстиями, так как к указанным выше напряжениям еще будут добавляться напряжения изгиба диска силами, перпендикулярными его плоскости, но эти

напряжения на порядок меньше (так как изгибающие усилия на порядок меньше усилий в плоскости диска).

Поступила в редколлегию 03.09.2001

УДК 629.11.012

## **ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕНИЙ И ДЕФОРМАЦИЙ В СОСТАВНОМ КОЛЕСЕ ЭЛЕКТРОВАГОНА ПРИ СБОРКЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ КОМБИНИРОВАННОГО ТЕРМИЧЕСКОГО СПОСОБА**

А.Г.Андреев, В.Н.Иванова, И.Л.Оборский, А.В.Щепкин

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков; Киевский государственный университет технологии и дизайна, Украина*

On the basis of the available experimental data the systematic numerical research of one piece rolled railroad car wheel were made using technological heating by induction-heating devices which allowed the establishment of the laws of the stress-strain state of the wheel set elements, during its thermal assembly.

Объектом исследования является составное спицевое колесо электровагона подвижного состава железнодорожного транспорта. Колесо (рис. 1) включает бандаж и центр, которые соединяются посадкой с натягом 1,0 — 1,4 мм. Первоначально согласно технической документации предполагалось использовать натяг в интервале 0,5 — 1,4 мм. Однако процесс эксплуатации показал низкую статическую и эксплуатационную прочность соединений, что привело к необходимости увеличения минимального значения натяга. Однако и в этом случае при резких и длительных сдвигах при трогании поезда, при переходах по стрелках и, особенно часто, при торможении наблюдались случаи сдвига бандажа относительно центра, что может привести к аварийной ситуации.

Поэтому актуальным является разработка мер для обеспечения высоких эксплуатационных характеристик колеса, таких как модернизация его конструкции, разработка более прогрессивной технологии формирования посадок с натягом с использованием комбинированного термического способа с нагревом бандажа и низкотемпературным охлаждением центра в среде жидкого азота. Следует отметить, что в литературе отсутствуют данные о напряженно-деформированном состоянии составного колеса, что требует восполнения существующего пробела.

В качестве метода расчетного исследования напряженно-деформированного состояния элементов колеса принят МКЭ [1] с использованием программного комплекса COSMOS. Были созданы расчетные конечноэлемен-



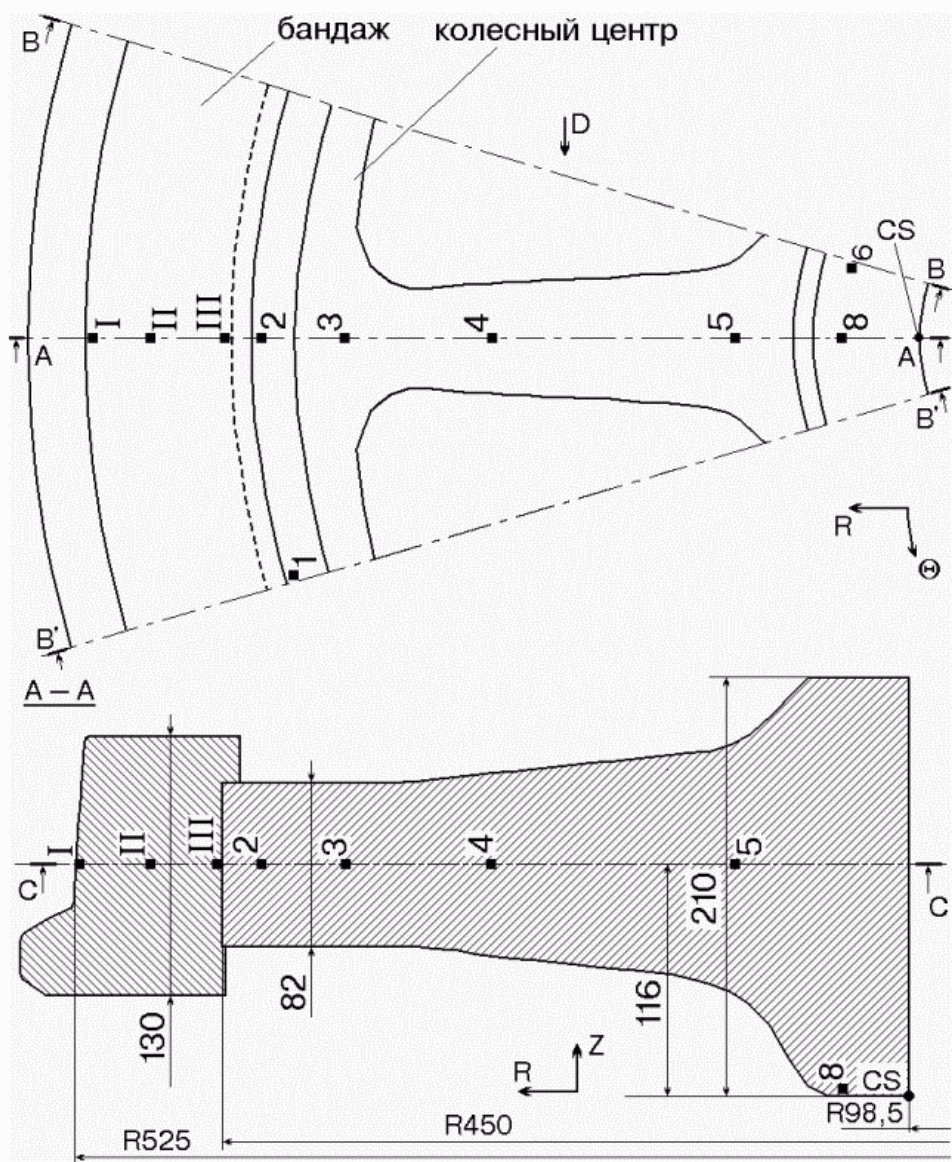


Рис. 1. Вагонное спицевое колесо

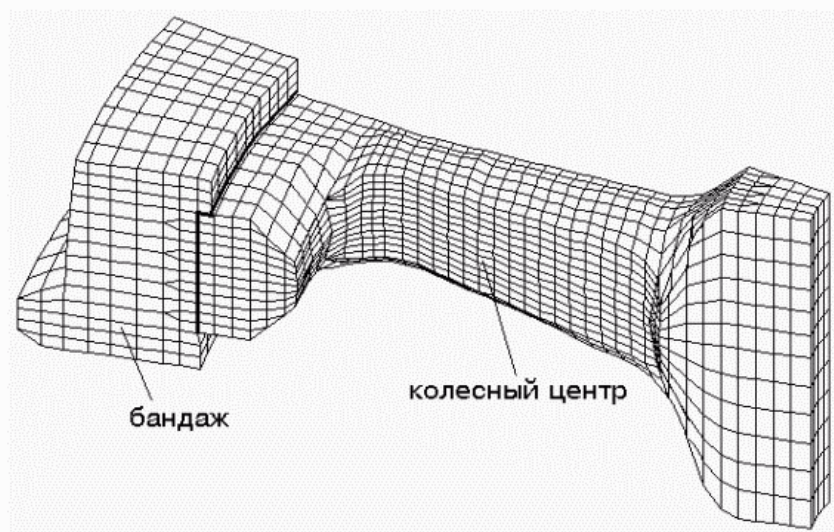


Рис. 2. Разбиение детали на КЭ.

тные модели: колесного центра, бандажа и колеса в сборе (рис. 2, табл. 1). Применен призматический изопараметрический КЭ с восемью узлами. При этом учитывались циклическая симметрия детали в окружном направлении.

Таблица 1. Характеристики конечноэлементных моделей

Тип модели	Число узлов	Число КЭ	Половина ширины ленты	Размер матрицы жесткости, чисел
Бандаж	1397	1050	891	1,28 млн.
Колесный центр	3814	3000	1095	3,81 млн.
Колесо в сборе	5068	4050	1223	5,76 млн.

Таблица 2. Данные о распределении температур в колесном центре при его охлаждении, использованные в расчетах, град. С

Момент времени	N термопары						
	8	6	5	4	3	2	1
30 с.	-10	-16	-35	-45	-40	-10,5	-16,5
120 с.	-90	-70	-110	-120	-115	-60	-80
300 с.	-	-120	-195	-195	-185	-125	-145

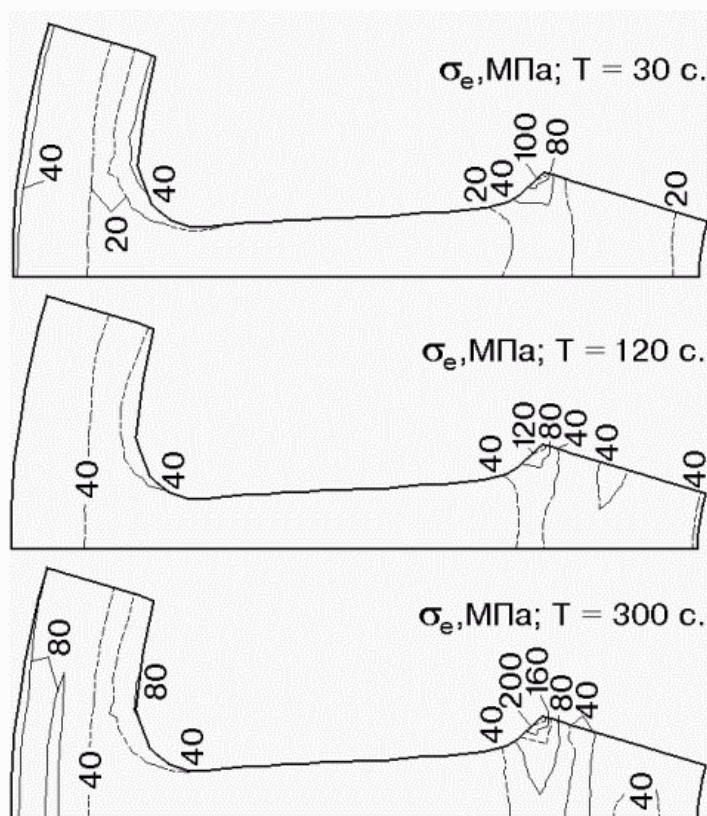


Рис. 3. Распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в колесном центре в сечении С при его охлаждении для сборки.



Характеристики материала: коэффициент Пуассона  $\nu = 0,3$ ; модуль ти  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа; коэффициент линейного расширения  $\alpha = 11 \cdot 10^{-6}$  град<sup>-1</sup>.

На рис. 1 цифрами I,II,III и 1,2,3,4,5,6,8 обозначены термопары. Исходя из имеющихся данных, температурное поле в детали с помощью специальной программы задавалось в виде 4 графиков:

- внутри детали в сечении А (см. рис. 1);
- на поверхности в сечении А;
- внутри детали в сечениях В или В';
- на поверхности в сечении В или В'.

В промежуточных областях температура изменялась по линейному закону. В табл. 2 приведены экспериментальные данные о распределении температур, использованные в расчете. Время охлаждения колесного центра составляло 300 с.; одновременно проводился нагрев бандажа.

На рис. 3 показано распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в колесном центре в сечении С (см. рис. 1) при его охлаждении для сборки колеса в моменты времени 30, 120 и 300 секунд; в табл. 3 приведены данные о максимальных напряжениях в детали. Как показали результаты расчета, наибольшие напряжения наблюдаются в детали в момент окончания охлаждения в 300 с. При этом радиальные напряжения  $\sigma_r$  изменяются от -25 Мпа во внутренней части ступицы до 65,3 Мпа в галтели перехода от спицы к ступице. Окружные напряжения  $\sigma_e$  изменяются в интервале от -85 Мпа в ободе до 315 Мпа в галтели перехода от спицы к ступице. Там же максимального значения в 279 Мпа достигают эквивалентные напряжения  $\sigma_e$ .

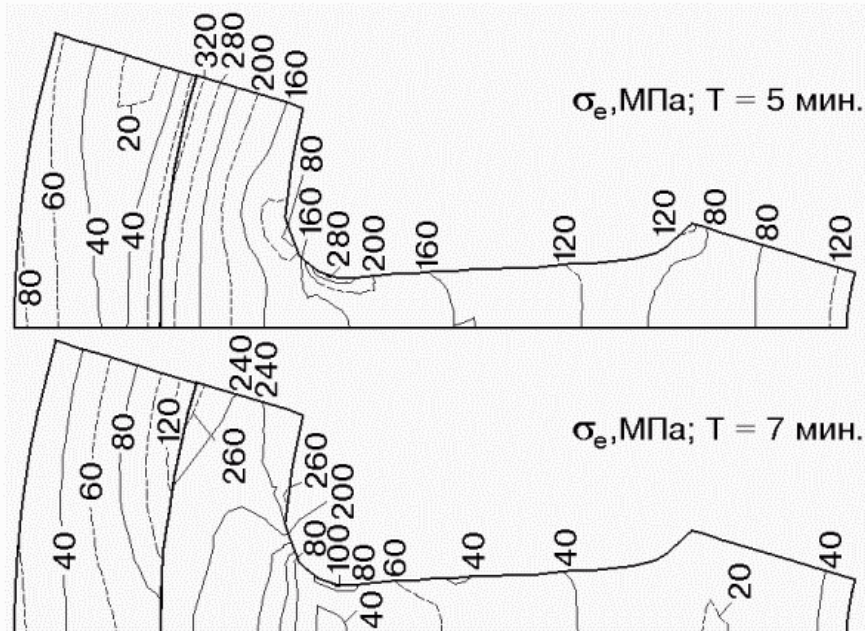


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в колесе в сечении С в моменты времени 5 и 7 мин. после сборки.



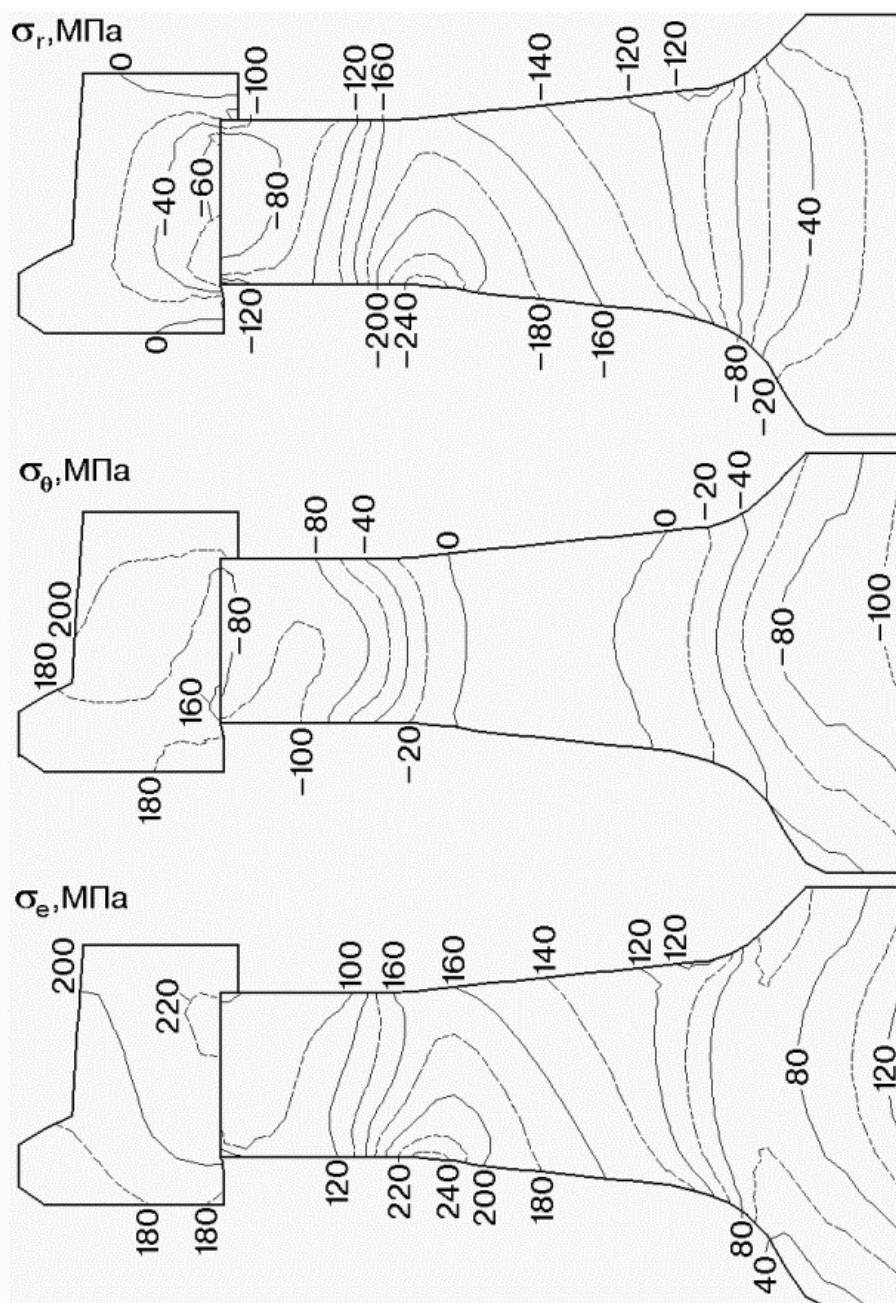


Рис. 5. Распределение напряжений в колесе в сечении А, обусловленное соединением его частей посадкой с натягом, после выравнивания температур в детали.

После охлаждения колесного центра и нагрева бандажа производилась сборка колеса. В табл. 4 приведены данные о распределении температур в колесе после его сборки, использованные в расчете, в 5 и 7 мин. с момента сборки. В расчетах предполагалось, что бандаж контактирует с колесным центром по всей поверхности соединения, а также отсутствие сил трения в соединении.

На рис. 4 показано распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в колесе в сечении С после сборки в моменты времени 5 и 7 мин.; в табл. 5 приведены данные о максимальных напряжениях в детали. Как видно из

полученных данных, максимальные радиальные напряжения  $\sigma_r$  в колесе в процессе формирования натяга наблюдаются в галтели перехода обода к спице; максимальные окружные напряжения  $\sigma_\theta$  - в колесном центре в зоне контакта с ободом; максимальные эквивалентные напряжения  $\sigma_e$  - в обоих упомянутых выше частях центра.

Таблица 3. Максимальные напряжения в колесном центре в процессе охлаждения, МПа

Момент времени	Тип напряжения	Координаты			Значение, МПа
		R, мм	Θ, град.	Z, мм	
30 с.	$\sigma_r$	180	343,65	86	34,6
	$\sigma_\theta$	184,7	343,65	131	153,3
	$\sigma_e$	184,5	343,63	96	134,8
120 с.	$\sigma_r$	419,9	358,64	75	48,4
	$\sigma_\theta$	184,7	343,65	131	192,5
	$\sigma_e$	184,5	343,63	96	170,7
300 с.	$\sigma_r$	180	343,65	86	65,3
	$\sigma_\theta$	184,7	343,65	131	315,0
	$\sigma_e$	184,5	343,63	96	279,0

Таблица 4. Данные о распределении температур в детали при ее сборке, использованные в расчетах, град. С

Момент времени	N термопары							
	8	5	4	3	2	III	II	I
5 мин.	-148	-141	-120	-25	22	82	98	118
7 мин.	-133	-126	-105	0	9	25	38	52

Таблица 5. Максимальные напряжения в детали в процессе сборки, МПа

Момент времени	Тип напряжения	Координаты			Значение, МПа
		R, мм	Θ, град.	Z, мм	
5 мин.	$\sigma_r$	359,8	356,1	102,0	298,0
	$\sigma_\theta$	450,0	343,65	157,0	-372,7
	$\sigma_e$	450,0	343,65	157,0	380,2
7 мин.	$\sigma_r$	370,0	355,82	88,0	117,5
	$\sigma_\theta$	450,0	343,65	75,0	-297,0
	$\sigma_e$	394,6	349,91	134,5	280,9

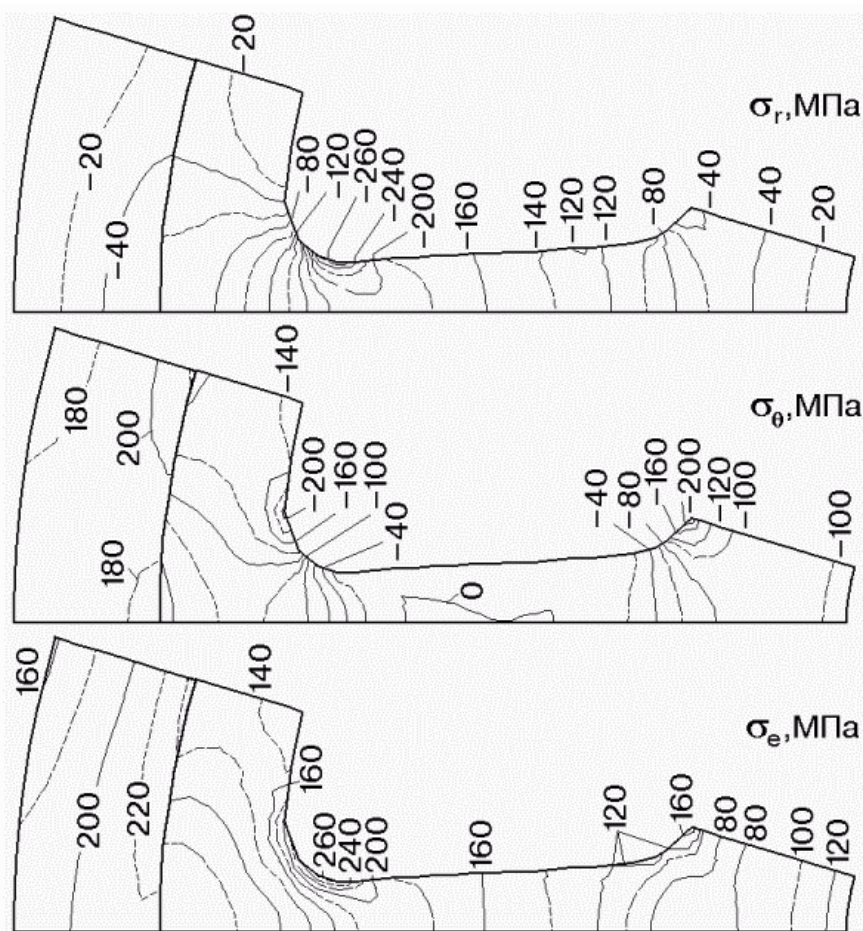


Рис. 6. Распределение напряжений в колесе в сечении С, обусловленное соединением его частей посадкой с натягом, после выравнивания температур в детали.

На рис. 5 показано распределение радиальных  $\sigma_r$ , окружных  $\sigma_\theta$  и эквивалентных  $\sigma_e$  напряжений в колесе в сечении А после его сборки, обусловленное соединением его частей посадкой с натягом; на рис. 6 даны те же напряжения в сечении С; на рис. 7 даны те же напряжения в сечении В и вид по стрелке D; в табл. 6 приведены данные о максимальных напряжениях в детали. На рис. 8 показана схема деформации колеса, обусловленная соединением его частей посадкой с натягом.

Радиальные сжимающие напряжения  $\sigma_r$  в зоне контакта составляют 20 - 120 МПа, максимального значения -314,4 МПа достигают на поверхности спицы. Окружные напряжения  $\sigma_\theta$  в бандаже максимальны в промежутке между спицами (258,3 МПа); в колесном центре - в зоне большого буртика (-226,8 МПа). Эквивалентные напряжения  $\sigma_e$  в зоне контакта деталей составляют в бандаже 200 - 250 МПа, причем наибольшее значение достигается в промежутке между спицами (252,4 МПа). В колесном центре максимальная концентрация напряжений наблюдается на боковой поверхности в средней части спицы (304,7 МПа) и в зоне большого буртика.



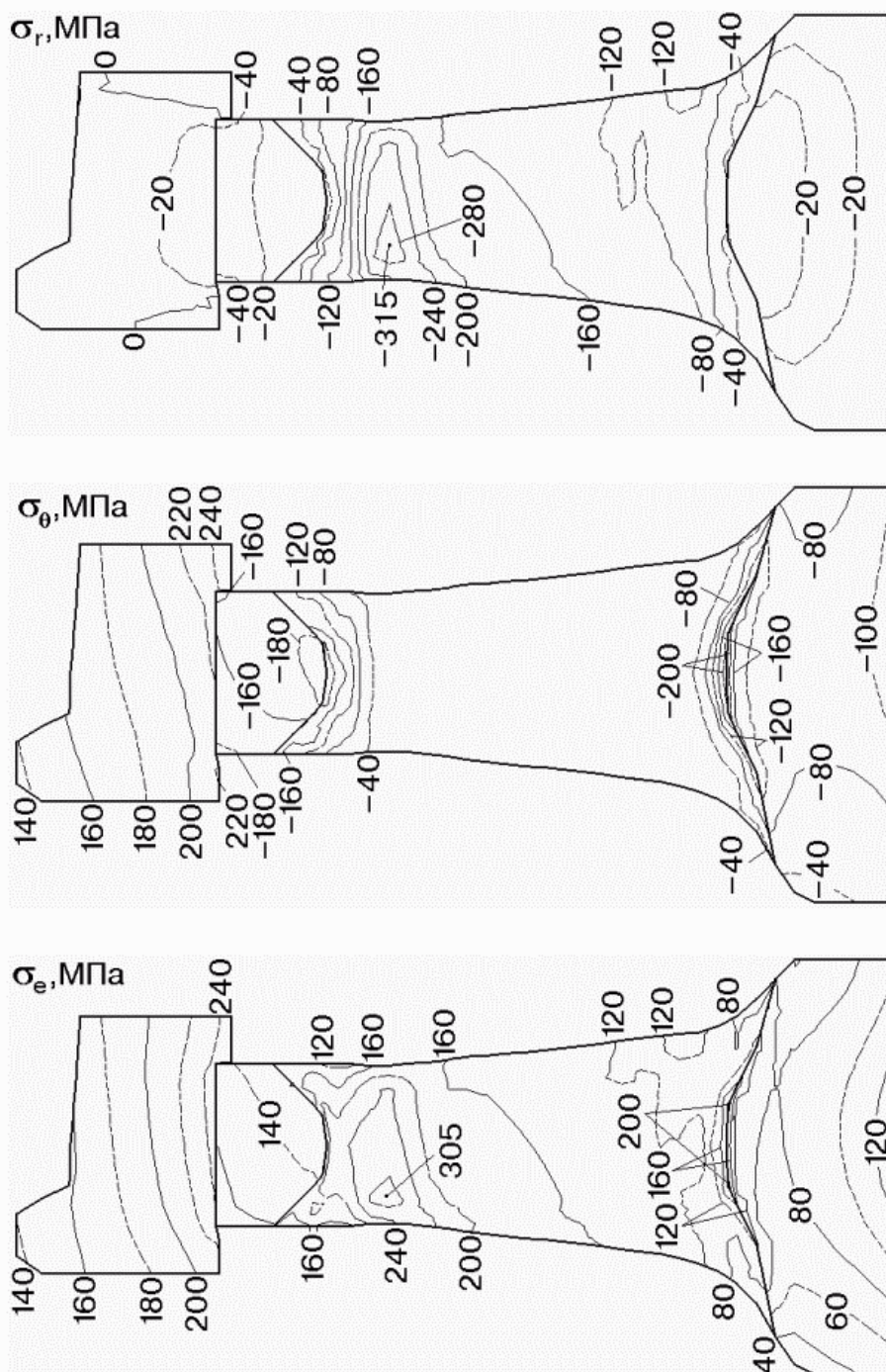


Рис. 7. Распределение напряжений в колесе в сечении В и вид их по стрелке D, обусловленный соединением частей колеса посадкой с натягом, после выравнивания температур в детали.

Согласно проведенным расчетам, наибольшие напряжения наблюдаются в переходных частях спицы к ободу и ступице собранного остывшего колеса и в процессе схватывания колеса в момент времени 5 минут. В процессе сборки в отдельных точках детали напряжения достигают значений, близких к прочностным характеристикам, что требует проведения операций сборочного процесса без резких ударных нагрузок.

Таблица 6. Максимальные напряжения в собранной детали, МПа

Тип напряжения	Координаты			Значение, МПа
	R, мм	$\Theta$ , град.	Z, мм	
	бандаж			
$\sigma_r$	450,0	0	81,8	-80,0
$\sigma_\theta$	441,8	343,34	158,0	258,3
$\sigma_z$	450,0	343,65	150,2	252,4
	колесный центр			
$\sigma_r$	359,8	356,18	88,0	-314,4
$\sigma_\theta$	184,7	343,65	131,0	-226,8
$\sigma_z$	359,8	356,18	88,0	304,7

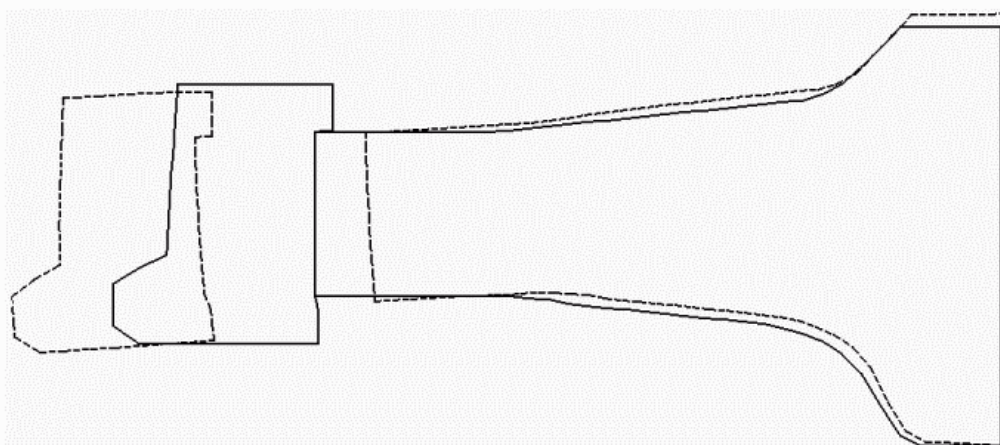


Рис. 8. Схема деформации колеса, обусловленная соединением его частей посадкой с натягом, после выравнивания температур.

Таким образом, можно констатировать, что использование низкотемпературного охлаждения центра в среде жидкого азота не оказывает вредного воздействия на материал и конструкцию последнего и может рекомендовано для применения в технологии комбинированной термической сборки.

## Литература

1. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М., Высшая школа, 1985. - 392 с.

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК 534.1

## РАСЧЕТ КОЛЕБАНИЙ И РЕСУРСА ТРУБОПРОВОДА МАСЛОСИСТЕМЫ ГАЗОПЕРЕКАЧИВАЮЩЕГО АГРЕГАТА

А.Б. Белоцерковский, В.А. Жовдак, В.А. Левашов, А.И. Трубаев

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, ОАО "Сумское  
НПО им. Фрунзе", Сумы, Украина*

The average time before fracture due to fatigue damage accumulation in spatial piping systems under kinematical excitation is determined. It is supposed that all supports of the piping system subjected to the identical acceleration modeling stationary random process. The solution of this problem is based on the finite element method and the spectral method. The computer program for IBM PC on the basis of this algorithm has been developed.

### 1. Введение

Рассматривается задача определения среднего времени до разрушения (СВР) вследствие накопления усталостных повреждений в пространственных трубопроводных системах при кинематическом воздействии, которое моделируется стационарным случайным процессом. Предполагается, что влияние потока транспортируемой среды на динамические характеристики системы несущественно.

Оценка ресурса проводится на основе гипотезы линейного суммирования усталостных повреждений с использованием теории случайных функций. Задача решается на основе метода конечных элементов в форме перемещений. В качестве конечного элемента используется прямолинейный стержень кольцевого поперечного сечения с известными конечно-элементными соотношениями. Уравнение движения конечно-элементной модели конструкции имеет вид [1]:

$$M\ddot{Y} + R\dot{Y} + KY = P(t), \quad (1)$$

где  $M$ ,  $R$ ,  $K$  – матрицы инерции, демпфирования и жесткости конструкции соответственно;  $Y$  – вектор узлового перемещения. Если все опоры трубопровода испытывают одинаковое ускорение, то вектор внешней нагрузки  $P(t)$  определяется по формуле

$$P(t) = -MN\ddot{Y}_0(t), \quad (2)$$

где  $N$  – вектор, содержащий направляющие косинусы перемещений опор в общей системе координат;  $\ddot{Y}_0(t)$  – ускорение опор с известными вероятностными характеристиками.

## 2. Метод решения

### 2.1 Определение вероятностных характеристик перемещений системы

Для стационарной случайной функции  $\ddot{Y}_0(t)$  используем неканоническое разложение в виде нелинейной функции трех случайных величин  $c$ ,  $\lambda$ ,  $\varphi$  [2]:

$$\ddot{Y}_0(t) = c \cos(\lambda t + \varphi). \quad (3)$$

Установившееся перемещение системы представим в виде ряда по формам собственных колебаний:

$$Y(t) = \sum_{i=1}^s \frac{b_i}{m_i} D_i \cos(\omega t + \varphi - \theta_i) Q_i, \quad (4)$$

где  $Q_i$  – вектор  $i$ -ой собственной формы, а коэффициенты  $D_i$ ,  $m_i$ ,  $\theta_i$ ,  $b_i$ ,  $Q_i^T M$  определяются по формулам (5), (6) соответственно.

$$\left\{ \begin{array}{l} D_i = \frac{c}{\sqrt{(p_i^2 - \omega^2)^2 + 4r_i^2 \omega^2}}; \quad \theta_i = \arctg\left(\frac{2r_i \omega}{p_i^2 - \omega^2}\right); \\ m_i = Q_i^T M Q_i; \end{array} \right. \quad (5)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b_i = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^s F_{ix}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^s F_{iy}\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^s F_{iz}\right)^2}; \\ Q_i^T M = \{F_{1x}, F_{1y}, F_{1z}, \Phi_{1x}, \dots, F_{sz}, \Phi_{sx}, \Phi_{sy}, \Phi_{sz}\}. \end{array} \right. \quad (6)$$

Здесь  $s$  – число форм собственных колебаний;  $p_i$  – собственная частота;  $r_i$  – коэффициент вязкого трения.

### 2.2 Определение вероятностных характеристик напряженного состояния системы

Рассмотрим отдельный  $k$ -й конечный элемент трубопровода, ограниченный узлами с номерами  $j$  и  $n$  (рис. 1).

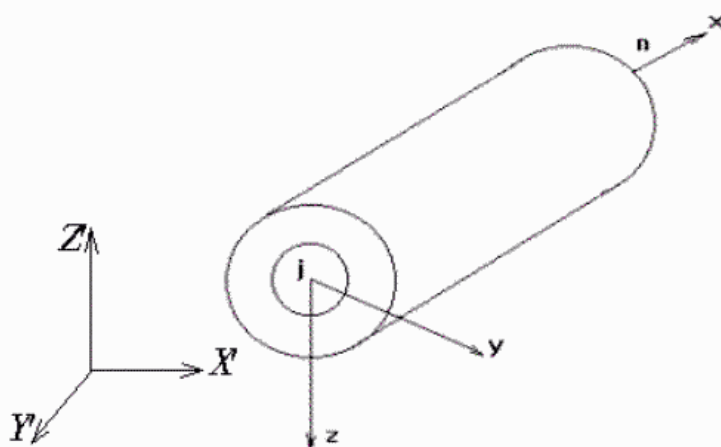


Рис. 1. Конечный элемент трубопровода.

Систему координат  $XYZ$ , связанную с продольной осью элемента, назовем местной, а систему координат  $X'Y'Z'$ , в которой определяются местоположения узлов, назовем общей. Вектор перемещений  $k$ -го элемента в местной системе координат с учетом (5) имеет вид:

$$X_k = \sum_{i=1}^s \frac{b_i}{m_i} D_i \cos(\omega t + \varphi - \theta_i) \begin{Bmatrix} q_{ji} \\ q_{ni} \end{Bmatrix}, \quad (7)$$

где  $q_{ji}$ ,  $q_{ni}$  – векторы форм  $j$ -го и  $n$ -го узлов в местной системе координат. Они имеют структуру, представленную следующей формулой

$$q_{li}^T = \{u_{li}, v_{li}, w_{li}, \theta_{xli}, \theta_{yli}, \theta_{zli}\}, \quad (l = j, n), \quad (8)$$

где  $u_{li}$ ,  $v_{li}$ ,  $w_{li}$  – относительные амплитуды линейных перемещений в направлении осей  $X, Y, Z$ , соответственно;  $\theta_{xli}$ ,  $\theta_{yli}$ ,  $\theta_{zli}$  – относительные амплитуды углов поворота вокруг этих осей.

В общем случае элемент системы испытывает деформации растяжения-сжатия, изгиба в двух плоскостях и кручения. Принимая гипотезу плоских сечений, полагаем, что при деформациях растяжения-сжатия  $\sigma_y = \sigma_z = 0$ ; при изгибах  $\tau_{yx} = \tau_{zx} = 0$ . Используя физические и геометрические уравнения теории упругости, максимальные напряжения на наружном контуре поперечного сечения элемента можно записать в виде

$$\begin{cases} \sigma_i = E \left[ \frac{\partial U_i}{\partial X} + R \sqrt{\left( \frac{\partial^2 V_i}{\partial X^2} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 W_i}{\partial X^2} \right)^2} \right] \\ \tau_i = GR\alpha_i \end{cases} \quad (9)$$

где  $\sigma_i$  – нормальное напряжение;  $E$  – модуль упругости материала;  $R$  – наружный радиус трубки;  $U_i$ ,  $V_i$ ,  $W_i$  – функции перемещений, соответствующие  $i$ -той форме вдоль осей  $X, Y, Z$  – соответственно;  $\tau_i$  – полное касательное напряжение;  $G$  – модуль сдвига;  $\alpha_i$  – угол закрутки.

Окончательно с учетом (3), (4) получаем соотношения (10), (11):

$$\sigma_i = \frac{EA_i b_i D_i}{m_i} \cos(\lambda t + \varphi - \theta_i); \quad (10)$$

$$\tau_i = \frac{GR\alpha_i b_i D_i}{m_i} \cos(\lambda t + \varphi - \theta_i), \quad (11)$$

где коэффициенты  $A_i, \alpha_i$  определяются по формулам (12), (13).

$$A_i = \frac{u_{ni} - u_{ji}}{l} + \frac{2R}{l^2} \sqrt{\left( a_{3zi} + \frac{3Xa_{4zi}}{l} \right)^2 + \left( a_{3yi} + \frac{3Xa_{4yi}}{l} \right)^2}; \quad (12)$$



$$\alpha_i = \frac{(\theta_{xni} - \theta_{xji})}{l}. \quad (13)$$

Здесь  $l$  – длина элемента; коэффициенты  $a_{3zi}$ ,  $a_{3yi}$ ,  $a_{4zi}$ ,  $a_{4yi}$  определяются следующими соотношениями

$$\begin{cases} a_{3zi} = -3w_{ji} - 2l\theta_{yjl} + 3w_{ni} - l\theta_{yni}; \\ a_{3yi} = -3v_{ji} - 2l\theta_{zjl} + 3v_{ni} - l\theta_{zni}; \\ a_{4zi} = 2w_{ji} + l\theta_{yjl} - 2w_{ni} + l\theta_{yni}; \\ a_{4yi} = 2v_{ji} + l\theta_{zjl} - 2v_{ni} + l\theta_{zni}. \end{cases} \quad (14)$$

Дисперсии для напряжений и их производных по времени определяются по формулам

$$\begin{cases} D_{\sigma_i} = 2 \left( \frac{EA_i b_i}{m_i} \right)^2 F_{1i}; & D_{\tau_i} = 2 \left( \frac{GR\alpha_i b_i}{m_i} \right)^2 F_{1i}; \\ D_{\dot{\sigma}_i} = \frac{D_{\sigma_i} F_{2i}}{F_{1i}}; & D_{\dot{\tau}_i} = \frac{D_{\tau_i} F_{2i}}{F_{1i}}. \end{cases} \quad (15)$$

где коэффициенты  $F_{1i}$ ,  $F_{2i}$  записываются в форме

$$\begin{cases} F_{1i} = \int_0^{\infty} \frac{S_{\ddot{y}_o}(\omega) d\omega}{(p_i^2 - \omega^2)^2 + 4r_i^2 \omega^2}; \\ F_{2i} = \int_0^{\infty} \frac{\omega^2 S_{\ddot{y}_o}(\omega) d\omega}{(p_i^2 - \omega^2)^2 + 4r_i^2 \omega^2}. \end{cases} \quad (16)$$

Здесь  $S_{\ddot{y}_o}(\omega)$  – спектральная плотность ускорения опор.

Коэффициенты корреляции между  $\sigma_i$  и  $\tau_i$ ,  $\dot{\sigma}_i$  и  $\dot{\tau}_i$  имеют вид

$$\begin{cases} K_{\sigma_i \tau_i} = 2EA_i GR\alpha_i \left( \frac{b_i}{m_i} \right)^2 \frac{F_{1i}}{\sqrt{D_{\sigma_i} D_{\tau_i}}}; \\ K_{\dot{\sigma}_i \dot{\tau}_i} = 2EA_i GR\alpha_i \left( \frac{b_i}{m_i} \right)^2 \frac{F_{2i}}{\sqrt{D_{\dot{\sigma}_i} D_{\dot{\tau}_i}}}. \end{cases} \quad (17)$$

Эквивалентное напряжение, соответствующее  $i$  – форме колебаний, записывается следующим образом

$$Z_i = \sqrt{\sigma_i^2 + \beta_i^2}; \quad \beta_i = 2\tau_i. \quad (18)$$

Таким образом, получены достаточно простые с точки зрения численной реализации соотношения, позволяющие определить вероятностные характеристики параметров НДС трубопроводов при стационарном случайном воздействии.

### 2.3 Определение среднего времени безотказной работы трубопроводов

Для определения плотности вероятности максимумов эквивалентных напряжений используем приближенную формулу

$$f_{\max}(z_i) = -\frac{n'_{zi}}{n_{zi}(z_{0i})}, \quad (19)$$

применимую к узкополосным процессам, где  $z_{0i} \neq 0$  – некоторое малое значение,  $n_{zi}$  – среднее число выбросов процесса, определяемое соотношением

$$n_{zi} = \frac{z_i}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_{1i} D_{2i}}} * \\ * \int_0^{2\pi} \exp\left[-\frac{1}{2} z_i^2 A(\psi_i)\right] \sqrt{D_{4i} \sin^2 \psi_i + D_{3i} \cos^2 \psi_i} d\psi_i, \quad (20)$$

где  $\psi_i$  определяется выражением:

$$\psi_i = \arctg(\beta_i / \sigma_i). \quad (21)$$

Напряжение на каждой  $i$ -той форме собственных колебаний представляет собой узкополосный случайный процесс, частота которого совпадает с  $i$ -той собственной частотой системы.

Среднее время до разрушения определяется соотношением [2]:

$$t = \left[ \sum_{i=1}^s \frac{P_i}{2\pi N_0 r^m} F(r, i) \right]^{-1}, \quad (22)$$

где

$$F(r, i) = \int_0^{2\pi} B(\psi_i) \left\{ \exp\left[-\frac{1}{2} A(\psi_i) r^2\right] * + \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}-1} A^{-k}(\psi_i) r^{-2k} \prod_{j=1}^k (m-2j+1) \right\} + \\ + m A^{-\frac{m}{2}}(\psi_i) \prod_{j=1}^{\frac{m}{2}} (m-2j+1) \Phi(r, i) d\psi_i; \\ \left\{ \begin{array}{l} A(\psi_i) = \frac{\cos^2 \psi_i}{D_{1i}} + \frac{\sin^2 \psi_i}{D_{2i}}; \\ B(\psi_i) = \frac{\sqrt{D_{4i} \sin^2 \psi_i + D_{3i} \cos^2 \psi_i}}{(2\pi)^{\frac{3}{2}} \sqrt{D_{1i} D_{2i}}}; \\ \Phi(r, i) = \int_r^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{2} A(\psi_i) z_i^2\right] dz_i. \end{array} \right. \quad (24)$$

### 3. Результаты

Проводились численные исследования ресурса трубопровода маслосистемы газоперекачивающего агрегата при различном числе конечных элементов (КЭ): 7, 14 (рис. 2) и 28.

Трубопровод имеет следующие характеристики: материал – сталь 10×17 Н13М2Т, протяженность в плане  $L = 1,035$  м, модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^{11}$  Н/м<sup>2</sup>, плотность материала  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>, плотность масла  $\rho_m = 875$  кг/м<sup>3</sup>, наружный диаметр трубы  $D = 0,032$  м, толщина стенки  $h = 0,0035$  м.

Для спектральной плотности ускорения опор было принято следующее соотношение [3]:

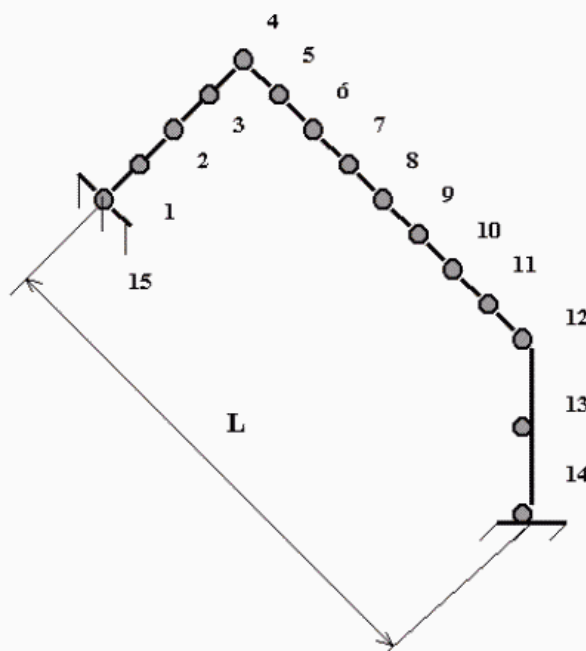


Рис. 2. Конечно-элементная модель конструкции трубопровода.

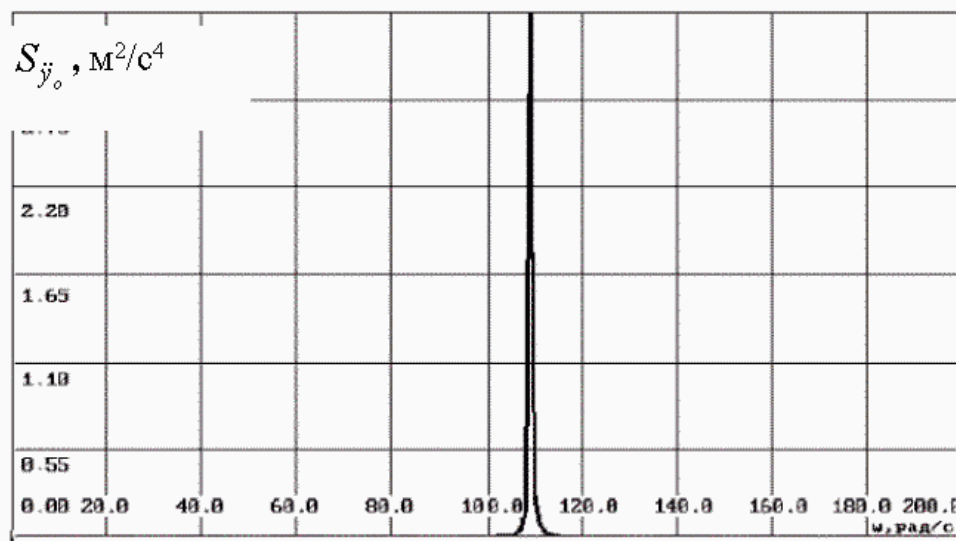


Рис. 3. Спектральная плотность ускорений.

Табл. 1. Собственные частоты трубопровода.

Номер частоты	Значение частоты, с <sup>-1</sup>		
	7 КЭ	14 КЭ	28 КЭ
1	109.13	107.85	107.75
2	111.98	110.37	110.25
3	150.55	187.87	145.15

Табл. 2. Среднее время до разрушения.

№ элемента	№ узла	Значение ресурса, ч	
		s=1	s=2
1	1	791	791
	2	10631	10631
2	2	3981	3981
	3	1681	1681
3	3	210	210
	4	$7.04 \cdot 10^{16}$	$7.04 \cdot 10^{16}$
4	4	$1.6 \cdot 10^{10}$	$1.6 \cdot 10^{10}$
	5	$3.56 \cdot 10^{16}$	$3.56 \cdot 10^{16}$
5	5	2239	2239
	6	$4.82 \cdot 10^{46}$	$4.82 \cdot 10^{46}$
6	6	2056	2056
	7	$1.07 \cdot 10^{14}$	$1.07 \cdot 10^{14}$
7	7	$1.03 \cdot 10^{132}$	$1.03 \cdot 10^{132}$
	8	$5.9 \cdot 10^6$	$5.9 \cdot 10^6$
8	8	4700	4700
	9	$1.2 \cdot 10^{41}$	$1.2 \cdot 10^{41}$
9	9	4300	4300
	10	$3.7 \cdot 10^{12}$	$3.7 \cdot 10^{12}$
10	10	—	$2.6 \cdot 10^{41}$
	11	$1.1 \cdot 10^8$	$1.1 \cdot 10^8$
11	11	$1.47 \cdot 10^4$	$1.47 \cdot 10^4$
	12	—	—
12	12	$1.5 \cdot 10^{19}$	$1.5 \cdot 10^{19}$
	13	$1.1 \cdot 10^{16}$	$1.1 \cdot 10^{16}$
13	13	$6.43 \cdot 10^{59}$	$6.43 \cdot 10^{52}$
	14	$2.47 \cdot 10^{81}$	$2.19 \cdot 10^{47}$
14	1	817	817
	15	2916	2916

$$S_{\ddot{y}_0}(\omega) = \frac{4\alpha(\omega_0^2 + \alpha^2)}{[\alpha^2 + (\omega - \omega_0)^2][\alpha^2 + (\omega + \omega_0)^2]}, \quad (25)$$

где  $\alpha = 0,231$ ,  $\omega_0 = 109,129$ .

График спектральной плотности ускорений показан на рис. 3.

Результаты расчета собственных колебаний представлены в табл. 1.

Как видно из табл. 1, для получения достоверных результатов при расчете первой и второй собственных частот трубопровода достаточно использовать 14-тиэлементную модель.

В табл. 2 приведены значения ресурса для 14-ти элементной модели трубопровода, полученные с использованием одной и двух форм собственных колебаний (прочерком обозначено значение ресурса, при котором нет разрушения).

Из табл. 2 видно, что наиболее повреждающей является первая форма колебаний. Расчет с использованием трех форм показал, что третья форма не вносит существенный вклад в общее решение, что согласуется с графиком спектральной плотности внешнего воздействия (рис. 3). Минимальный ресурс наблюдается в узлах № 1, № 3.

Проведен расчет ресурса трубопровода с использованием двух конечно-элементных моделей (14 и 28 КЭ) при учете одной и двух собственных форм колебаний ( $s = 1, 2$ ) для узла № 2 (рис. 2). Результаты расчета представлены в табл. 3.

Табл. 3. Дисперсии напряжений и среднее время до разрушения.

Величина	s=1			s=2		
	14 КЭ	28 КЭ	$\delta$ , %	14 КЭ	28 КЭ	$\delta$ , %
$D_1$ , Па <sup>2</sup>	$1.531 \cdot 10^5$	$1.138 \cdot 10^5$	26	$2.097 \cdot 10^4$	$1.876 \cdot 10^4$	11
$D_2$ , Па <sup>2</sup>	1.287	1.43	10	$8.325 \cdot 10^{-2}$	$9.634 \cdot 10^{-2}$	14
$D_3$ , Па <sup>2</sup>	$1.596 \cdot 10^9$	$1.184 \cdot 10^9$	24	$2.3 \cdot 10^8$	$2.053 \cdot 10^8$	8
$D_4$ , Па <sup>2</sup>	$1.342 \cdot 10^4$	$1.487 \cdot 10^4$	12	$9.132 \cdot 10^2$	$1.054 \cdot 10^3$	19
СВР, ч	3981	1236	31	3981	1236	31

Данные, приведенные в табл. 3, подтверждают, что вклад второй формы колебаний в общее решение мал, так как дисперсии напряжений, соответствующие второй форме принимают существенно меньшие значения, чем на первой форме. Конечно-элементная дискретизация существенно влияет на определение ресурса конструкции.

### Заклучение

Разработана методика, алгоритм и программа на языке Турбо-Паскаль,

позволяющие оценить динамические характеристики, параметры напряженно-деформированного состояния и ресурс пространственных трубопроводных систем при стационарном случайном воздействии.

## **Литература**

**1.** Постнов В.А., Хархурим И.Я.. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. – Судостроение, Ленинград, 1974. **2.** Жовдак В.А., Трубаев А.И. Прогнозирование ресурса трубопроводов при случайном воздействии, Изв. вузов. Машиностроение, 1987, 6, 24-28. **3.** Тихонов В.И. Статистическая радиотехника. – Советское радио, Москва. – 1966.

Поступила в редколлегию 14.09.2001

УДК 539.3

## **ИССЛЕДОВАНИЕ СТАТИЧЕСКОЙ ПРОЧНОСТИ ВЕДУЩЕГО КОЛЕСА ГУСЕНИЧНОЙ МАШИНЫ**

Д.В.Бибик, С.И.Богарсуков

*КП ХКБМ им. А.А. Морозова, Харьков, Украина.*

The work is devoted to research of static durability of a real design – conducting wheel of the caterpillar machine. The decision of the task is achieved by sharing of an experimental research of a sample and numerical account of finite-element model of research object. The experimental research was carried out by a strain measurement method, and for finite-element account the ANSYS program was used. The estimation of wheels static durability at real loads influence was received as a result.

## **Введение**

Оценка напряженного состояния ведущих колес гусеничных машин может быть получена либо путем дорогостоящего и длительного натурного испытания, либо расчетным путем, для чего необходимо иметь адекватную расчетную модель. В настоящее время в технической литературе отсутствует рассмотрение вопросов прочностного расчета таких конструкций. Между тем расчетная модель может быть получена только на основе экспериментального исследования.

Появление данной работы было обусловлено указанными обстоятельствами. В ней приведено экспериментальное исследование напряженного состояния колеса. Потом та же задача решается путем численного исследования. Сопоставление результатов производится по наибольшим главным напряжениям.

Наибольший крутящий момент в эксперименте составил 69000 Н·м, при расчете принимался равным 120000 Н·м, т.е. максимально возможным для данного типа машины.

## 1 Экспериментальное исследование

Экспериментальное исследование напряженного состояния ведущего колеса выполнялось методом тензометрирования [1]. В качестве первичных преобразователей применялись тензодатчики КФ4П1-5-100, розетки КФ4Р2-5-200 и цепочки КФ5Ц2-3-100. Питание тензодатчиков и преобразование их сигналов осуществлялось системой измерения тензометрической СИИТ-3.

Основным отличием рассматриваемого ведущего колеса от выпускаемого серийно является длина его цилиндрической части диаметром 462 мм. На стадии планирования эксперимента предполагалось, что на прочность колеса значительное влияние оказывают лишь деформации кручения. Исходя из этого предположения, была сформирована схема расположения тензодатчиков. Датчики на колесо наклеивались в предполагаемых местах опасных сечений, так, как это показано на рис. 1. Здесь позициями обозначены розетки тензодатчиков и отдельно вынесена цепочка тензодатчиков, соединенных последовательно.

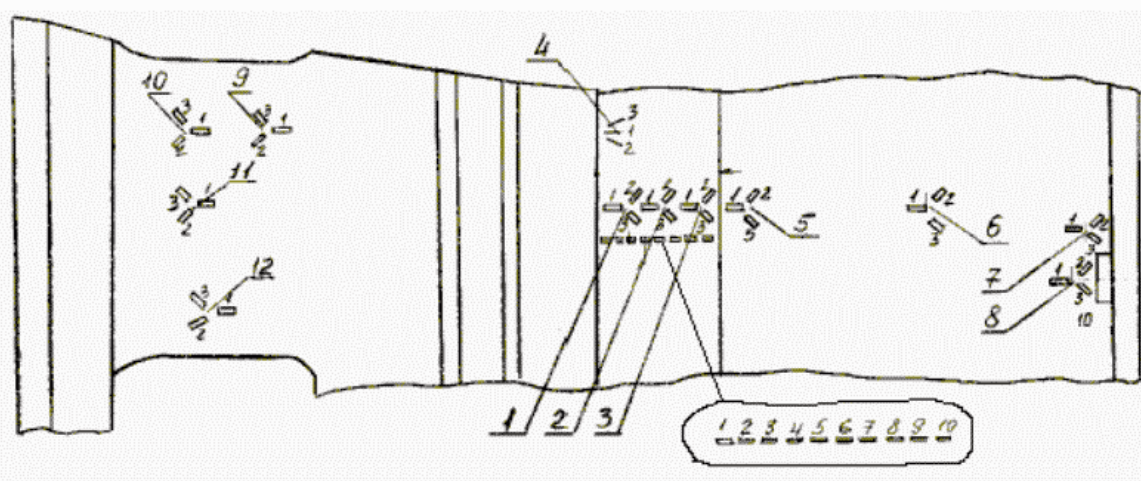


Рис. 1. Схема наклейки датчиков (вид сверху).

Для проведения испытаний была изготовлена специальная установка, в которой имитировались действующие на колесо факторы. Специальная установка, на которой проводились испытания, приведена на рис. 2. На плите 1 установки крепился картер 2, в который устанавливалась бортовая передача (БП) в сборе с реверсивной коробкой передач (КП) 3. На вал БП устанавливалось ведущее колесо 4, которое охватывалось частью гусеницы 5. Последняя с помощью кронштейнов 6 крепилась к плите 1. Усилие натяжения гусеницы контролировалось тензометрическими шпильками 7. Ведущее колесо со стороны КП нагружалось с помощью рычага 8 крутящим моментом.

Испытания проводились в следующем порядке:

– ведущее колесо крепилось на БП таким образом, чтобы зона, обклеенная тензодатчиками, находилась в центре сектора охвата колеса гусеницей. В связи с тем, что гусеница имеет существенную продольную податливость, для обеспечения передачи максимального крутящего момента часть ее траков до первого нагруженного зуба ведущего колеса заменялась стальной пластиной, к которой были приварены штатные пальцы.

– в КП включалась I передача, и на ее входе прикладывался ступенчато возрастающий крутящий момент. При каждом из значений момента определялись действующие в диске напряжения. В данных испытаниях был реализован максимальный крутящий момент на выходном валу БП равный 69000 Н·м.

– гусеница откреплялась от тензометрических шпилек и снималась с ведущего колеса, которое после этого поворачивалось последовательно на 1 зуб ( $\approx 30^\circ$ ) и на  $\approx 180^\circ$  (в первом случае нагружаемый зуб оставался в секторе охвата колеса гусеницей). В каждом из указанных вариантов после закрепления гусеницы на колесе повторялись измерения по предыдущему пункту.

При обработке результатов измерений, показания цепочек тензодатчиков учитывались непосредственно, а для розеток дополнительно рассчитывались главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  по формулам:

$$\begin{cases} \sigma_1 = E \left( \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3(1-\nu)} + \frac{1}{1+\nu} \sqrt{\left( \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right)^2 + \left( \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \right)^2} \right), \\ \sigma_2 = E \left( \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3(1-\nu)} - \frac{1}{1+\nu} \sqrt{\left( \varepsilon_a - \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} \right)^2 + \left( \frac{\varepsilon_b - \varepsilon_c}{\sqrt{3}} \right)^2} \right) \end{cases}, \quad (1)$$

для розеток с углами между датчиками  $60^\circ$  и  $120^\circ$ ;

$$\begin{cases} \sigma_1 = E \left( \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2(1-\nu)} + \frac{1}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \right), \\ \sigma_2 = E \left( \frac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2(1-\nu)} - \frac{1}{2(1+\nu)} \sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \right) \end{cases}, \quad (2)$$

для розеток с углами  $45^\circ$  и  $90^\circ$ ,

где  $E$  – модуль упругости Юнга;

$\nu$  – коэффициент Пуассона, равный 0,3;

$\varepsilon_a, \varepsilon_b, \varepsilon_c$  – деформации, измеряемые тензодатчиками, образующими с осью отсчета углы соответственно равные  $0^\circ, 60^\circ$  и  $120^\circ$  для (1) и  $0^\circ, 45^\circ$  и  $90^\circ$  для (2).

Учитывая, что диск ведущего колеса находится в условиях сложного



напряженного состояния, оценка его прочности производилась на основании анализа действующих главных напряжений по IV теории предельного состояния (критерий удельной потенциальной энергии формоизменения):

$$\sigma_{ЭКВИ} = \sqrt{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\sigma_2 - \sigma_1)^2)}. \quad (3)$$

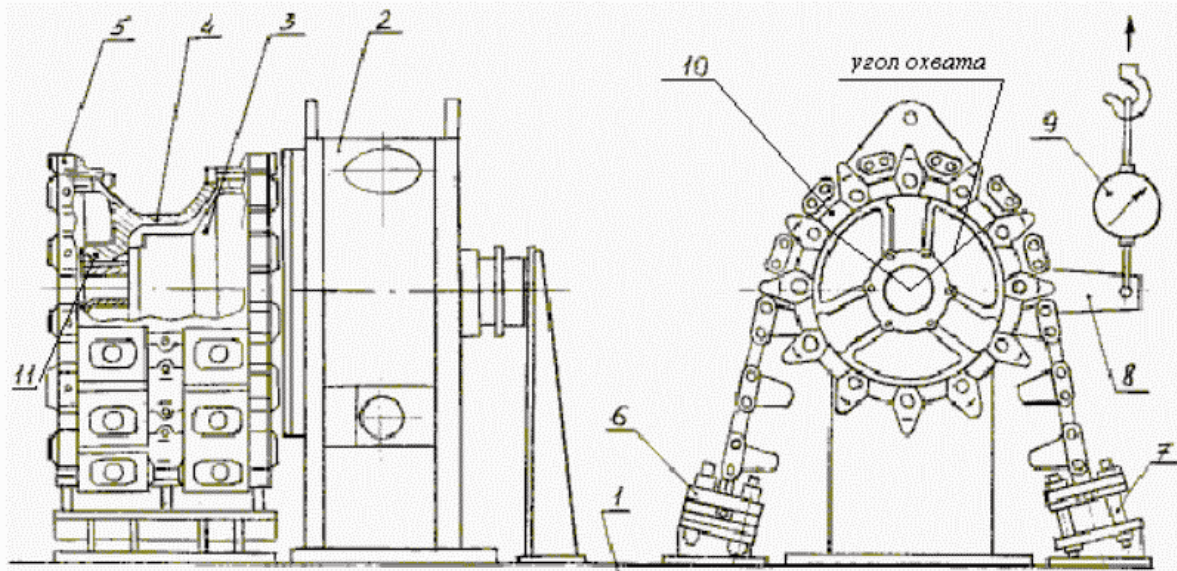


Рис. 2. Установка для проведения эксперимента.

Анализ результатов испытаний показал, что наиболее нагруженным местом на поверхности колеса является зона расположения розетки №4 (рис.1). В табл. 1 представлены значения главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , максимальных касательных напряжений  $\tau_{\max}$  и составляющих шарового тензора напряжений  $\sigma_0$  для розетки №4 при крутящем моменте  $M_{кр} = 69000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ . Когда линия расположения цепочки датчиков проходит через середину дуги сектора охвата колеса гусеницей и фаза поворота колеса составляет  $0^\circ$ , то датчики находятся “вверху”. Когда же фаза поворота колеса составляет  $180^\circ$ , то датчики находятся “внизу”.

Из таблицы видно, что компоненты шарового тензора напряжений на диаметрально противоположных частях диска несколько отличаются по абсолютному значению и противоположны по знаку. Это свидетельствует о том, что на напряженное состояние колеса в данной области наибольшее влияние оказывает изгиб. Такие результаты были получены впервые. Ранее действие изгиба на конструкции такого рода не рассматривалось.

Судя по результатам, полученным при ступенчатом нагружении колеса крутящим моментом, зависимость  $\sigma(M_{кр})$  является линейной, по крайней мере, до значения  $M_{кр} = 69000 \text{ Н}\cdot\text{м}$ , которое оказалось максимально возможным реализуемым значением крутящего момента в экспериментальной установке.

Табл. 1. Максимальные напряжения в розетке №4 (экспериментальные данные), МПа

Положение датчиков	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$\Phi_{\max}$	$\sigma_0$
“вверху”	137	50	93,5	62
“внизу”	-109	-171	31	-93

## 2 Численное исследование

Для численного исследования был выбран метод конечных элементов [2], а в качестве его машинной реализации программный комплекс ANSYS 5.6 Professional.

В качестве типа конечных элементов, на которые разбивалась модель, была выбрана тетраэдральная четырехузловая форма трехмерного конечного элемента SOLID45 и оставлены три степени свободы в узле – линейные перемещения  $u_x, u_y, u_z$  [3].

Разбиение на конечные элементы осуществлялось в автоматическом режиме. При выполнении разбиения оказалось невозможным существенно влиять на плотность конечно-элементной сетки на отдельных участках конструкции. Расчеты были проведены для двух сеток разбиения. В I случае (сетка-1) конструкция была разбита на 22727 элементов, средний размер стороны каждого элемента был порядка 2 см. Во II (сетка-2) случае было 93581 элемент с длиной стороны около 1 см.

Нагружение колеса было смоделировано следующим образом. Для узлов, принадлежащих шлицевой поверхности (поз. 11, рис. 2), была введена локальная цилиндрическая система координат, в которой были приложены сосредоточенные силы к этим узлам в направлении окружной координаты  $\varphi$ . Их перемещение в радиальном направлении  $\rho$  было запрещено. Таким образом, имитировалось приложение крутящего момента и расположение колеса на ведущем валу КП. Также был наложен запрет на перемещение в направлении координаты  $z$  (которая совпадает с осью вращения колеса) к части узлов, принадлежащих шлицевой поверхности, чтобы полностью исключить возможность перемещения колеса, как единого целого.

Для узлов, принадлежащих фланцевым поверхностям (поз. 10, рис. 2), также была введена локальная цилиндрическая система координат. Из них выбиралась группа узлов, находящихся в секторе охвата колеса гусеницей, на которые накладывался запрет на перемещение в направлении окружной координаты  $\varphi$ . Часть узлов фланцевой поверхности оставалась в прямоугольной декартовой системе координат, и к ним были приложены силы в вертикальном направлении, что имитировало действие сил натяжения гусениц.

Для решения задачи трехмерного статического исследования опытным

путем был выбран итерационный решатель PCG Solver (Precondition Conjugated Gradient).

Табл. 2. Предельные значения напряжений для розетки №4, МПа (сравнение экспериментальных данных и численного расчета)

Нагрузка		Напряжение	Значение
$M_{кр} = 69000 \text{ Н}\cdot\text{м}$	эксп.	$\sigma_i$	137
$M_{кр} = 69000 \text{ Н}\cdot\text{м}$	сетка-1	$\sigma_i$	129
$M_{кр} = 69000 \text{ Н}\cdot\text{м}$	сетка-2	$\sigma_i$	114
$M_{кр} = 120000 \text{ Н}\cdot\text{м}$	сетка-1	$\sigma_i$	208

Результаты прочностного расчета (см. табл. 2) показали следующее:

– при максимальной прилагаемой внешней нагрузке интенсивность напряжений не превышает предела текучести  $[\sigma_{доп}] = 500 \text{ МПа}$ ;

– результаты, полученные на сетке-1 отличались от экспериментальных на 6%, а полученные на сетке-2 – на 17 %. Различие результатов, полученных на двух сетках разбиения составило 12 %.

Коэффициент запаса в опасной точке (для сетки-1)

$$n = [\sigma_{доп}] / \sigma_i = 2,4$$

при максимальной нагрузке больше единицы, следовательно материал колеса деформируется упруго во всем диапазоне нагружения.

## Выводы

– впервые получены экспериментальные данные, свидетельствующие об определяющем влиянии изгиба на напряженное состояние ведущего колеса гусеничной машины;

– разработана трехмерная конечно-элементная модель ведущего колеса, которая позволяет качественно и количественно оценить напряжения, возникающие в нем;

## Литература

**1.** Тензометрия в машиностроении. Под ред. Р.А.Макарова. – М.: Машиностроение, 1975. – 288 с. **2.** Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с. **3.** ANSYS User's Manual for Revision 5.0 Volume IV 1994, Swanson Analysis Systems, Inc.

Поступила в редколлегию 11.09.2001

УДК 539.3

## **ОЦЕНКА ДОСТОВЕРНОСТИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В ЗАДАЧАХ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ТЕРМОКИНЕТИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ**

А.В. Бизюк, М.В. Чернобрышко, В.Г. Ярещенко

*Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина*

In work is done a comparative analysis of mathematical models of high-rate elasto-plastic deforming of cylindrical shells, which based on comparison with experimental data. An optimum model is a 2-dimension layer with taking into account deformation speed dominance and thermal parameters.

При расчете параметров высокоскоростного упругопластического деформирования конструкционных элементов рациональным является использование упрощенных математических моделей, степень адекватности которых реальным процессам различна. Основным критерием выбора той или иной модели является, наряду с трудоемкостью счетного процесса, мера соответствия теоретических и экспериментальных результатов.

В качестве объекта исследования выбраны конструкционные элементы цилиндрической формы. Разработанная в ИПМаш НАН Украины технология использования широкополосной тензометрической станции для регистрации высокоскоростных процессов позволяет определить величину деформаций и скоростей деформаций на малых интервалах времени (до 5-10 мкс). Цилиндрическая оболочка находится под действием комбинации внутреннего статического и локального ударно-импульсного нагружения большой интенсивности, возникающих, например, при сварке взрывом, детонационно-плазменном напылении и других нестационарных локальных воздействиях.

В очаге нагружения и его окрестности возникает зона пластического деформирования и значительные прогибы, что не дает возможности проводить многократное нагружение в одном и том же месте. Волновой характер процесса деформирования требует охвата точками измерения большой поверхности оболочки, а большие градиенты деформаций в зоне нагружения – достаточной плотности размещения точек измерения. При этом датчики расположены в точках вдоль главных направлений тензора деформации – в осевом и окружном сечениях (см. рис. 1). Принятая схема размещения тензорезисторов позволяет регистрировать главные деформации  $\varepsilon_r$  и  $\varepsilon_\theta$  в ряде точек поверхности в осевом и меридиональном сечениях.

По результатам серии экспериментов был выполнен сравнительный анализ результатов, полученных численным путем с применением различных математических моделей, с экспериментальными данными. Значения

параметров материала слоя: модуль упругости  $E = 2,1 \cdot 10^{11}$  Па; коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ; плотность  $\rho = 7,8 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; предел пластичности  $\epsilon^s = 1,43 \cdot 10^{-3}$ ; параметры учета влияния скорости деформации  $\lambda_n = 0,992$ ;  $D = 396$  с<sup>-1</sup>;  $n = 7,14$ .

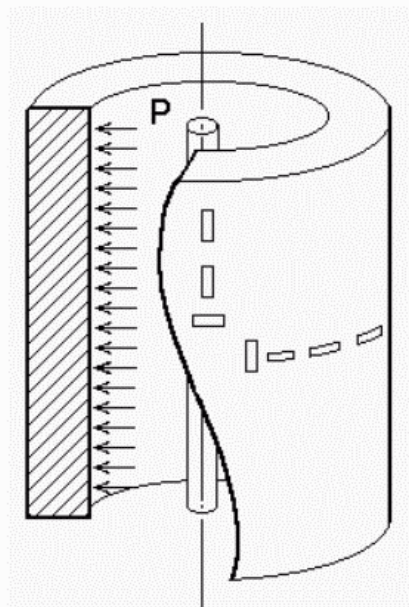


Рис. 1. Схема нагружения оболочки

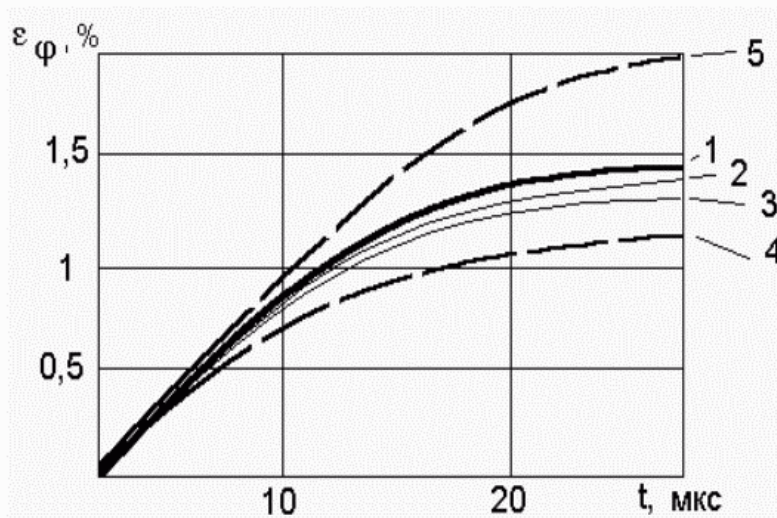


Рис. 2. Сравнение результатов расчетов

На рисунке 2 представлено сравнение экспериментальных (кривая 1) и теоретических данных, полученных при значениях нагрузки  $P_m = 3,734 \cdot 10^8$  Па, время затухания импульса  $Q = 7,1 \cdot 10^{-6}$  с. В качестве сопоставляемых математических моделей были приняты модель цилиндрического слоя конечной длины с учетом влияния скорости деформации на закон упрочнения материала в степенной форме, а также влияния тепловых параметров (кривая 2). Кривая 3 соответствует результатам, полученным при исследовании движения цилиндрического слоя без учета термокинетических свойств материала. Кривая 4 отражает данные, полученные для одномерной схемы высокоскоростного расширения цилиндра; кривая 5 соответствует результатам, полученным при решении задачи без учета влияния скорости деформации на динамические параметры. Анализ этих результатов показывает, что двумерная постановка задачи позволяет получить приемлемую точность решения, аппроксимируя экспериментальную кривую лучше, чем одномерная схема. Помимо этого следует отметить, что для данного материала (конструкционная сталь X18H10T) существенным является учет влияния скорости деформации на динамические параметры.

Моменты времени, когда скорость деформации равна нулю и в материале начинается разгрузка, определяемые по кривым 2 и 3, приблизительно

равны, сильно отличаясь от времени разгрузки, определяемого по кривой 5.

В таблице приведены значения максимальных окружных и продольных деформаций, измеренных методом динамического тензометрирования [2] и полученных расчетным путем с использованием двумерной модели метания цилиндрического слоя при его гидровзрывном нагружении. Результаты, получаемые с использованием двумерной модели деформирования, хорошо согласуются с экспериментальными данными для широкого класса относительных толщин и при различных нагрузках.

h, см	Заряд ДШ	Экспериментальные данные	Теоретические данные		Расхождение в % теоретических данных с экспериментальными	
			Без учета температуры	С учетом температуры	Без учета температуры	С учетом температуры
Значение $\varepsilon_{\varphi}^{\max}$ , %						
0,2	1	8,87	8,46	8,51	4,6	4,1
0,8	1	1,36	1,30	1,32	4,4	2,9
0,34	1	4,42	3,99	4,29	9,7	2,9
0,34	2	8,05	7,87	7,93	2,2	1,5
0,34	3	11,04	10,92	10,96	1,08	0,7
Значение $\varepsilon_r^{\max}$ , %						
0,2	1	0,73	0,69	0,71	5,5	2,7

Таким образом, оптимальным следует считать выбор двумерной математической модели упругопластического цилиндрического слоя, учитывающей влияние скорости деформации на величину предела пластичности, а также влияние температурных напряжений.

## Литература

1. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. Москва, Наука, 1980.
2. Воробьев Ю.С., Колодяжный А.В., Севрюков В.И., Янютин Е.Г. Скоростное деформирование элементов конструкций. Киев; Наукова думка, 1989. – 192 с.
3. Колодяжный А.В., Меша Ю.В., Чернобрышко М.В. Термокинетический анализ деформирования цилиндрического слоя конечной длины при осесимметричном импульсном нагружении. - Вестник Харьк. гос. политех. ун-та. – Харьков: ХГПУ. – 2000. – Вып. 106 – С.16 – 19.

Поступила в редколлегию 06.09.2001



УДК 539.3

## **НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ МОДЕЛИ СОСТАВНОЙ БАНДАЖИРОВАННОЙ МАТРИЦЫ ДЛЯ ПОЛУГОРЯЧЕГО ВЫДАВЛИВАНИЯ**

С.В.Бондарь, В.И.Лавинский, А.В.Степук

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

Представлены материалы по разработке и внедрению методики моделирования контактного взаимодействия элементов в составных многокомпонентных бандажированных матрицах для полугорячего выдавливания, ориентированной на применение программного комплекса SPACE-T.

Полугорячее выдавливание металлов в традиционных схемах обработки металлов давлением используется в основном для формоизменения заготовок из высокопрочных и малодеформируемых сталей.

При значительных пластических деформациях в заготовке возникает упрочнение металла, приводящее к повышению твердости и предела текучести  $\sigma_T$  [1,2,3]. На рис. 1 приведены экспериментальные данные зависимости истинных напряжений  $\sigma_\epsilon$  от деформации  $\epsilon$  при различных температурах (диаграмма истинных напряжений).

При повышении температуры происходит разупрочнение металлов, которое объясняется возрастанием подвижности дефектов кристаллической решетки и приводящей к рекристаллизации. В соответствии с этими экспериментальными данными деформационное формоизменение металлических заготовок условно разделим на три типа, определяемые по эффектам рекристаллизации в металле заготовки. Выделенные типы деформирования регламентируют режимы подготовительной термообработки заготовок.

Холодное выдавливание (ХВ) соответствует диапазону температур  $T \in (0,2 \dots 0,3) \cdot T_{пл}$ , где  $T_{пл}$  - температура плавления металла. При этих температурах разупрочнение не происходит (кривая 1). Полугорячее выдавливание (ПГВ) металлических заготовок происходит при температурах  $T \in (0,45 \dots 0,55) \cdot T_{пл}$ . В этом случае развивающееся разупрочнение металла не завершается полностью (кривая 2). И, наконец, горячее выдавливание, при котором металл полностью разупрочняется (кривая 3) [4]. Так, например, при ПГВ заготовки из стали О8 необходимо нагреть на температуру 250... 300°C. При этом осуществляется технологическое заметное снижение интенсивности силового воздействия непосредственно на матрицу в процессе деформирования заготовки по сравнению с процессом ХВ.

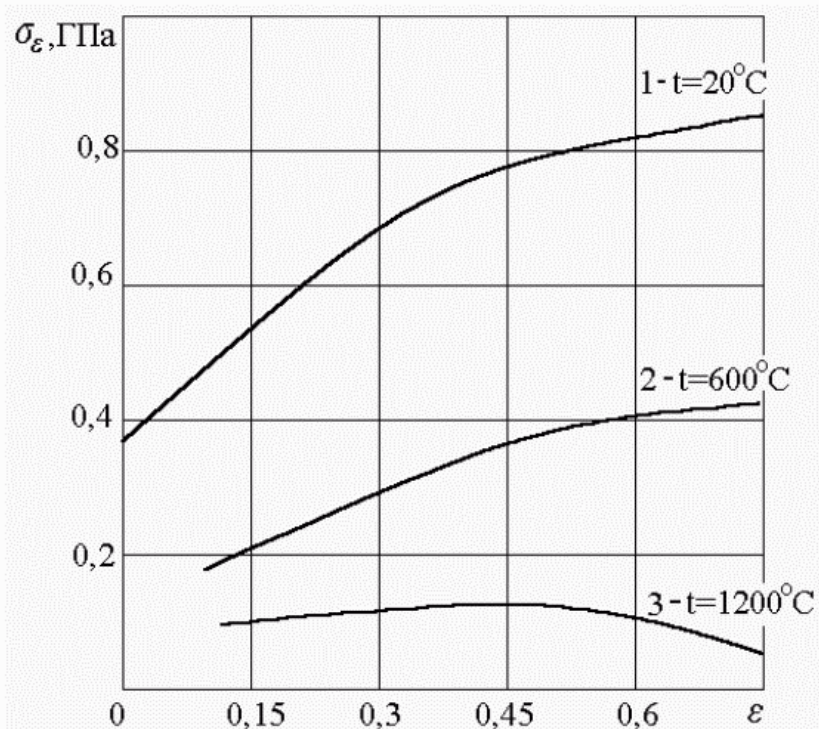


Рис.1. Диаграммы истинных напряжений для стали 08.

В составных матрицах для ПГВ рабочая вставка при контакте с заготовкой нагревается до высоких температур. Возникающее неоднородное поле температур приводит к тому, что геометрические параметры элементов составной матрицы изменяются, вызывая искажение в форме деформируемой заготовки. Анализ производственного опыта, а также литературных данных [4, 5] показал, что один из распространенных технологичных способов охлаждения заключается в снижении температуры наружной поверхности матрицы. В этом случае возникают большие градиенты температурного поля, и как, следствие этого, резкое изменение напряженного состояния в точках внутренней поверхности рабочей вставки. Охлаждение же непосредственно внутренней рабочей поверхности рабочей вставки вызывает возникновение значительных растягивающих окружных напряжений в точках на ее поверхности.

Рассмотрим составную бандажированную матрицу для ПГВ осесимметричных деталей. Геометрические параметры и упругие характеристики материалов структурных элементов матрицы приведены в таблице 1.

Модель данного типа составной бандажированной матрицы в классе структурно связанных механических систем [6] состояла из взаимодействующих однородных изотропных осесимметричных тел, ограниченных коническими и цилиндрическими поверхностями. Структурные элементы системы моделировали заготовку, рабочую вставку и комбинированный бандаж, выполненный в виде сегментного кольца, бандаж

и обоймы. Между сегментным кольцом и бандажом на соприкасающихся конических поверхностях ведена модель контактного слоя без скольжения, учитывающего возникающий при запрессовке матрицы первоначальный натяг. Внешняя поверхность рабочей вставки выполнена в виде двухстороннего усеченного конуса с меньшими основаниями на торцах. Аналогичная модель контактного слоя была введена на поверхностях взаимодействия между рабочей вставкой и сегментным кольцом, внутренняя поверхность которого выполнена в виде ответной конической поверхности. На границе раздела внутренней поверхности рабочей вставки и деформируемой заготовки вводился контактный слой второго типа, моделирующий фрикционное контактное взаимодействие по закону Кулона. Между коническими поверхностями обоймы и бандажа контактный слой третьего типа моделировал контакт между этими поверхностями под действием сил затяжки матрицедержателя.

Таблица 1. Исходные данные

		Геометрические характеристики:											
		$\Delta L, \text{M}$	$L_{\text{заг}}, \text{M}$	$\Delta L_{\text{об}}, \text{M}$	$L_{\text{об}}, \text{M}$	$R_{\text{вн}}, \text{M}$	$R_{61}, \text{M}$	$R_{6\text{вн}}, \text{M}$	$R_{62}, \text{M}$	$R_{\text{об}}, \text{M}$	$\alpha_1, ^\circ$	$\alpha_2, \alpha_3, ^\circ$	$\alpha_4, ^\circ$
		0.02	0.18	0.05	0.25	0.068	0.1	0.178	0.25	0.3	7	5	10
		Физические характеристики:											
		№	Структурный элемент	Материал	E, МПа	$\nu$							
1		Заготовка	СТ45	$2 \cdot 10^5$	0,3								
2		Раб.вставка	ВК20	$2 \cdot 10^5$	0,33								
3		Сегм.кольцо	35ХГСА	$2,1 \cdot 10^5$	0,31								
4		Внеш.бандаж	35ХГСА	$2,1 \cdot 10^5$	0,31								
5		Обойма	40Х	$1,9 \cdot 10^5$	0,27								

Нижние кольцевые области сегментного кольца и бандажа шарнирно закреплялись:  $U_z=0$ , при  $R_{61} \leq r \leq R_{62}$ . На центральной оси, в связи с осевой симметрией, граничные условия выбраны в виде:  $U_r=0$ , при  $\Delta L \leq z \leq L_{\text{заг}} + \Delta L$ .

Действие формоизменяющей нагрузки на заготовку  $P_{\text{деф}}$  моделировали фиксированные перемещения верхней плоскости заготовки:  $U_z=0,001\text{m}$  при  $0 < r < R_{\text{вн}}^*$ . Аналогично моделировались силы затяжки матрицедержателя  $P_{\text{заг}}$ .



В принятых условиях стационарный режим нагружения матрицы соответствовал случаю температурного режима: в точках внутренней поверхности рабочей вставки температуры равна  $T = 300\text{ }^{\circ}\text{C}$ , в точках внешней поверхности обоймы на участке  $H_{\text{охл}}$  температура равна  $T = 20\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

С использованием осесимметричных конечных элементов в комплексе SPACE-T [6] сформирована КЭ - модель составной бандажированной конической матрицы для ПГВ осесимметричных деталей, приведенная на рис.2. По решению задачи теплопроводности при идеальном тепловом контакте между соприкасающимися поверхностями структурных элементов модели матрицы вычисляли значения узловых температур в принятой конечно-элементной модели.

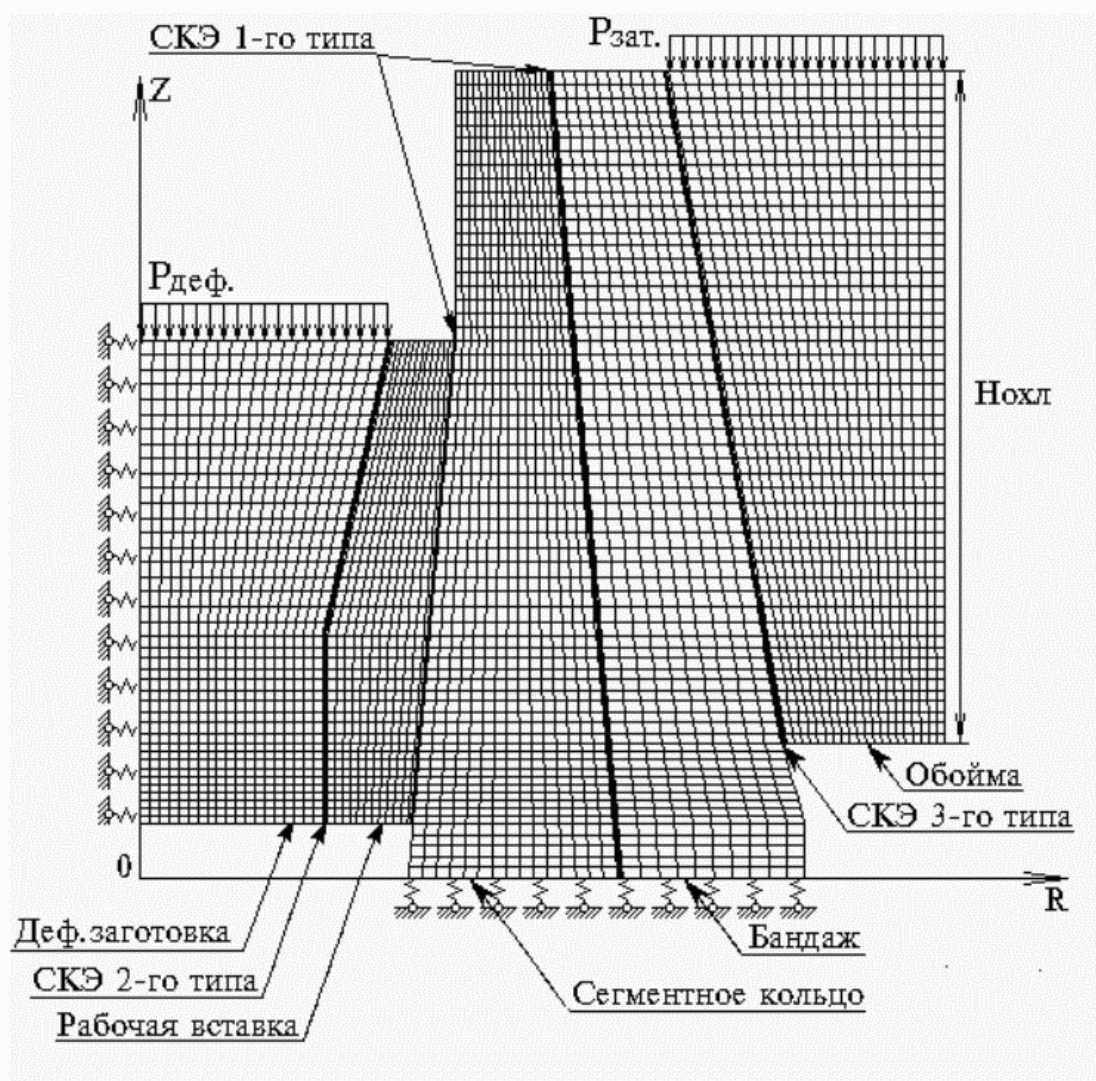


Рис. 2. Конечно-элементная модель составной матрицы для ПГВ.

Три типа контактных конечных элементов, кроме учета описанных выше моделей контактных взаимодействий, позволили вычислить истинные размеры контактных площадок в соответствующих зонах с точностью до

величины конечного элемента.

Для этой модели системы средствами программного комплекса SPACE-T были выполнены исследования напряженного состояния элементов конструкции составной конической матрицы СБК-1М для ПГВ полуконических втулок.

Анализ результатов расчета термоупругой задачи показал, что температурное поле приводит к позитивному перераспределению напряженного состояния, вызывая увеличение сжимающего радиального напряжения на внутренней поверхности рабочей вставки, усиливая эффективность внешнего бандажирования матрицы. Заметим, что расчеты позволили модифицировать конструкцию матрицедержателя с уменьшенными габаритными параметрами.

Анализ напряженно-деформированного состояния в модели составной матрицы показал, что эффективность охлаждения на внешней поверхности обоймы достигается на участке с относительной длиной  $H'_{охл} = H_{охл}/L_{об} = 0,5$ . Для этого случая на рис. 3 приведено распределение интенсивностей напряжений в элементах матрицы. Дальнейшее уменьшение  $H'_{охл}$  привело к увеличению интенсивности напряжений. С увеличением  $H'_{охл}$  не происходило заметного ее снижения.

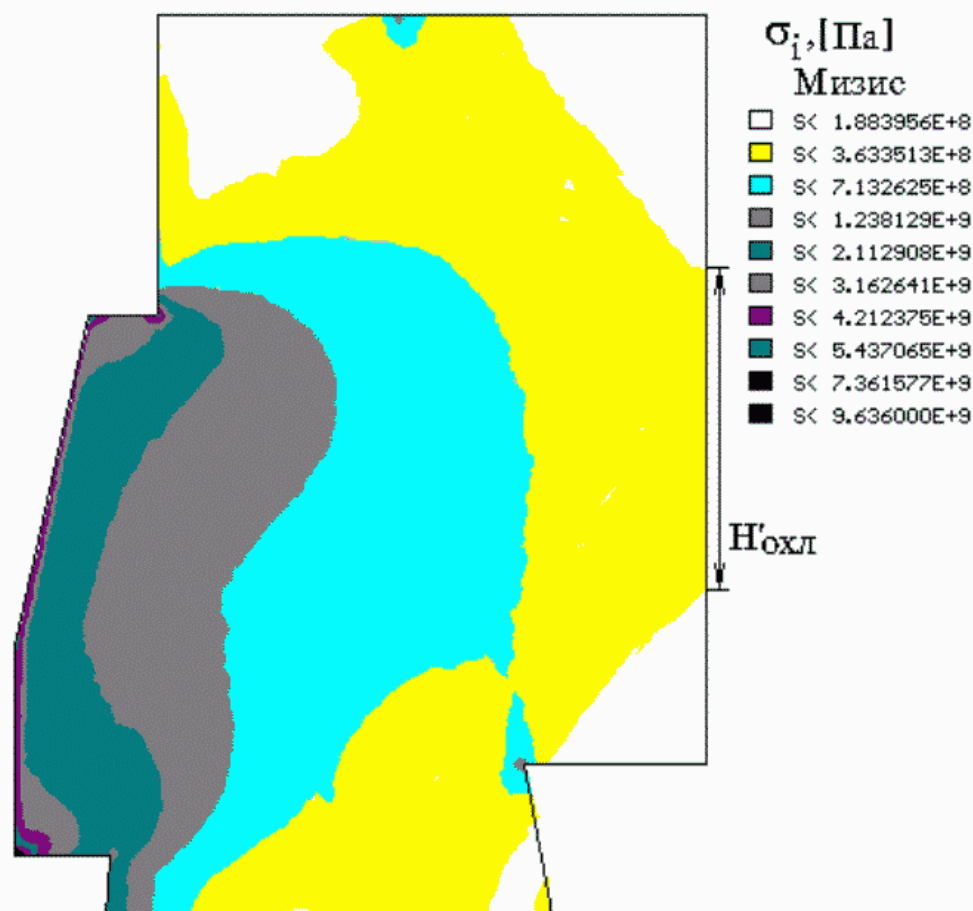


Рис. 3. Распределение интенсивности напряжений в нагретой матрице.

Дальнейшие исследования заключались в оценки влияния углов конусности  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ ,  $\alpha_4$  элементов матрицы на параметры напряженно-деформированного состояния в точках внутренней поверхности рабочей вставки.

Незначительное влияние на напряженное состояние во внутренних точках поверхности рабочей вставки угла  $\alpha_3$  позволило выбрать его рациональное значение из технологических требований.

Увеличение угла  $\alpha_4$  привело к возрастанию сжимающих радиальных напряжений в бандаже. При этом уменьшились радиальные напряжений в точках внутренней поверхности рабочей вставки. Значение этого угла также принимали наибольшим из технологических требований.

Данные расчетов, приведенные на рис.4, показали, что наиболее заметное влияние на интенсивность напряжений в точках внутренней поверхности рабочей вставки оказал угол конусности рабочей вставки  $\alpha_2$ .

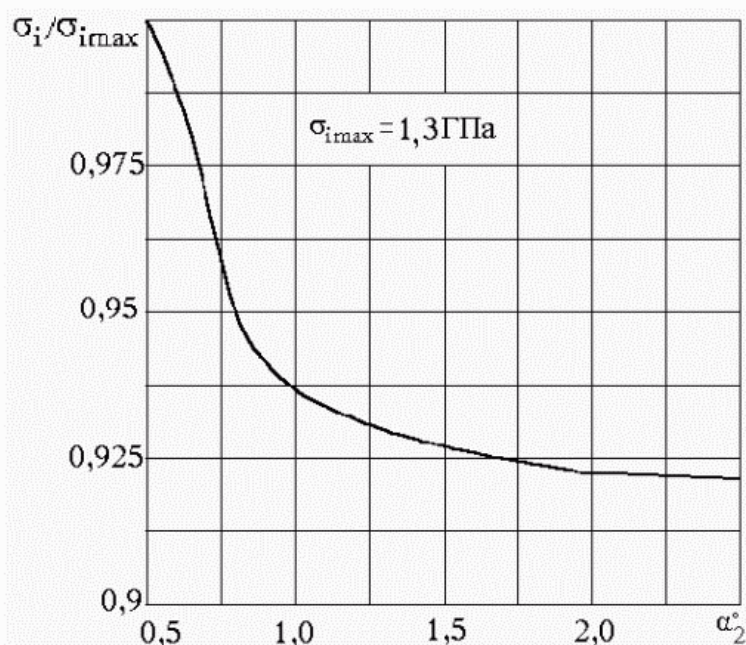


Рис.4. Зависимость интенсивности напряжения в опасной точке внутренней поверхности рабочей вставки.

Приведенные данные показали, что значительное уменьшение интенсивности напряжения (до 10%) происходило при возрастании угла конусности в интервале  $0,5^\circ \dots 1,0^\circ$ . В диапазоне значений угла конусности  $1,0^\circ \dots 2,0^\circ$  интенсивность напряжений незначительно уменьшилась (до 3%). Значения угла  $\alpha_2$  из этого диапазона являлись рациональными по прочностным и технологическим условиям. Дальнейшее уменьшение угла не привело к существенному снижению интенсивности напряжений.

Использование описанной методики позволило получить рекомендации для проектирования работоспособной конструкции составной матрицы СБК-1М



для ПГВ полуконических втулок со сниженными показателями материалоемкости отдельных ее элементов по сравнению с существующими.

### **Литература**

**1.** Сторожев М.В., Попов Е.А. Теория обработки металлов давлением.-4-е изд. - М.: Машиностроение, 1977. – 423с. **2.** Третьяков А.В., Трофимов Г.К., Зюзин В.И. Механические свойства металлов и сплавов при обработке давлением. – М.: Машиностроение, 1964. – 223с. **3.** Холодная объемная штамповка: Справочник / Под ред.Г.А. Навроцкого. - М.: Машиностроение, 1973. – 496с. **4.** Евстратов В.А. Основы технологии выдавливания и конструирования штампов.- Харьков: Вища школа, 1987. – 144с. **5.** Головин В.А. Актуальные проблемы холодной и полугорячей объемной штамповки // Кузнечно-штамповое производство. - 1985. –№ 8. –С.34-36. **6.** Бондарь С.В., Зубатый С.С., Киркач Б.Н., Лавинский В.И. Программный комплекс SPACET для решения термоупругопластических контактных задач // Республ. межвед. научн.-техн. сборн. “Динамика и прочность машин”. - Харьков: ХГПУ, 2000. -Вып.57. –С.24-34.

Поступила в редколлегию 03.09.2001

УДК 539.3

### **КОНТАКТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОРТОГОНАЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК**

В.В. Бортовой, Д.В. Лавинский

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The text in question deals with stress-strain analysis for technological operation of connection of two thin-wall constructions. The construction are modeled by two cylindrical shells. One of them is oriented in vertical direction, another – in horizontal. Horizontal shell is loaded by uniform internal normal pressure. The finite element method (FEM) is numerical one of solution. The FEM program complex COSMOS/M is mean of solution. The deformed shape of construction and plots of displacements and stress intensity is presented. It is shown that uniform pressure is unsuccessful for required technological conditions.

Тонкостенные элементы в последнее время получили широкое распространение в практике проектирования и создания различных машиностроительных конструкций. Причиной этому является относительно малый вес при достаточно высоких прочностных и жесткостных характеристиках. Накопленный опыт проектирования и эксплуатации тонкостенных конструкций свидетельствует о том, что использование традиционных способов (болтовые

соединения, сварка и т.п.) крепления составных частей снижает эксплуатационные характеристики конструкции в целом: появление концентраторов напряжения, увеличение веса конструкции, изменение структуры материала в зонах соединения (при сварке) и другое. Наиболее технологичным является скрепление контактирующих тонкостенных деталей направленным прессованием на контактирующих поверхностях, т.е. за счет создания больших локальных пластических деформаций в зоне контакта. В этом случае давление на определенных поверхностях конструкции может создаваться различными способами, например: силами импульсных магнитных полей. Разработка научно обоснованных подобных технологических операций требует предварительного детального анализа НДС конструкций при проектировании процесса сборки с целью определения требуемого закона распределения магнитного давления для достижения технологического результата [1].

При моделировании процесса магнитноимпульсной сборки двух цилиндрических оболочек реально возникающие магнитные давления логично аппроксимировать более простыми представлениями в виде кусочно-постоянных или кусочно-линейных функций по образующей одной из оболочек [1]. При решении подобных задач важным становится учет особенностей НДС, которые возникают в зоне контакта: нелинейная связь между напряжениями и деформациями (даже при линейно упругом поведении материала), возникновение фрикционного взаимодействия. Эти нелинейности делают невозможным привлечение аналитических методов теории упругости для решения практических задач. Расчеты должны выполняться с помощью численных методов, которые в настоящее время в связи с появлением мощных ЭВМ получили практически неограниченные возможности для использования.

В данной работе рассматривается задача совместного контактного деформирования двух тонкостенных цилиндрических оболочек, пересекающихся под углом  $90^\circ$ , которые имитируют условия технологической операции по получению прессового соединения. Следует отметить, что в реальных конструкциях редко встречаются соединения цилиндра с цилиндром, гораздо более распространены комбинации: цилиндр – коробчатая (прямоугольная или треугольная в плане) оболочка или коробчатая оболочка – коробчатая оболочка. Но рассмотрение двух цилиндрических оболочек позволяет обнаружить все закономерности, имеющие место при контактном деформировании, и при этом избежать трудностей, связанных с учетом концентраторов напряжений, имеющих место в коробчатой конструкции. Задача о совместном деформировании двух цилиндрических оболочек может рассматриваться как модельная, и на основании полученных результатов могут быть сформулированы общие закономерности процесса соединения, которые затем могут обобщаться на другие типы конструкций. Результатом решения

задачи должно быть получение картины напряженно-деформированного состояния конструкции, также по полученным результатам необходимо сделать вывод о распределении локальных деформаций в зоне контакта в оболочке, нагруженной внутренним давлением, и на основании этого о целесообразности использования той или иной формы внешнего нагружения.

Рассмотрим контактное взаимодействие двух геометрически одинаковых цилиндрических оболочек (радиус  $R = 0,5$  м; толщина  $\delta = 0,01$  м;  $H = 0,7$  м). Оболочки в пространстве сориентированы так, что одна занимает горизонтальное положение в глобальной система координат (материал – алюминий  $E = 0,7 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,34$ ), а вторая соответственно – вертикальное (материал – сталь  $E = 2,1 \cdot 10^5$  МПа;  $\nu = 0,27$ ) (рис. 1). Предварительно считалось, что контакт осуществляется только в зоне, совпадающей по размерам с сечением вертикальной оболочки, т.е. в оболочечной постановке – по линии касания. Учет трения при контакте осуществлялся в форме закона Кулона (коэффициент трения принимался равным 0,4). Модель поведения материала принята линейно упругой. Данное упрощение позволяет прогнозировать расположение зон, в которых появятся локальные остаточные деформации, если будет известна картина распределения напряжений в конструкции. Горизонтальная оболочка нагружена равномерным постоянным внутренним давлением с интенсивностью  $p_m = 1$  МПа. На торцах оболочек принималась жесткое защемление:  $u_z = u_\theta = 0$ .

Задача решалась с помощью программного комплекса COSMOS/M [2]. Оболочки моделировались четырехузловыми пластинчатыми конечными элементами SHELL4 с шестью степенями свободы в узле. Из-за симметрии конструктивно-геометрических параметров и условий нагружения и закрепления можно ограничиться рассмотрением 1/8 части конструкции.

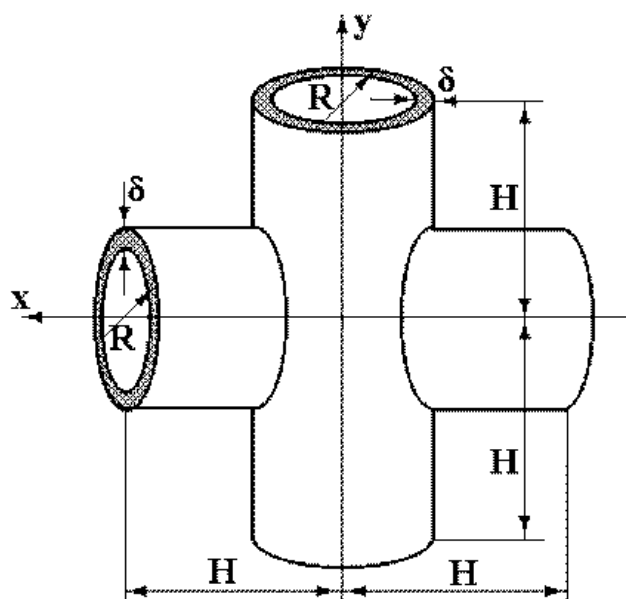


Рис.1. Расчетная схема конструкции

На границе контакта были введены контактные конечные элементы типа GAP (способ контакта – “узел к линии”). По образующим оболочек задавались специальные граничные условия симметрии, которые генерировались средствами программного комплекса COSMOS/M автоматически. Внутреннее давление задавалось постоянным в пространстве и во времени. Во времени процесс нагружения рассматривался как одношаговый, с мгновенно приложенной нагрузкой.

На рис. 2 представлено деформированное состояние конструкции. Как видно данных, на представленном рисунке, горизонтальная оболочка находится в изогнутом состоянии, причем максимум прогиба достигается в зоне равноудаленной как от закрепления, так и от линии контакта с вертикальной оболочкой. Вертикальная оболочка испытывает только продольные деформации, потеря устойчивости не наблюдается. В целом, численные значения максимального результирующего перемещения в вертикальной оболочке на порядок меньше, чем в горизонтальной (0,00004 мм против 0,0002 мм).

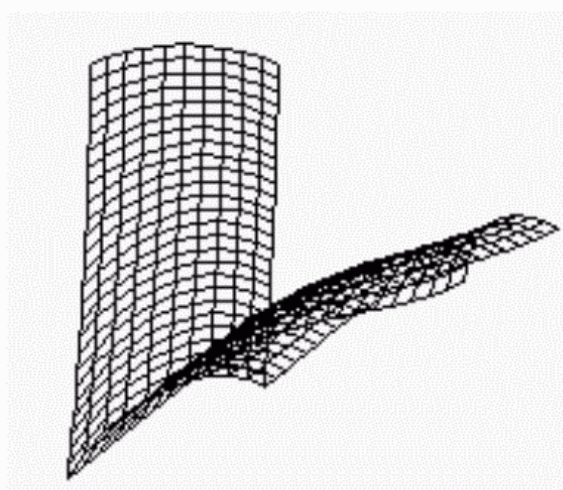


Рис. 2. Деформированное состояние конструкции

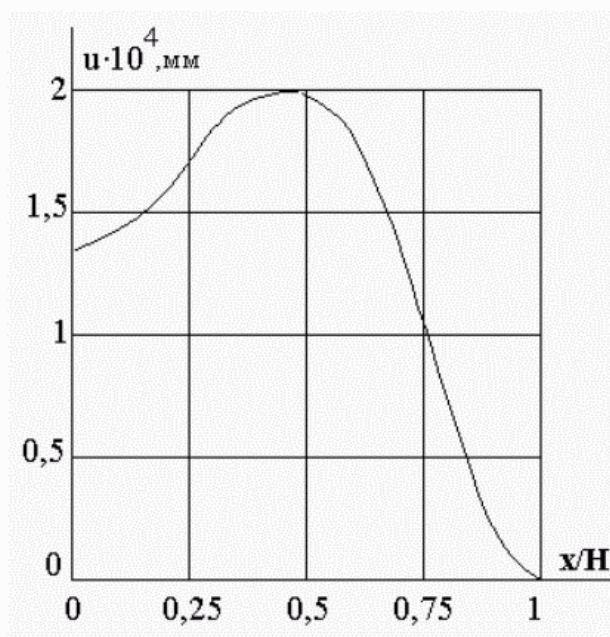


Рис.3. Прогиб вдоль образующей горизонтальной оболочки

На рис. 3 представлено распределение функции прогиба вдоль образующей горизонтальной оболочки. Данные на графике подтверждают выводы, сделанные выше, касающиеся деформированного состояния. Также следует отметить, что величины полученных расчетных перемещений согласуются с принятыми допущениями о малых перемещениях (т.к. максимальный результат много меньше толщины оболочки), что свидетельствует о корректности полученных результатов.

Далее, рассмотрим результаты по напряженному состоянию конструкции. На рис. 4 представлено распределение нормальных напряжений по линии контакта. Данная зависимость показывает, что по всей линии контакта напряжения отрицательные, а значит в процессе деформирования не происходит отрыва, и одно из условий достижения цели технологической операции выполняется.

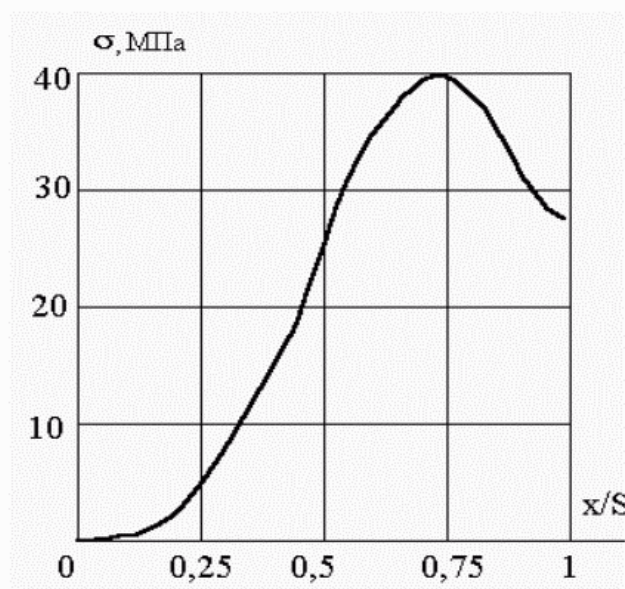


Рис. 4. Распределение контактных давлений вдоль линии контакта

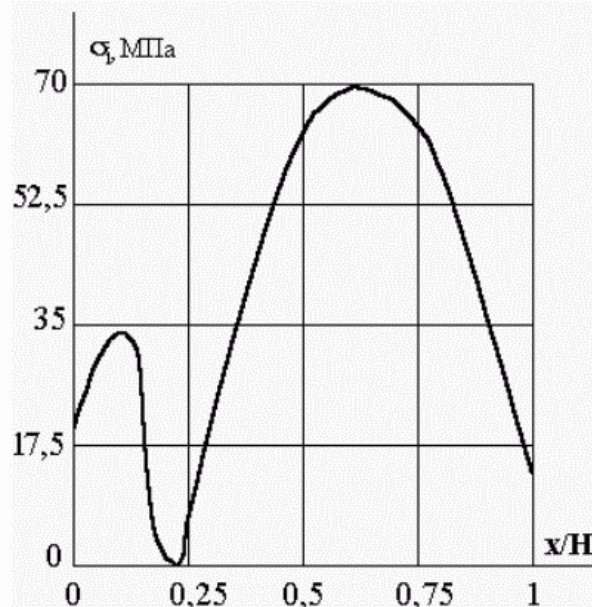


Рис. 5. Распределение интенсивности напряжений вдоль образующей горизонтальной оболочки

При последующем анализе для упруго-пластического поведения материала конструкции критерием начала пластичности выбирается критерий Мизеса, как наиболее достоверно описывающий процессы деформирования изотропного материала, а следовательно наиболее важной величиной при анализе напряженного состояния является интенсивность напряжений. На рис. 5 приведен график зависимости интенсивности напряжений от длины образующей горизонтальной оболочки.

График на рис. 5 свидетельствует о том, что конечная цель технологической операции при использовании равномерно распределенного давления достигнута не будет. Максимальная интенсивность напряжений наблюдается в той же зоне, где максимальный прогиб (см. рис. 3), причем здесь интенсивность напряжений примерно в два раза выше, чем в области контакта, т.е. именно в этой зоне с увеличением нагрузки интенсивность напряжений достигнет предела текучести раньше, чем в области контакта.

Таким образом, при дальнейшем исследовании напряженно-деформированного состояния реальных конструкций подобного типа вместо равномерно распределенного внутреннего давления необходимо рассматривать



оболочки с максимумом в локальной зоне контакта, или равномерное давление, приложенной непосредственно в зоне контакта.

## Литература

1. Ракошиц Г.С. Электроимпульсная штамповка: Учеб. пособие для ПТУ. – М.: Высшая школа, 1990. – 191 с. 2. M.Lashkari, Ph.D. COSMOS/M User Guide. Stress, Vibration, Buckling, Dynamics, and Heat Transfer Analyses (Release Version 1.52). - S.R.A.C. - Santa Monica, California, 1988. - 231p.

Поступила в редколлегию 12.09.2001

УДК 71.027

## КОЛЕБАНИЯ КАТУШЕК КАНАТОВЬЮЩИХ МАШИН

А.И.Бохонский, Е.В.Хромов

*Севастопольский государственный технический университет, Украина*

Investigate torsion oscillations in act of twist ropes of ropeweaving machines

Сложный характер смешанных крутильных колебаний питающих катушек при перематке проволоки либо свивке прядей и канатов на канатовьющих машинах обусловлен рядом причин [1]: несовпадением центров масс катушек с осями их вращения, наличием сил трения, изменением некоторых геометрических и физических параметров системы в процессе свивки (например, при сматывании проволоки или пряди с катушки), случайными факторами.

В данной работе выполнены исследования свободных и вынужденных крутильных колебаний линейной системы питающих катушек канатовьющей машины с конечным числом степеней свободы без учета сил сопротивления (см. рисунок).

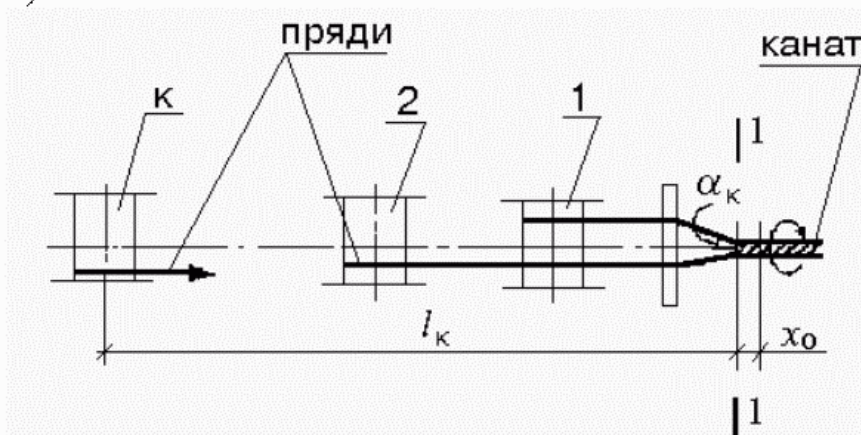


Схема расположения питающих катушек канатовьющей машины



Дифференциальные уравнения, описывающие свободные крутильные колебания катушек около положения квазистатического равновесия, записываются следующим образом:

$$I_k \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} = -C_k (\varphi_k r_k - x_0) \cos \alpha_k r_k; \quad k = 1, \dots, n; \quad (1)$$

где  $I_k$  - физический момент инерции  $k$ -й катушки относительно тел вращения;  $d^2 \varphi_k / dt^2$  - угловое ускорение катушки;  $C_k = EF_k / l_k$  коэффициент жесткости  $k$ -й пряди на участке от места схода с катушки до сечения 1-1, в котором осуществляется свивка прядей в канат;  $E$  - модуль упругости первого рода;  $F_k = \pi d_k^2 / 4$  - площадь поперечного сечения пряди;  $d_k$  - диаметр пряди;  $l_k$  - длина пряди от катушки до сечения 1-1;  $\varphi_k$  - угол поворота катушки относительно собственной оси в процессе колебаний около положения квазистатического равновесия;  $r_k$  - радиус намотки пряди, который принят постоянным для малого промежутка времени, на котором исследуются крутильные колебания катушек;  $x_0$  - перемещение сечения 1-1 каната в связи с продольными деформациями прядей каната (см. рисунок 1);  $n$  - число степеней свободы системы.

Условие статического равновесия участка каната в окрестности сечения 1-1 записывается как:

$$C_0 x_0 = \sum_{k=1}^n C_k (\varphi_k r_k - x_0) \cos \alpha_k, \quad (2)$$

где  $C_0$  - обобщенный коэффициент жесткости прядей, свитых в канат в сечении 1-1;  $\alpha_k$  - угол свивки. Коэффициент жесткости  $C_0$  может быть найден теоретически или экспериментально. Решаемая задача статически неопределима, но условие совместности деформации в виде равенства перемещений всех концов прядей в сечении 1-1 естественным образом раскрывает статическую неопределимость системы.

После определения  $x_0$  из (2) и подстановки в (1) следует система однородных дифференциальных уравнений:

$$I_k \frac{d^2 \varphi_k}{dt^2} = -C_k \left( \varphi_k r_k - \frac{\sum_{k=1}^n C_k \varphi_k r_k \cos \alpha_k}{C_0 + \sum_{k=1}^n C_k \cos \alpha_k} \right) r_k; \quad k = 1, \dots, n; \quad (3)$$

С целью аналитического определения частот собственных колебаний и амплитуд вынужденных колебаний системы катушек (при  $n = 6$ ) с использованием компьютерной алгебры рассмотрим частный случай, для которого одинаковы коэффициенты жесткости прядей, радиусы навивки и соответственно физические моменты инерции:

$$\begin{aligned} r_1 = r_2 = \dots r_k = \dots r_n = r; \\ I_1 = I_2 = \dots I_k = \dots I_n = I; \end{aligned} \quad (4)$$

В этом случае из (3) следует система уравнений:

$$d^2\varphi_k/dt^2 = a\varphi_k + b\sum_{i=1}^n \varphi_i; \quad i \neq k; \quad k = 1, \dots, n, \quad (5)$$

$$\text{где } a = \left( \frac{C^2 r^2 \cos \alpha_k}{C_0 + nC \cos \alpha_k} - Cr^2 \right) / I; \quad b = \frac{C^2 r^2 \cos \alpha_k}{(C_0 + nC \cos \alpha_k)I}.$$

После подстановки частных решений  $\varphi_k = A_k \sin(\lambda t + \delta)$  в (5) и преобразований получена система линейных однородных алгебраических уравнений, условие существования ненулевого решения которой (наличие колебаний) приводит к определителю

$$\begin{vmatrix} a/b + \lambda^2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a/b + \lambda^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a/b + \lambda^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a/b + \lambda^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a/b + \lambda^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & a/b + \lambda^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

где  $\lambda^2 = \omega^2/b$ .

После раскрытия определителя (6) характеристическое уравнение для определения квадратов частот собственных колебаний принимает вид:

$$\begin{aligned} L^6 + 6aL^5 + 15(a^2 - b^2)L^4 + (20a^3 - 60ab^2 + 40b^3)L^3 + \\ + (120ab^3 + 15a^4 - 90a^2b^2 - 45b^4)L^2 + \\ + (6a^5 - 60a^3b^2 - 90ab^4 + 120a^2b^3 + 24b^5)L - \\ - 45a^2b^4 - 15a^4b^2 + 24ab^5 + a^6 - 5b^6 + 40a^3b^3 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $L = \omega^2$ .

Из (7) определяются квадраты частот собственных колебаний:

$$L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = \frac{Cr^2}{I}; \quad L_6 = \frac{C_0 Cr^2}{I(C_0 + 6C)}. \quad (8)$$

Таким образом, в случае симметрии в расположении одинаковых катушек (выполнения условий (4)) частоты, кроме одной, равны между собой. Такая закономерность наблюдается при произвольном  $n$ . При этом отличная от других частота определяется по формуле:

$$C_1 = C_2 = \dots C_k = \dots C_n = C;$$

$$\varphi_n = -C_0 Cr^2 / I(C_0 + 6C). \quad (9)$$

Определим амплитуды вынужденных колебаний катушек, обусловленные эксцентриситетами центров масс катушек по отношению к осям вращения. Необходимо отметить, даже с учетом условий (4) и равенства эксцентриситетов у всех катушек при  $n=6$  возникают существенные аналитические трудности при символьном решении системы линейных алгебраических уравнений с использованием компьютерной алгебры. Дальше приводится аналитическое решение при  $n=3$ . Гармоническое воздействие принято в виде:

$$\xi(t) = D \sin \lambda t, \quad (10)$$

где  $D = emg/I$ ;  $e$  - эксцентриситет;  $m$  - масса катушки;  $g$  - ускорение силы тяжести;  $I$  - момент инерции катушки относительно оси вращения.

После подстановки частных решений в (5) и преобразований система алгебраических уравнений для определения амплитуд вынужденных колебаний запишется как:

$$\begin{aligned} (a + \lambda^2)A_1 + bA_2 + bA_3 &= -D, \\ bA_1 + (a + \lambda^2)A_2 + bA_3 &= -D, \\ bA_1 + bA_2 + (a + \lambda^2)A_3 &= -D. \end{aligned} \quad (11)$$

Из (11) амплитуды колебаний находятся аналитически с использованием компьютерной алгебры:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A = \frac{(C_0 + 3C)ID}{(CC_0r + \lambda^2 IC_0 - 3\lambda^2 IC)r}. \quad (12)$$

Если принять  $C_0 = 3C$ , то:

$$A = 2DI / (Cr - 2\lambda^2 I)r. \quad (13)$$

Система (11) позволяет находить аналитическое решение в частных случаях, когда эксцентриситет имеет место у одной катушки или двух катушек.

Численный анализ выполнен при следующих исходных данных:

$F = 23,93 \text{ мм}^2$ ;  $I = 44,28 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$ ; расстояния от катушек до сечения 1-1 соответственно 2 м, 4 м, 6 м, 8 м, 10 м, 12 м; диаметр пряди  $d = 6,2 \text{ мм}$ ;  $\omega = 2,1 \text{ рад/с}$ ; масса катушки  $m = 760,8 \text{ кг}$ ;  $r = 0,8 \text{ м}$ ;  $n = 6$ . В данном случае система уравнений (ввиду ее громоздкости здесь не приводится) не обладает симметрией и аналитическое решение связано с громоздкими преобразованиями, которые проведены с использованием систем компьютерной алгебры, но, следует отметить, что для практических расчетов и в настоящее время численное решение предпочтительно [2, 3]. Уравнение для определения квадратов частот имеет вид:

$$\lambda^6 - 98602,301\lambda^5 - 36442,6392 \cdot 10^5\lambda^4 - 64981,9433 \cdot 10^9\lambda^3 + 58628,4633 \cdot 10^{13}\lambda^2 - 24762,9757 \cdot 10^{18}\lambda + 35476,1945 \cdot 10^{19} = 0, \quad (14)$$

где  $\lambda = \omega^2$ .

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 8,3921 \text{ Гц}; & \nu_2 &= 15,1780 \text{ Гц}; & \nu_3 &= 16,9090 \text{ Гц}; \\ \nu_4 &= 19,3597 \text{ Гц}; & \nu_5 &= 23,3040 \text{ Гц}; & \nu_6 &= 31,4193 \text{ Гц}. \end{aligned}$$

Амплитуды вынужденных колебаний катушек (в установившемся режиме):

$$\begin{aligned} A_1 &= 0,0073 \text{ рад}; & A_2 &= 0,0055 \text{ рад}; & A_3 &= 0,0058 \text{ рад}; \\ A_4 &= 0,0065 \text{ рад}; & A_5 &= 0,0055 \text{ рад}; & A_6 &= 0,0066 \text{ рад}. \end{aligned} \quad (15)$$

Динамические добавки к статическим усилиям натяжения прядей, которые влияют на качество изготовления каната, определяются как

$$\delta N_k^D = \frac{EF_k}{l_k} \cdot \delta l_k, \quad (16)$$

где  $\delta l_k$  - динамические удлинения пряди.

Разработанная модель описания колебаний катушек канатовьющей машины позволяет учесть конструктивные особенности канатовьющей машины и механические свойства свиваемых элементов каната при проведении инженерных расчетов.

## Литература

**1.** Бохонский А.И., Хромов Е.В. Анализ колебательных процессов при перематке длинномерных изделий. Оптимизация производственных процессов. Вестник СевГТУ, Вып. 3. - Севастополь, 2000. - С.70-73. **2.** Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У. Колебания в инженерном деле. - М: Машиностроение, 1985. - 472 с. **3.** Вибрации в технике: Справочник. В 6-ти т. - Т. 1. Колебания линейных систем. Под ред.В.В.Болотина. - М.: Машиностроение, 1978.-352 с.

Поступила в редколлегию 19.09.2001

УДК 631.3: 752.004.5

## ГРАФОАНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ВИБРАЦИОННОГО ДИАГНОСТИРОВАНИЯ ТРАКТОРА

Говорущенко Н.Я., Мигаль В.Д.

ХГТУСХ, Харьков, Украина

Project level estimation methodology and technical state alteration estimation methodology of tractors based on vibration level are founded. The vibration is uniform extending criterion of availability index of product at projection, operational development, manufacture, maintenance and repair.

Существующие методы прогнозирования качества проектирования и диагностирования в эксплуатации тракторов несовершенны [1], что обуславливает высокий процент отказов и малый ресурс – 6 тыс. часов до капитального ремонта. Они построены только на усредненных статистических данных исходных структурных параметров, отказов и скоростей изнашивания, которые существенно ограничивают возможности управления качеством трактора при проектировании идентификации индивидуальных свойств механизмов трактора при изготовлении и эксплуатации.

Нами предложен новый современный подход к оценке качества трактора на базе нового показателя – параметра вибрации, который является единым обобщающим критерием технического состояния при проектировании, доводке, изготовлении, эксплуатации и ремонте. Вибрация трактора является естественной реакцией на реально действующие внутренние и внешние, даже незначительные отклонения рабочих процессов, режимов работы, геометрических форм и сопряжений деталей и других состояний от идеального или заданного. В вибрационном сигнале содержится вся объективная информация об изменении всех компонент и их взаимосвязи в динамике, определяющая техническое состояние конкретного механизма. Спектральный анализ вибрации трактора с помощью современных компьютерных и микропроцессорных средств позволяет в реальном времени наблюдать протекающие изменения состояния при изменении конструкции, технологии изготовления, режимов работы и времени наработки механизмов. Существенно расширяются возможности быстрого получения информации, повышается точность диагноза технического состояния и в несколько раз снижается трудоемкость ресурсных и эксплуатационных испытаний и диагностирования.

При таком подходе задача управления качеством проектирования и доводки трактора на заданный ресурс сводится к созданию механизмов заданного уровня вибрации. Сохранение проектного качества на стадии изготовления и эксплуатации достигается нормированием вибрации, контролем и доводкой ее до требований заданных норм на изготовление, эксплуатацию и ремонт. Создаются возможности применения высокоинформативных графоаналитических методов оценки вибрационного состояния трактора.

Для проектирования тракторов заданного ресурса нами разработаны классы вибрации трактора, конструктивные и технические средства снижения вибрации подшипниковых узлов, зубчатых передач и валов до заданного класса [2]. В основу разработанных классов положены найденные допустимые вибрации ( $L_0$ ), представленные на рис. 1 прямой АБ с уровнями от 50 дБ на частоте 5 Гц до 90 дБ на частоте 10 кГц. Если вибрации ( $L_\Phi$ ) превышают значения, ограниченные прямой АБ, то процессы изнашивания и пов-

реждения деталей ускоряются в прямой зависимости от величины превышения ( $L_{\Pi}$ ). Диапазоны классов вибрации Д, Г, В таблице, на рис. 1 определены на основе статистических данных изменения в процессе работы исходных вибрационных и структурных параметров. Изменение вибрационного параметра на 4 дБ указывает на появление дефекта, а изменение на 8 дБ определяет переход механизма в другой класс технического состояния.

Класс вибрации	Диапазоны максимальных допустимых значений виброускорений при максимальных скоростных и нагрузочных режимах работы механизмов				Прогнозируемый ресурс тысяч мото- часов	Оценка качества проектирования по вибрационному состоянию
	в дБ		в м/с <sup>2</sup>			
	на частотах, Гц					
	5	10000	5	10000		
Д	66-58	106-98	0,598-0,238	59,8-23,8	5-10	допустимое
Г	58-50	98-90	0,238-0,0949	23,8-9,49	10-15	хорошее
И	ниже 50	ниже 90	0,0949	9,49	более 15	отличное

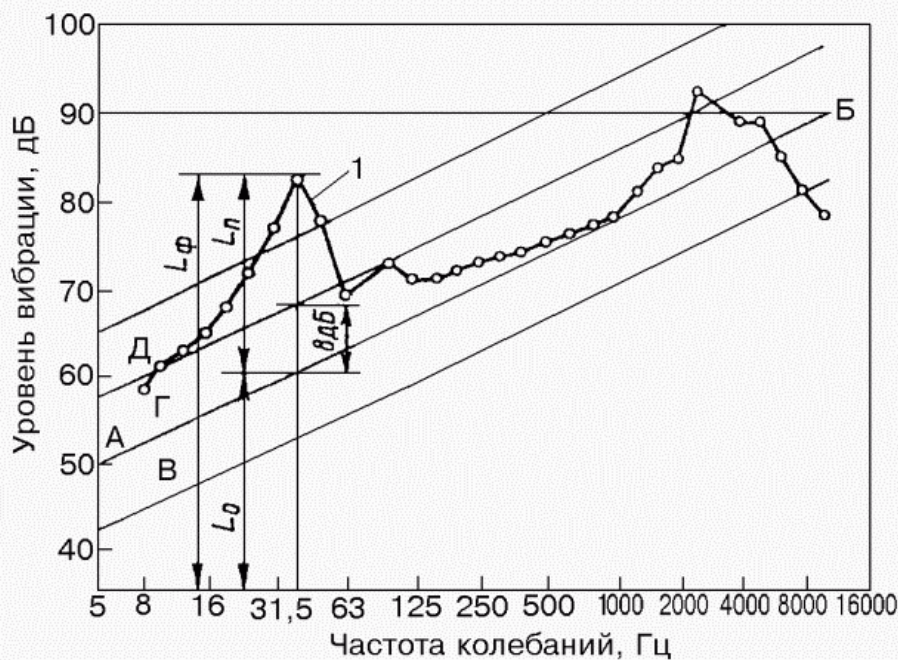


Рис. 1. Диапазоны уровней вибрации трактора типа Т-150-К: Классы вибрации повышенной (В), нормальной (Г), пониженной (Д) надежности и ресурса; 1 – уровни вибрации редуктора ВОМ

Полученная зависимость допустимых уровней вибрации от частоты, представленная на рис. 1 прямой АБ, определяет задаваемые условия равноресурсности деталей и узлов проектируемого механизма. При одинаковых значениях превышения исходной вибрации над прямой АБ низкочастотные и



высокочастотные вибрации возрастают одинаково (параллельно прямой АБ). При других значениях допустимой вибрации – изменения угла наклона прямой АБ, выдвигаются неодинаковые требования к ограничению вибрации, возбуждаемой низкочастотными и высокочастотными источниками вибрации, не делает агрегат (трактор) равноресурсным по всем узлам, приводит к появлению высокоотказных узлов. Спектр вибрации оптимально доведенной конструкции должен находиться в одном классе вибрации. Спектр вибрации редукторов ВОМ трактора (рис. 1) не находится в одном классе.

За оцениваемый параметр вибрации, создаваемой механизмами трактора, приняты максимальные из средних квадратических значений виброускорений (дБ), измеренные в третьоктавных полосах частот не ранее, чем через 30 минут работы механизма в заданном режиме. За установившийся режим принимали значения вибрации, не отличающиеся более, чем на 10% при двух последовательных измерениях через 20 минут.

По вибрационным и ресурсным характеристикам трактора типа Т-150К относят к классу вибрации Д верхнего диапазона и выше [2]. Совместными экспериментальными исследованиями вибрационного и структурного параметров главных передач класса В, Г, Д (рис. 2) по времени ресурсных и эксплуатационных испытаний установлено, что относительное, а не абсолютное увеличение вибрации является наиболее важным показателем изменения технического состояния. Поломка зубьев ведомой шестерни происходила при превышении исходной вибрации на 21-23 дБ, что соответствовало увеличению бокового зазора в зубозацеплении до 2,1-2,4 мм. Увеличение зазора происходило преимущественно за счет ослабления связей между деталями системы “шестерня – подшипниковый узел”, а износ зубьев при этом составлял 0,6 – 1,2 мм. Представленные на рис. 2, а,б зависимости изменения виброускорений в дБ (рис. 2,а) и в  $m/c^2$  (рис. 2,б) по наработке показывают, что главные передачи класса вибрации Д (график 1, рис. 2,б) верхнего диапазона не имеют четко выраженного прямолинейного участка стадии закономерного нормального процесса изнашивания, как это наблюдается в главных передачах класса вибрации В верхнего диапазона (рис. 2,б, график 3). Резкая начальная крутизна характеристики “вибрация–зазор” главных передач класса вибрации Д (рис. 2,а, график 1) объясняется наличием уже в новых изделиях значительных дефектов, равноценных состоянию главной передачи класса вибрации В после образования зазора больше 1,2 – 1,3 мм (рис. 2,б, график 3). Наличие существенных дефектов конструктивного и технологического происхождения в главных передачах описано в работе [3] и подтверждается большим разбросом (15 – 27 дБ) уровней вибрации, измеренных на стадии приемо-сдаточных испытаний главных передач мостов серийного производства. Таким образом, исследование скорости изменения исходного вибрационного параметра

позволяет определить технический уровень и характеристики процессов повреждения и изнашивания механизма. Оптимизация конструктивных и технологических параметров механизмов должна сводиться к уменьшению угла наклона кривых скоростей изменения вибрации. Линейное нарастание вибрации по времени наработки должно наблюдаться на протяжении приблизительно 75% ресурса механизма, что соответствует классу вибрации В. Проектирование тракторов заданного класса вибрации достигается применением разработанных нами способов снижения вибрации [2].

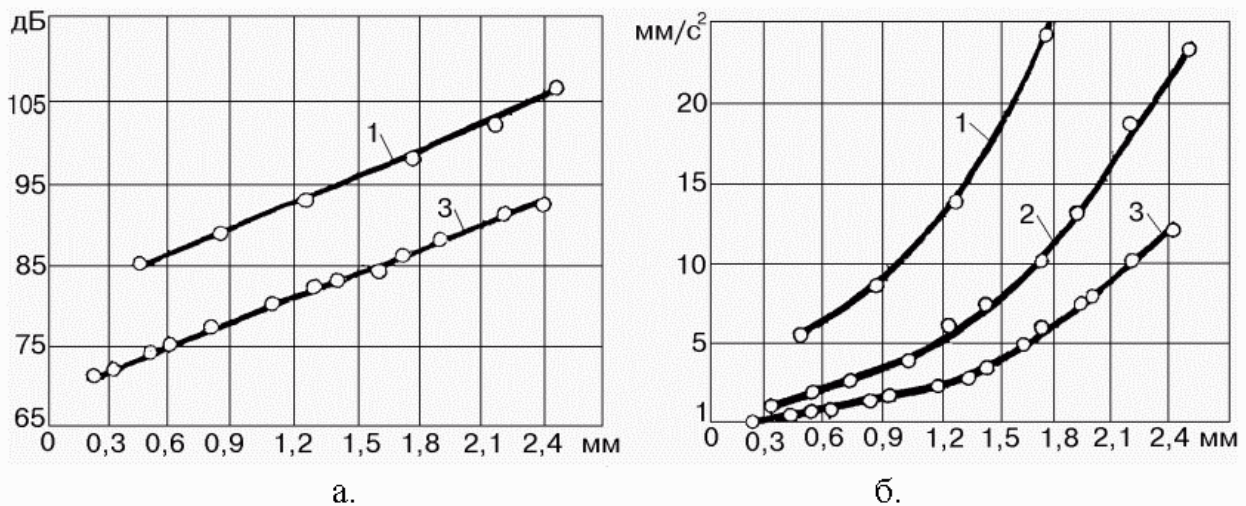


Рис. 2. Зависимости уровней вибрации от зазора в зубозацеплении главной передачи моста класса вибрации Д(1), Г(2), В(3).

Для целей диагностирования разработана модель изменения вибрационного состояния трактора по времени наработки, рис. 3. Она построена на базе экспериментальных исследований изменения виброускорений (дБ) подшипниковых узлов и зубчатых передач агрегатов трансмиссии тракторов и турбокомпрессоров двигателей от сборки до наработки 600 – 10000 часов. Изменение вибрационного состояния механизмов трактора имеет пять характерных участков. Уровни вибрации механизмов на участке 1 после каждой новой сборки имеют большой разброс, который снижается по времени обкатки и стабилизируется после 50 – 100 часов работы. Это состояние обкатанных механизмов является оптимальным для определения исходных индивидуальных норм вибрационного диагностического параметра и времени обкатки трактора. Изменения виброускорений в дБ на участках II – IV, рис. 3, имеет линейный характер, рис. 2.а. Прогнозирование остаточного ресурса на этих участках изменения вибрации сводится к экстраполяции найденного тренда и определению момента его пересечения с линией предельного состояния  $L_4$ , рис. 3. На рис. 3 обозначено: 1 – участок снижения уровней и разбросов вибрации по мере приработки механизма; 2 – стационарный участок при малом разбросе дисперсии; 3 – слабое изменение дисперсии и медленное развитие дефектов; 4, 5 – быстрое развитие дефектов

и границ разброса вибрации; 6 – верхняя граница диапазона статистически учитываемых уровней разброса вибрации; 7 – среднеарифметические значения уровня вибрации механизма;  $L_0$  – исходные значения вибрации ( $L$ ) и зазоров ( $\delta$ );  $L_1$  – удовлетворительное состояние;  $L_2$  – допустимые значения вибрации;  $L_3$  – значения вибрации механизма, требующие принятия мер;  $L_4$  – предельное значение уровней вибрации механизма;  $L_5$  – аварийное состояние.

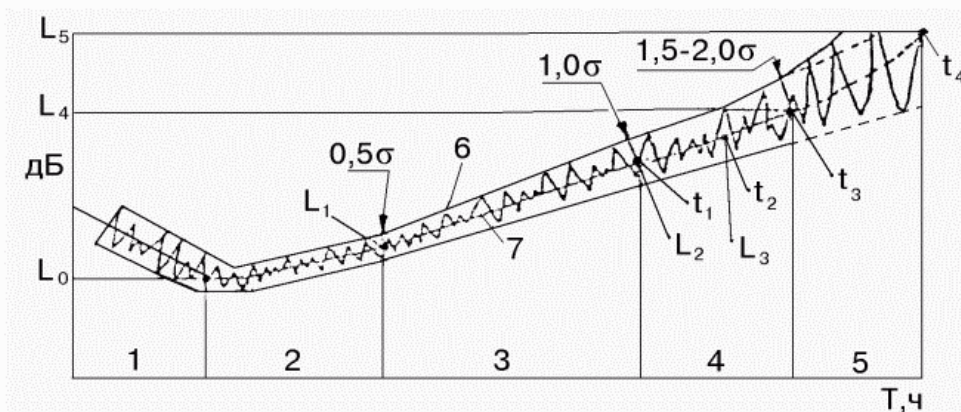


Рис. 3. Графическая модель изменения вибрации механизмов по времени наработки

Для исключения пропуска отказа при диагностировании введем поправку к уровням среднеарифметических значений измеряемых виброускорений [4]. Такой подход объясняется тем, что при больших флуктуациях вибрации, вызванных появлением дефектов и снижении точности поддержания режима диагностирования допущение о неизменности дисперсии неправомерно и пороговое значение смещается в сторону увеличения вибрации. Исходя из этого, истинное значение можно рассматривать как сумму двух случайных величин среднего значения и приращение вибрации, обусловленное флуктуацией дисперсии вибрации

$$L_{\text{ун.}} = \bar{L} + K\sigma, \quad (1)$$

где  $\bar{L}$  – среднеарифметические значения 4 – 6 измерений вибрации в контрольной точке;  $\sigma$  – среднеарифметические отклонения измерений вибрации при определении  $\bar{L}$ ;  $K$  – коэффициент поля допуска.

Значения верхней границы статистически учитываемых уровней вибрации на участках 2 и 3 можно представить

$$L_1 = \bar{L} + 0,5\sigma; \quad (2)$$

$$L_2 = \bar{L} + 1,0\sigma, \quad (3)$$

где  $\bar{L}$  – среднеарифметическое значение уровня вибрации;  $\sigma$  – среднее квадратическое отклонение уровней текущих измерений вибрации от среднеарифметических значений.

Крайнее положение наработки ресурсного элемента на участке 2 ( $L_1$ ) распознают по превышению исходных значений вибрации  $L_0$  на 8 дБ, на участке 3 ( $L_2$ ) – на 12 дБ. Поскольку измерение вибрации производится в логарифмической шкале, то зависимость изменения средних значений вибрации по времени наработки на участке 2 – 4 имеет линейный характер, т.е. линейная зависимость вибрации, выраженной в дБ, от времени означает экспоненциальное возрастание ее абсолютного уровня до момента наступления отказа на участке 5.

Верхняя граница уровней вибрации на участке 4 (рис. 3), где интенсивность появления дефектов и влияния их на разброс результатов измерения выше, чем на участке 3, представляется

$$L_3 = \bar{L} + 1,5...2,0\sigma. \quad (4)$$

Уровни вибрации на участке  $t_1 - t_2$  характеризуются превышениями опорных значений до 16 дБ с выработкой ресурса механизмом класса вибрации Г – В до 75% (рис. 2,б, график 3). Такое повышение вибраций соответствует классу состояния “требует принятия мер”, необходимости проведения регулировочных или ремонтных работ. Для уточнения верхних границ вибрации на участке 4 (рис. 3) необходимо, с целью прогнозирования остаточного ресурса, значительно увеличить периодичность и число измерений вибрации на контролируемой частоте. Число последовательных измерений, необходимых для вычисления среднего значения вибрации, характеризующего техническое состояние механизма, зависит от разброса результатов единичных измерений и требуемой достоверности диагностирования. Согласно приведенным в работе [3] данным, для достоверности 0,9 необходимо 10 последовательных измерений вибрационного параметра, а для достоверности 0,8 достаточно 4 – 5 измерений. Поэтому, основную оценку ошибок прогноза остаточного ресурса на участке 4 проводят при частом контроле вибрации. Увеличение исходной вибрации  $L_0$  в 10 раз (20 дБ) указывает, что уровни вибрации достигли предельной величины  $L_4$ , рис. 3. При линейной зависимости изменения исходного вибрационного параметра ресурсных элементов по наработке до предельного состояния получены приращения вибрации для подшипниковых узлов главных передач моста класса вибрации Г – В 1,0 – 1,2 дБ. Эти данные можно использовать для экспертного прогнозирования остаточного ресурса. Таким образом, простейший способ использования тенденций изменения вибрационного параметра по наработке – это визуальное (или программное обеспечение) сравнение получаемых в процессе эксплуатации графиков тренда с предельными значениями вибрационного параметра или с эталонными кривыми, построенными для конкретного механизма трактора.

Характер изменения вибрации на участке  $t_2 - t_4$  тесно связан с конструктивными и фактическими технологическими погрешностями изго-

товления механизмов трактора, которые определяют класс вибрации трактора, рис. 1. Появление дефектов предельного износа приводит к изменению взаимодействия элементов узла, появлению динамических нагрузок, порождающих изменение вибрационных процессов – появлению резонансов или ослабления механических связей узла и системы. Поскольку механизмы тракторов класса вибрации Д верхнего диапазона и выше уже в новых изделиях имеют дефекты, характерные для состояния стадии III, рис. 3, диагностирование их сводится к устранению дефектов конструкции и технологии производства, а не состояния нормального изнашивания [5]. Полученные данные объясняют причины низкой достоверности 0,5 – 0,6 [6] диагностирования агрегатов трансмиссии серийно выпускаемых тракторов типа Т-150К и Т-150 существующими средствами и очевидные возможности ее повышения при проектировании тракторов класса вибрации Г и В.

Для исключения пропуска отказа и повышения точности определения момента достижения предельного параметра  $L_4$ , рис. 3, необходима оптимальная периодичность и количество последовательных измерений вибрации в каждой контрольной точке. Экспериментальные исследования влияния указанных факторов проводились на главных передачах двух контрольных групп тракторов Т-150К. Одна группа, состоящая из 9 тракторов с уровнями исходной вибрации 80, 83, 84, 86, 87, 88, 89 и 91 дБ, эксплуатировалась в состоянии заводской поставки. На рис. 4 эти трактора обозначены светлыми кружочками. В другой контрольной группе, состоящей из 6 тракторов, до ввода в эксплуатацию были проведены доводочные работы до и после сточасовой обкатки. Уровни вибрации этой контрольной группы при вводе в эксплуатацию составляли 80, 81, 82, 83, 85, 87 и обозначены на рис. 4 черными кружочками. Контроль вибрации тракторов проводили после наработки каждого трактора 1050, 1500, 2250, 3050, 4320 ч. Результаты экспериментальных исследований главных передач мостов представлены на рис. 4. Как видно из рис. 4, уже после наработки 1500 ч 22% главных передач первой группы тракторов соответствовали уровню вибрации состояния “требуется принятия мер” – регулирования осевого зазора подшипников ведущей шестерни. При наработке 2250 ч у 22% тракторов структурные и вибрационные параметры достигают предельных, у 33% тракторов соответствовали классу “требуется принятия мер”. Средняя наработка на отказ первой группы тракторов составили  $\bar{t} = 2460$  ч,  $\sigma = 560$  ч,  $v = 0,23$ , а в другой группе  $\bar{t} = 4200$  ч. Эти исследования показали, что на периодичность (П) контроля технического состояния трактора оказывает влияние технический уровень проектирования, который определяет класс вибрации трактора (рис. 1, 2); качество изготовления и доводки на стадии приемо-сдаточных испытаний; качество ввода и продолжительность эксплуатации (рис. 3 и 4). Анализ технического состояния тракторов заводской поставки



(рис. 4), поступающих в эксплуатацию в состоянии верхней зоны класса вибрации Д, показывает, что минимальная периодичность контроля состояния составляет 1200 ч, максимальная - 1600 ч, средний ресурс по предельному параметру состояния составляет 2460 ч. После доводки главной передачи до нижних уровней вибрации зоны класса Д при сточасовой обкатке (приработке) мостов средняя наработка на ресурсный отказ по предельному состоянию структурного параметра составила 4200 часов, а минимальная периодичность контроля увеличилась до 2385 ч, рис. 4.

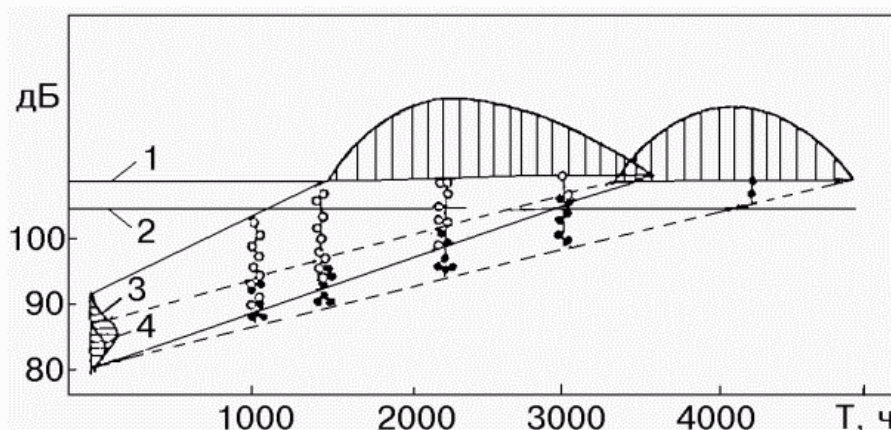


Рис. 4. Влияние регулировочных работ на наработку до предельного состояния главной передачи моста трактора Т-150К: 1 – предельные значения диагностического вибрационного параметра; 2 – нижняя зона технического состояния класса “требует принятия мер”; 3,4 – разброс уровней вибрации на стадии приемо-сдаточных испытаний (3) и после контрольно-регулирующих работ (4).

Периодичность контроля технического состояния главной зубчатой передачи с уровнями исходной вибрации верхней зоны класса Д на стадиях эксплуатации 2, 3, рис. 3, составляет

$$\Pi_{\text{MIN}} = 0,50 t_{\text{CP}}; \quad \Pi_{\text{MAX}} = 0,65 t_{\text{CP}}. \quad (5)$$

Для приработанных зубчатых передач и доведенных до уровня вибрации верхней зоны класса Г периодичность контроля составляет

$$\Pi_{\text{MIN}} = 0,65 t_{\text{CP}}; \quad \Pi_{\text{MAX}} = 0,85 t_{\text{CP}}, \quad (6)$$

где  $t_{\text{CP}}$  — средний ресурс главной передачи.

Минимальная и максимальная периодичность контроля технического состояния при появлении средних и развитых дефектов на участке 4, рис. 3 определяется по формулам

$$\Pi_{\text{MAX}} = (t_{\text{MAX}} - t_1)/2; \quad \Pi_{\text{MIN}} = (t_{\text{CP}} - t_1)/2, \quad (7)$$

где  $t_1$  - наработка в момент измерения вибрации.

Оценку стадии развития дефектов производят по уровням вибрации  $L_1, L_2, L_3, L_4$ , рис. 3.



Контроль технического состояния с  $\Pi_{\text{MIN}}$  (5-7) увеличивает трудоемкость технического обслуживания по диагностированию, а проведение его с  $\Pi_{\text{MAX}}$  снижает адаптацию технического состояния к индивидуальным особенностям механизма.

Контроль вибрации трактора в эксплуатации может осуществляться постоянно встроенными средствами, периодически или выборочно (по заказу) внешними средствами в широких, третьоктавных, узких или смешанных полосах частот диагностирования. Наиболее просто данная задача решается введением карт ручной регистрации, заполняемых обслуживающим персоналом. Для выбора аппроксимирующей функции при ручной регистрации вибрации необходимо использовать метод визуальной субъективной оценки графического представления ряда измеряемых уровней вибрации. Для периодического контроля этим методом замены опыта инженера фактически не существует. Диагност не должен упустить монотонного увеличения или снижения вибрации или больших неожиданных скачкообразных изменений, которые могут быть в результате, например, поломки, резкого ослабления связей, изменения рабочих процессов, режима работы и т.д. Применение переносных и бортовых программируемых микропроцессорных средств позволяет обрабатывать текущие спектры вибрации, сравнивать их с опорными спектрами и выдавать заключение о техническом состоянии с рекомендациями о принятии мер. Контролировать вибрацию необходимо всегда при одном скоростном и нагрузочном режиме диагностирования в заданных контрольных точках.

## **Литература**

**1.** Состояние и перспективы развития исследований по повышению надежности машин и сооружений в УССР до 2000 года (Прогнозная записка) / Под ред. В.Т.Трощенко. - К.: Наук. думка, 1985. - 115 с. **2.** Мигаль В.Д. Вибрация и повышение качества проектируемых тракторов // Тракторы и сельскохозяйственные машины. - 2000. - № 7. - С. 36 - 38. **3.** Попков В.И., Мышинский Э.Л., Попков О.И. Виброакустическая диагностика в судостроении. - Л.: Судостроение, 1989. - 251 с. **4.** Говорущенко Н.Я., Варфоломеев В.Н. Техническая кибернетика транспорта. - Харьков: ХГАДТУ, 2001. - 271 с. **5.** Мигаль В.Д. Конструкционные и технологические решения по снижению вибрации и повышения ресурса головной передачи моста трактора типу Т-150К // Вестник Харьк. госуниверситета. Сер. Новые решения в современных технологиях.-2000.-№80. - С. 63 - 65. **6.** Ополоник Т.Н. Эффективность диагностирования тракторов. - М.: Росагропромиздат, 1988. - 124 с.

Поступила в редколлегию 22.09.2001

**К РЕШЕНИЮ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ МКЭ С УЧЕТОМ ФРИКЦИОННОГО НАГРЕВА**

П. П. Гонтаровский, Н. Г. Гармаш

*Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина*

Some issues of realization of thermocontact problems with account of frictional heating by means of finite-element method are considered. The examples of a solution of stationary and non-stationary axially symmetric problems with sliding of contact surfaces at the expense of a difference of angular velocities are presented. The essential influence of frictional heating on the distribution of contact pressure and temperature fields in structures is shown.

Контактные задачи с учетом теплообмена между взаимодействующими поверхностями вызывают связанность задач теплопроводности и термомеханики через условия контактного взаимодействия, которые, в свою очередь, первоначально неизвестны [1]. Контактные давления, получаемые из решения задачи термомеханики, определяют контактные термические сопротивления, влияющие на распределение температурных полей, и, следовательно, результаты задачи термомеханики. В этом случае используется единый итерационный процесс решения задач теплопроводности и термомеханики на каждом временном шаге для нестационарной задачи.

Метод конечных элементов (МКЭ) очень удобен для создания универсальных программных комплексов, реализующих связанные задачи, поскольку позволяет учесть и сложную геометрию взаимодействующих тел с произвольным числом заранее неизвестных зон контакта, и произвольные граничные условия, а также сложные реологические свойства материала, зависящие от температуры. Для реализации сложных условий контактного взаимодействия был разработан специальный контактный конечный элемент для решения двумерных задач [2], основанный на концепции контактного слоя, не имеющего толщины. Он позволяет учитывать термическое контактное сопротивление в зависимости от контактного давления, теплопроводности взаимодействующих деталей, среды, заполняющей зазоры между микровыступами; высоту микрошероховатости контактных поверхностей; и другие факторы, согласно зависимости, предложенной в работе [3]; а также одностороннее силовое взаимодействие; наличие сил сухого трения; граничных условий, зависящих от зон контакта; фрикционное тепловыделение [1].

С помощью модернизированного программного комплекса KROK [4] успешно был решен ряд стационарных и нестационарных термоконтактных задач. Это позволило получить новые результаты для таких элементов машин, как замковые соединения лопаток газовых турбин, гильзы цилиндра

двухтактного оппозитного дизеля, жаровые кольца двухтактного двигателя, а также рассмотреть термонапряженную посадку турбинного диска на вал в новой постановке.

При решении задач было выяснено, что для сходимости итерационного процесса в ряде случаев необходимо прибегать к неявным схемам. Задание начального приближения по распределению контактных давлений оказалось важным, как для сокращения числа итераций, так и для решения задач с периодическими во времени быстроизменяющимися условиями контактного взаимодействия, которые имеют место например в жаровых кольцах, гильзах цилиндров и т.д.

В качестве начальных условий для нестационарной задачи теплопроводности может быть принято заданное температурное поле или получено решение стационарной задачи теплопроводности при известных граничных условиях. Для определения контактного термического сопротивления в начальный момент времени или же в качестве начального приближения для стационарной задачи задается ориентировочное распределение контактных давлений, одновременно определяющее зону контакта. Это позволяет получить начальное приближение для температурного поля и не только сократить число итераций, но и попасть в зону сходимости итерационного процесса.

При скачкообразном изменении термического сопротивления в зависимости от контактного давления бывают случаи, когда решения термоконттактных задач в стационарных постановках не существуют (пример, приведенный в работе [5], стр.440). При этом задача имеет решение в нестационарной постановке, как периодическая во времени.

В отличие от стационарных термоконттактных задач, которые не имеют решения, можно привести примеры подобных задач, для которых существует два решения, получаемые из различных начальных приближений. Предположим, что теплоизолированный по боковой поверхности стержень длиной  $l$  с одного конца имеет идеальный контакт с холодной стенкой, а с другого – зазор  $\delta$  с горячей, для которой температура на  $\Delta T$ °C выше. Одно из тривиальных решений: температура стержня равна температуре холодной стенки, контакт с горячей отсутствует. Если в начальном приближении допустить идеальный контакт с горячей стенкой, то температура стержня будет распределена по линейному закону  $T(x) = T_x + \Delta T \cdot x$ . Стержень получит дополнительное удлинение  $\alpha \Delta T l^2 / 2$ . Если зазор  $\delta$  окажется меньше, чем эта величина, возникнут температурные сжимающие напряжения, равные контактному давлению

$$\sigma_x = E(\alpha \cdot \Delta T l^2 / 2 - \delta) / l$$

Таким образом решение стационарных термоконттактных задач может зависеть от начальных условий или предыстории нагружения и нагрева.

Например, если в случае малого зазора путем растяжения или подогрева стержня ввести его в контакт с горячей стенкой, то с течением времени контактное взаимодействие будет продолжаться. Если же для зазора справедливо соотношение  $\delta > \alpha \Delta T l^2 / 2$ , решение соответствует тривиальному, независимо от предыстории.

Наличие сил сухого трения, а также необратимых пластических деформаций требует учета истории нагружения, поскольку решение задачи может зависеть от последовательности прикладываемых нагрузок, а для упругопластических задач – от организации итерационного процесса.

Наличие подвижных, с учетом трения, взаимодействий деталей приводит к тепловыделению в зонах контакта (например, в тормозных устройствах). В этих случаях необходимо учитывать источники тепла такого рода, поскольку они могут оказывать существенное влияние на результаты. С другой стороны, тепловыделение при трении используется в технологических процессах, например, сварка деталей при помощи трения. Мощность источников тепла в зоне контакта при этом определяется по следующему соотношению:

$$Q = |\sigma_{\kappa}| \cdot f_{mp} \cdot v \text{ Вт/см}^2,$$

где  $\sigma_{\kappa}$  – контактное давление,  $f_{mp}$  – коэффициент трения,  $v$  – скорость относительного проскальзывания.

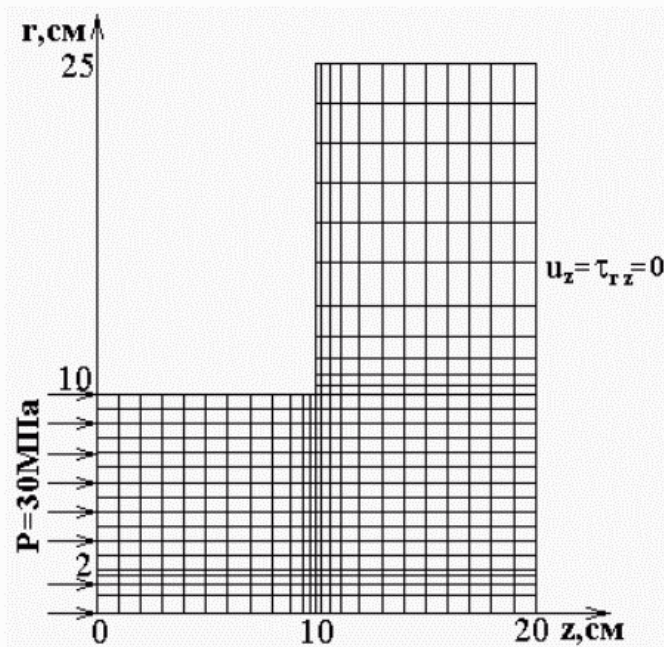


Рис. 1 Расчетная схема конструкции.

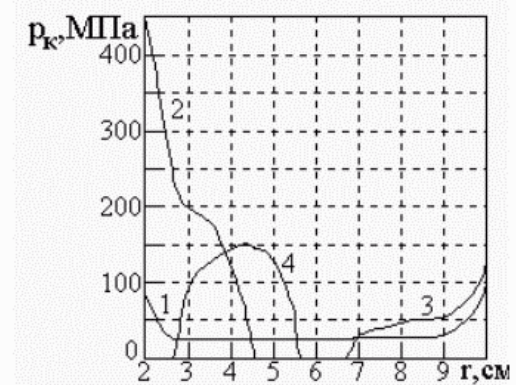


Рис. 2. Распределение контактных давлений

Рассмотрим в качестве примера стационарную контактную задачу о воздействии вращающегося цилиндрического стального подпятника на упругий слой из алюминиевого сплава АК-4, лежащий на жестком основании.

Расчетная схема с дискретизацией на конечные элементы изображена на рис.1. Свойства материалов, зависящие от температуры, приведены в табл.1. и табл.2. Коэффициент Пуассона для обоих материалов принимался равным 0,3. Жесткость контактного слоя –  $C = 10^6$  МПа. На плоскостях  $z = 0$  и  $z = 20$  см принимались условия теплообмена третьего рода  $\alpha = 0,25$  Вт/(см<sup>2</sup>град),  $T_{\infty} = 20^{\circ}$  С, на остальных поверхностях –  $\alpha = 0,005$  Вт/(см<sup>2</sup>град),  $T_{\infty} = 20^{\circ}$  С. Мощность фрикционного нагрева определялась по соотношению  $Q = |\sigma_{\kappa}| \cdot f_{mp} \Delta \omega \cdot r$ , где  $f_{mp} \Delta \omega = 15,7$  рад/с.

Задавшись начальным распределением контактных давлений по всей поверхности контакта  $2 < r < 10$ , в случае плоского подпятника при воздействии нагрузки, без учета тепловыделения от вращения, получим распределение контактного давления, представленное кривой 1 на рис.2.

При учете тепловыделения в зоне контакта распределение контактного давления примет вид, представленный кривой 2 (рис. 2).

Был также рассмотрен случай, когда зазор между подпятником и слоем определяется соотношением  $\Delta = 0,0025 (r - 10)^2$  см. Контактные давления, полученные без учета и с учетом тепловыделения в зоне контакта изображены кривыми 3 и 4 на рис.2.

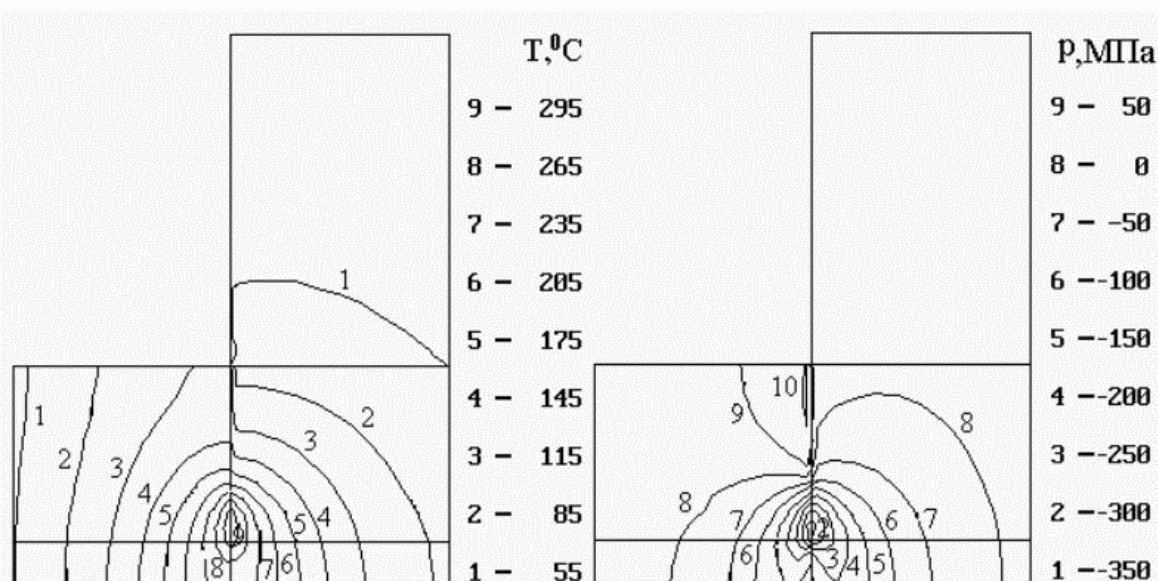


Рис. 3. Распределение температурного поля и окружающих напряжений для плоского подпятника.

Таблица 1. Теплофизические свойства стали.

T, °C	20	200	300	400
$\alpha \cdot 10^5$ 1/град	1,12	1,15	1,19	1,23
K, Вт/(см·град)	0,385	0,331	0,314	0,306
$E \cdot 10^{-5}$ , МПа	2,1	2,0	1,93	1,86



Распределение температурных полей и окружающих напряжений при учете фрикционного нагрева для плоского и скругленного подпятников приведены соответственно на рис.3 и рис.4.

Таблица 2. Теплофизические свойства алюминиевого сплава АК-4.

T, °C	20	100	200	300	370
$\alpha \cdot 10^5$ 1/град	2,12	2,18	2,26	2,43	2,46
K, Вт/(см·град)	1,46	1,51	1,59	1,67	1,74
$E \cdot 10^{-5}$ , МПа	0,7	0,67	0,64	0,55	0,39

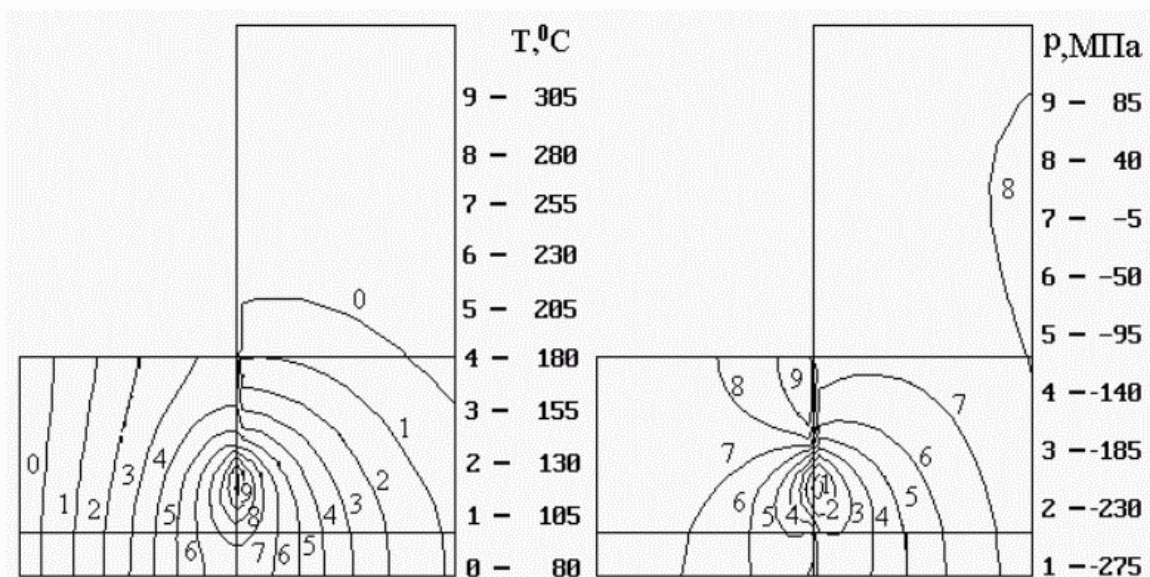


Рис. 4. Распределение температурного поля и окружающих напряжений для скругленного подпятника.



Рис. 5. Расчетная схема конструкции.

Моделирование технологического процесса сварки деталей трением покажем на примере, расчетная схема с разбивкой на конечные элементы для которого приведена на рис. 5. Материал деталей – сталь со свойствами, приведенными в табл.3. Начальная температура деталей – 20° С. На боковых поверхностях



цилиндров коэффициент теплообмена  $\alpha=0,005$  Вт/(см<sup>2</sup>град), на торцах –  $\alpha=0,1$  Вт/(см<sup>2</sup>град), температура среды  $T_{\infty}=20^{\circ}\text{C}$  на всех поверхностях. Произведение скорости относительного вращения на коэффициент трения принималось 100 рад/с. Рассмотрено два случая нагружения деталей –  $P=50$  МПа и  $P=75$  МПа.

Таблица 3. Теплофизические свойства материала.

$T, ^{\circ}\text{C}$	0	100	200	400	600	800	1000	1200
$\alpha \cdot 10^5$ 1/град	0,36	0,54	0,72	1,12	1,33	1,51	1,66	1,75
$K, \text{Вт}/(\text{см} \cdot \text{град})$	0,49	0,48	0,47	0,42	0,35	0,3	0,26	0,25
$\rho \cdot c, \text{Вт} \cdot \text{сек}/(\text{см}^3 \cdot \text{град})$	4	4,5	5	6	6,1	6,4	6	6,7
$E \cdot 10^{-5}, \text{МПа}$	2,03	1,99	1,97	1,85	1,69	1,43	1,08	0,6
Коэф. Пуассона	0,3	0,301	0,311	0,315	0,32	0,33	0,35	0,36

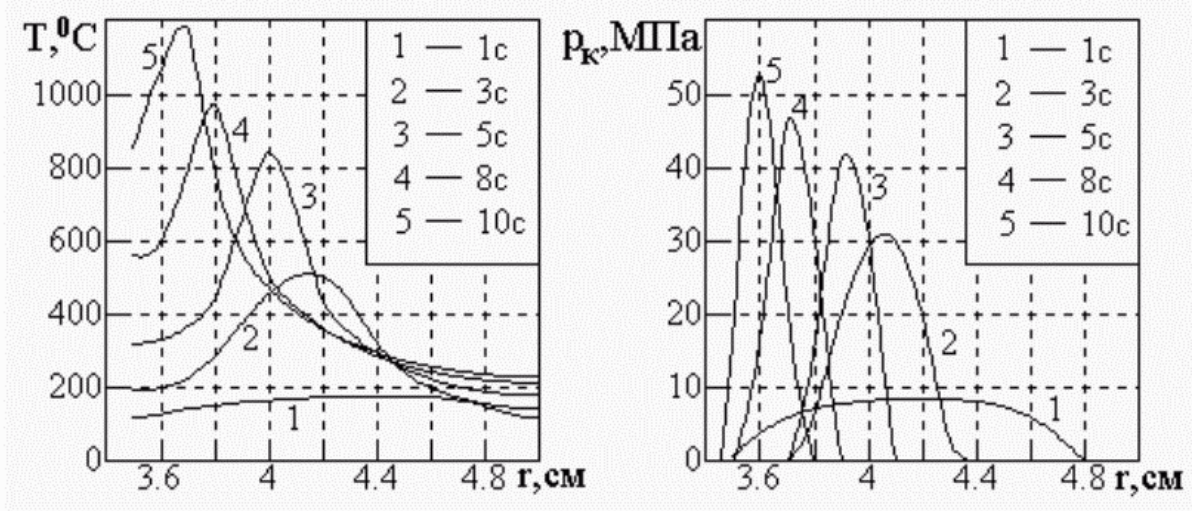


Рис. 6. Распределение температур и контактных давлений ( $P=50$  МПа).

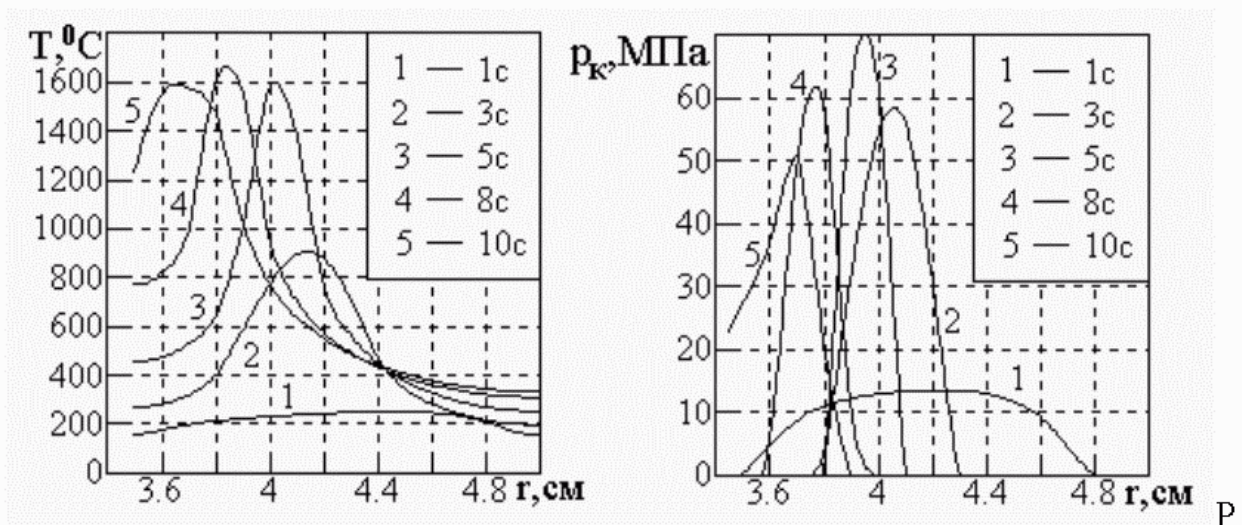


Рис. 7. Распределение температур и контактных давлений ( $P=75$  МПа).

На рис.6 и 7 приведены распределения контактных давлений и распределение температур в зоне контакта в различные моменты времени для первого и второго случая нагружений.

На рис.8 представлено распределение температур в деталях, установившееся к концу процесса разогрева для нагрузок: а - P=50 МПа; б - P=75 МПа.

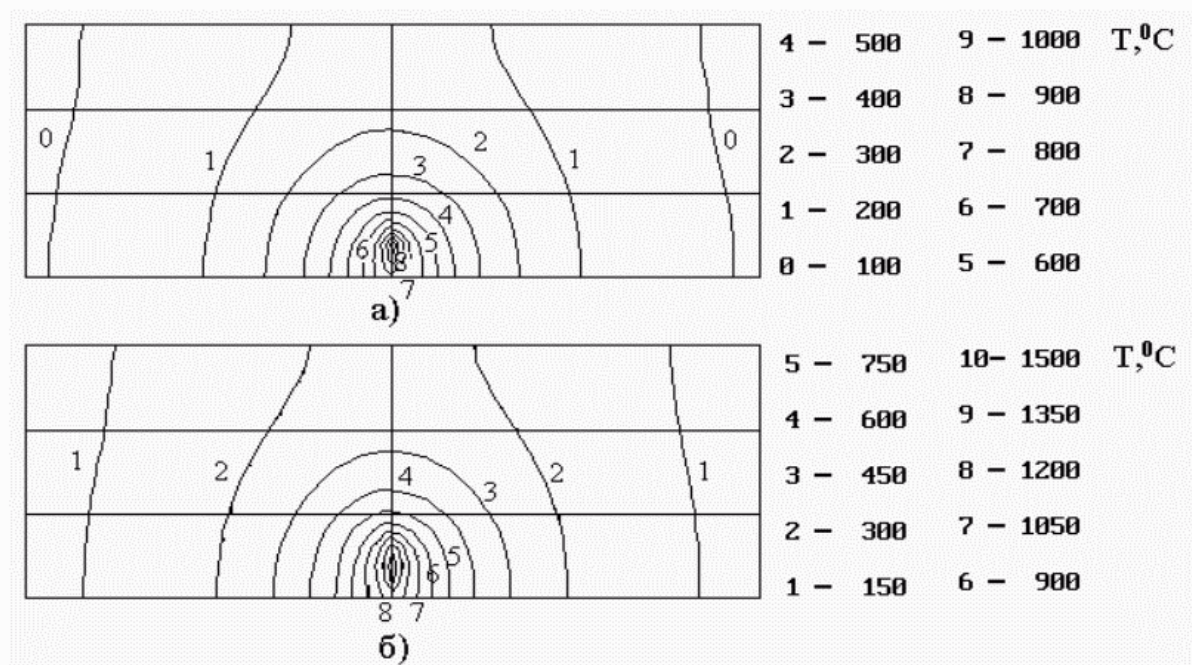


Рис. 8. Распределение температур для момента времени t=10 с.

Таким образом, фрикционный нагрев существенно влияет на распределение контактных давлений. Для обеспечения сходимости итерационного процесса при вычислении контактных давлений от итерации к итерации используется неявная схема [1]

$$\sigma_{\kappa}^{n+1} = \sigma_{\kappa}^n \cdot \beta + \sigma_{\kappa}^{n+1}(1 - \beta), \text{ где } 0 < \beta < 1$$

Обычно принимается  $\beta \approx 0,5$ .

Из полученных результатов расчета можно сделать вывод, что зона контактного взаимодействия с течением времени локализуется и по мере разогрева деталей перемещается от большего радиуса к меньшему. Картина распределения контактных давлений существенно зависит от мощности источников тепловыделения. Причем при большой скорости разогрева температура быстро изменяется в последний период времени, когда зона контакта становится малой, а контактные давления – большими. Результаты позволяют сделать вывод, что сварка деталей будет происходить по небольшому кольцевому участку контактной поверхности.

Следует отметить, что в рассматриваемых задачах значительный интерес может представлять износ контактных поверхностей, приводящий к перераспределению и выравниванию контактных давлений. Износ может

учитываться, как местное увеличение зазора между взаимодействующими поверхностями, по модели, предложенной в работе [6]  $\dot{\delta} = K \cdot \sigma_x^\alpha \cdot v$ , где  $\dot{\delta}$  означает производную изменения зазора по времени,  $K$  и  $\alpha$  – коэффициенты, зависящие от свойств материала и состояния поверхностей,  $v$  – скорость относительного проскальзывания. При учете износа необходимо использовать неявные временные схемы, сходные с использующимися при решении задач ползучести [6]. В противном случае имеет место неустойчивый вычислительный процесс даже при достаточно малых временных шагах.

## Литература

1. Гармаш Н. Г. Двовимірний скінченноелементний аналіз контактних задач із врахуванням теплообміну: Автореф. дис. . . . канд. техн. наук, Харків, 1999.
2. Гонтаровский П. П., Гармаш Н. Г. Расчет напряженно-деформированного состояния замковых соединений лопаток турбомашин с учетом термомонтажных взаимодействий, 533-536, Совершенствование турбоустановок методами математического и физического моделирования, Харьков, ИПМаш им. А.Н.Подгорного НАН Украины, 1997.
3. Гонтаровский П. П., Матюхин Ю. И. О применении неявной схемы интегрирования по времени в конечноэлементном расчете ползучести конструкций по теории течения с анизотропным упрочнением, Проблемы машиностроения, 1998, 3-4, 68–75.
4. Шлыков Ю. П., Ганин Б. А., Царевский С. Н. Контактное термическое сопротивление, Энергия, Москва, 1977.
5. Подгорный А. Н., Гонтаровский П. П., Киркач Б. Н. и др. Задачи контактного взаимодействия элементов конструкций, Наук.думка, Киев, 1989.
6. Крагельский Н. В., Добрынин М. Н., Комбалов В. С. Основы расчетов на трение и износ, Машиностроение, Москва, 1997.
7. Джонсон К. Механика контактного взаимодействия, Мир, Москва, 1989.

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК 539.3:534.1

## НЕСТАЦИОНАРНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН И ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Н.В. Долгополова, С.В. Угримов, А.Н. Шупиков

*Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина*

In work the problem of non-stationary deformation of free-supported multilayer plates and cylindrical shells which lay on the elastic two-parameter foundation is considered. The behaviour of multilayer thin-walled constructions is described by the refined theory of multilayer plates and shells. The influence of parameters of the elastic foundation on the stress-strained state of multilayer constructions is investigated.



## Постановка задачи

Исследуется напряженно-деформированное состояние свободно-опертых многослойных тонкостенных конструкций (пластин и цилиндрических панелей), лежащих на упругом основании, при нестационарном импульсном нагружении.

Многослойная конструкция собрана из слоев постоянной толщины. Количество слоев в пакете равно  $I$ ,  $h_i$  – толщина  $i$ -го слоя. Каждый из слоев изготовлен из однородного изотропного материала. Механические характеристики  $i$ -го слоя:  $E_i$ ,  $\nu_i$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона,  $\rho_i$  – удельная плотность. Контакт между слоями, а также между многослойной конструкцией и основанием исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание.

Цилиндрическая панель отнесена к ортогональной криволинейной системе координат  $Oxyz$ , прямолинейная ось  $Oz$  направлена по нормали к слоям, а нормальная ей координатная поверхность  $Oxy$  связана с наружной поверхностью первого слоя и имеет радиус  $R$  (рис. 1).

К наружной поверхности первого слоя приложена внешняя сила  $\bar{q}^1 = \bar{q}^1(x, y, t)$ , а на наружную поверхность  $I$ -го слоя действует сила  $\bar{q}^I = \bar{q}^I(x, y, t)$ , представляющая собой реакцию упругого основания.

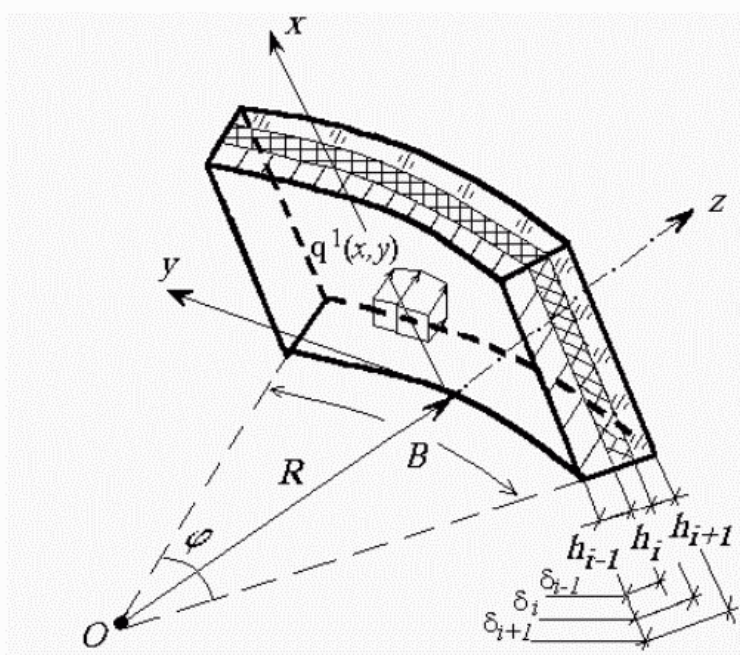


Рис. 1. Многослойная цилиндрическая панель.

## Математическая модель многослойной конструкции

Поведение многослойной конструкции описывается уравнениями уточненной теории первого порядка, построенной Э.И.Григолюком и П.П.Чулковым в работе [1].

Перемещения точки  $i$ -го слоя в направлении координатных линий  $x$ ,  $y$  и  $z$  описываются следующими кинематическими зависимостями [2 - 4]:

$$u^i = u^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_x^i, \quad v^i = v^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_y^i, \\ w^i = w^0, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Здесь  $u^0 = u^0(x, y, t)$ ,  $v^0 = v^0(x, y, t)$ ,  $w^0 = w^0(x, y, t)$  – перемещения точки координатной поверхности в направлении координатных линий;  $\psi_x^i = \psi_x^i(x, y, t)$ ,  $\psi_y^i = \psi_y^i(x, y, t)$  – углы поворота нормали в пределах  $i$ -го слоя;  $t$  – время.

Деформации слоев предполагаются малыми и описываются формулами Коши

$$\varepsilon_x^i = u_{,x}^i, \quad \varepsilon_y^i = \frac{1}{1+z/R} \left( v_{,y}^i + \frac{1}{R} w^i \right), \quad \varepsilon_z^i = w_{,z}^i, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{1}{1+z/R} u_{,y}^i + v_{,x}^i \\ \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = u_{,z}^i + w_{,x}^i, \quad \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = v_{,z}^i + \frac{1}{1+z/R} w_{,y}^i + \frac{1}{R(1+z/R)} v^i, \quad i = \overline{1, I}.$$

На основе закона Гука устанавливается связь между напряжениями и деформациями

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1+\nu_i} \left( \varepsilon_x^i + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} \theta^i \right), \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1+\nu_i} \left( \varepsilon_y^i + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} \theta^i \right), \\ \sigma_z^i = \frac{E_i}{1+\nu_i} \left( \varepsilon_z^i + \frac{\nu_i}{1-2\nu_i} \theta^i \right), \quad \tau_{xy}^i = G_i \gamma_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = G_i \gamma_{xz}^i, \\ \tau_{yz}^i = G_i \gamma_{yz}^i,$$

где

$$G_i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)}, \quad \theta^i = \varepsilon_x^i + \varepsilon_y^i + \varepsilon_z^i, \quad i = \overline{1, I}.$$

Обобщенные усилия в  $i$ -ом слое определяются формулами

$$\begin{bmatrix} N_x^i & N_{xy}^i \\ M_x^i & M_{xy}^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z - \delta_{i-1} \end{matrix} \right\} [\sigma_x^i, \tau_{xy}^i] (1+z/R) dz, \\ \begin{bmatrix} N_y^i & N_{yx}^i \\ M_y^i & M_{yx}^i \end{bmatrix} = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ z - \delta_{i-1} \end{matrix} \right\} [\sigma_y^i, \tau_{xy}^i] dz, \quad Q_x^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{xz}^i (1+z/R) dz, \quad Q_y^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \tau_{yz}^i dz.$$

## Математическая модель основания

Поскольку целью работы является исследование нестационарного деформирования тонкостенных конструкций, а не изучение напряженно-деформированного состояния в упругом основании, то главный интерес представляет реакция основания в зоне контакта. Поэтому задача сводится к нахождению сравнительно простого математического выражения, которое будет с достаточной точностью определять реакцию основания в зоне контакта [5, 6].

Предполагается, что многослойная конструкция лежит на упругом безинерционном двухстороннем основании, которое при вдавливании деформируется согласно гипотезе Пастернака [5, 6]

$$q_3^I = -k_1 w^I(x, y, t) + k_2 \nabla^2 w^I(x, y, t), \quad q_1^I = q_2^I = 0$$

где  $k_1, k_2$  – коэффициенты постели,  $\nabla^2$  – оператор Лапласа.

Согласно работам [7, 8] основание представляется в виде упругого слоя конечной толщины  $H$ , тогда приближенные связи между коэффициентами постели и механическими характеристиками упругого слоя выражаются следующим образом:

$$k_1 = \frac{E^*}{H}, \quad k_2 = \frac{G_0 H}{4}, \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}, \quad E^* = \frac{E_0(1 - \nu_0)}{(1 + \nu_0)(1 - 2\nu_0)}, \quad (1)$$

где  $E_0, G_0, \nu_0$  – модуль Юнга, модуль сдвига и коэффициент Пуассона основания, соответственно.

Используемая математическая модель учитывает не только поперечное сжатие основания, но и работу его на сдвиг. В частном случае, при  $k_2=0$ , модель Пастернака совпадает с широко известной моделью Винклера [5, 6, 7].

## Уравнения движения и метод решения

Уравнения движения и граничные условия получены с помощью вариационного принципа Остроградского-Гамильтона [2]. Для цилиндрической панели уравнения движения в усилиях и моментах имеют вид:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^I \left[ N_{x,x}^i + N_{yx,y}^i - \alpha_{\rho}^i \left( u_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,tt}^j \right) - \beta_{\rho}^i \psi_{x,tt}^i \right] + q_1^1 = 0, \\ & \sum_{i=1}^I \left[ N_{y,y}^i + N_{xy,x}^i + \frac{1}{R} Q_y^i - \alpha_{\rho}^i \left( v_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,tt}^j \right) - \beta_{\rho}^i \psi_{y,tt}^i \right] + q_2^1 = 0, \\ & \sum_{i=1}^I \left[ Q_{x,x}^i + Q_{y,y}^i - \frac{1}{R} N_y^i - \alpha_{\rho}^i w_{,tt}^0 \right] + q_3^1 - q_3^I = 0, \\ & h_i \sum_{j=i}^{I-1} \left[ N_{x,x}^{j+1} + N_{yx,y}^{j+1} - \alpha_{\rho}^{j+1} \left( u_{,tt}^0 + \sum_{k=1}^j h_k \psi_{x,tt}^k \right) - \beta_{\rho}^{j+1} \psi_{x,tt}^{j+1} \right] + \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + M_{x,x}^i + M_{yx,y}^i - Q_x^i - \beta_p^i \left( u_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,tt}^j \right) - \gamma_p^i \psi_{x,tt}^i = 0, \\
& h_i \sum_{j=i}^{I-1} \left[ N_{y,y}^{j+1} + N_{xy,x}^{j+1} + \frac{1}{R} Q_y^{j+1} - \alpha_p^{j+1} \left( v_{,tt}^0 + \sum_{k=1}^j h_k \psi_{y,tt}^k \right) - \beta_p^{j+1} \psi_{y,tt}^{j+1} \right] + \\
& + M_{y,y}^i + M_{xy,x}^i - \left( 1 + \frac{\delta_{i-1}}{R} \right) Q_y^i - \beta_p^i \left( v_{,tt}^0 + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,tt}^j \right) - \gamma_p^i \psi_{y,tt}^i = 0, \quad i = \overline{1, I}.
\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_p^i = \rho_i \alpha_2^i$ ,  $\beta_p^i = \rho_i \beta_2^i$ ,  $\gamma_p^i = \rho_i \gamma_2^i$ ,  $\alpha_2^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (1 + z/R) dz$ ,

$$\beta_2^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (z - \delta_{i-1})(1 + z/R) dz, \quad \gamma_2^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} (z - \delta_{i-1})^2 (1 + z/R) dz.$$

Уравнения движения многослойных пластин получаются из этих уравнений, если опустить слагаемые, содержащие величину  $1/R$ . Метод решения полученных уравнений основан на разложении искомых функций перемещений, а также внешней нагрузки в тригонометрические ряды по функциям, удовлетворяющим условиям на контуре опирания [2, 3, 4].

### Численные исследования и обсуждение результатов

Рассматриваются трехслойные пластины и цилиндрические панели на упругом основании, подверженные импульсному нагружению. Конструкции имеют следующие геометрические характеристики:  $A = B = 0,6$  м,  $h_1 = h_2 = h_3 = 0,01$  м. Первый и третий слой изготовлены из стекла силикатного ( $E_3 = 6,67 \cdot 10^4$  МПа,  $\nu_1 = \nu_3 = 0,22$ ,  $\rho_1 = \rho_3 = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>), второй – из стекла органического ( $E_2 = 5,7 \cdot 10^3$  МПа,  $\nu_2 = 0,38$ ,  $\rho_2 = 2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>).

Импульсная нагрузка имеет вид

$$q_3^1 = P_0 \cdot H(t), \quad q_1^1 = q_2^1 = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2, \quad y_1 \leq y \leq y_2,$$

где  $H(t)$  - функция Хевисайда,  $P_0 = 1$  МПа,  $x_1 = y_1 = 0,2$  м;  $x_2 = y_2 = 0,4$  м.

Во всех рассмотренных ниже примерах приводятся результаты расчетов изгибных напряжений в точке  $x = y = 0,3$  м,  $z = 0,03$  м, расположенной посередине наружной поверхности третьего слоя.

Исследуется влияние коэффициента  $k_1$  на изменение напряжений  $\sigma_x^3$  во времени. Коэффициент  $k_1$  принимался равным 0, 10 и 100 МПа, при этом работа упругого основания на сдвиг не учитывалась ( $k_2 = 0$ ). Результаты расчета приведены на рис. 2.

Из рис. 2 следует, что при увеличении коэффициента постели основания величина напряжений в многослойной конструкции падает. Анализ

кривых, представленных на этом рисунке, позволяет сделать вывод, что учет упругого основания при исследовании динамического поведения многослойной конструкции существенно влияет на процесс колебаний. Если упругое основание отсутствует, то уровень максимальных напряжений для цилиндрической панели ниже, чем для пластины. Максимальные значения изгибных напряжений для пластины и оболочки на упругом основании практически совпадают.

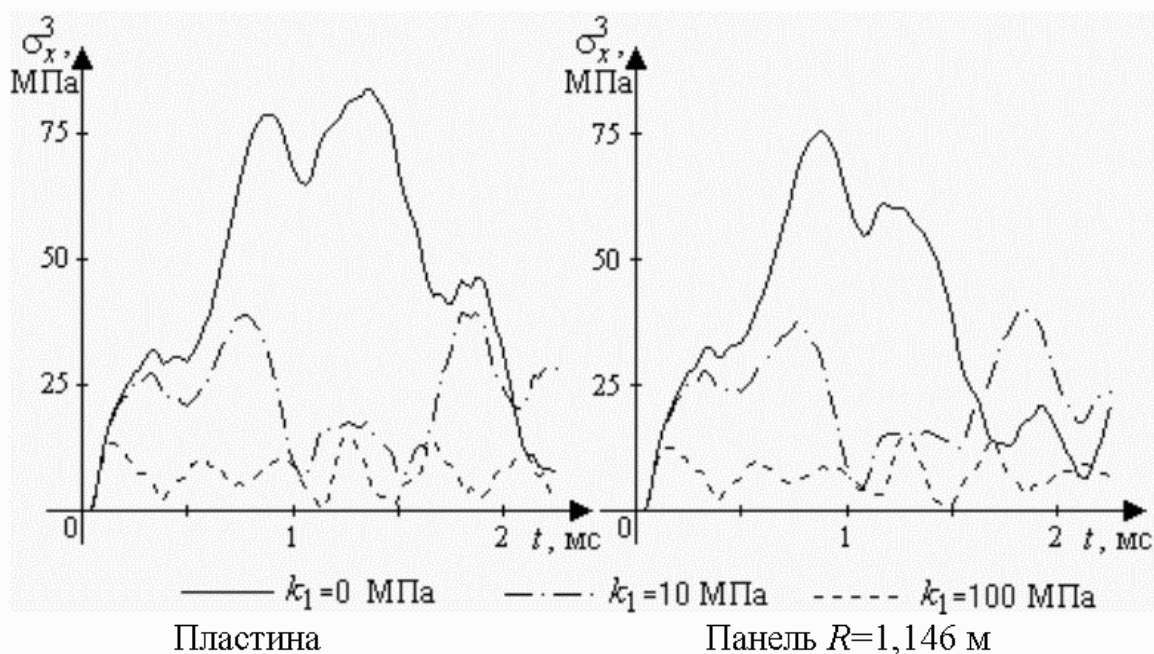


Рис. 2. Изменение напряжений во времени.

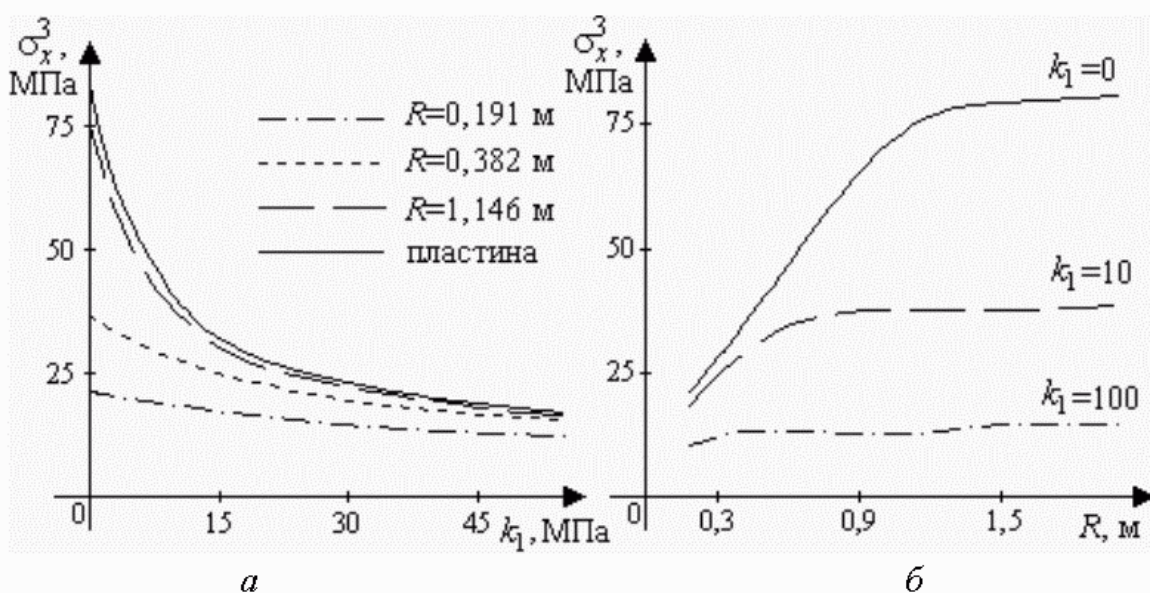


Рис. 3. Влияние кривизны панели и жесткости основания на максимальные изгибные напряжения.

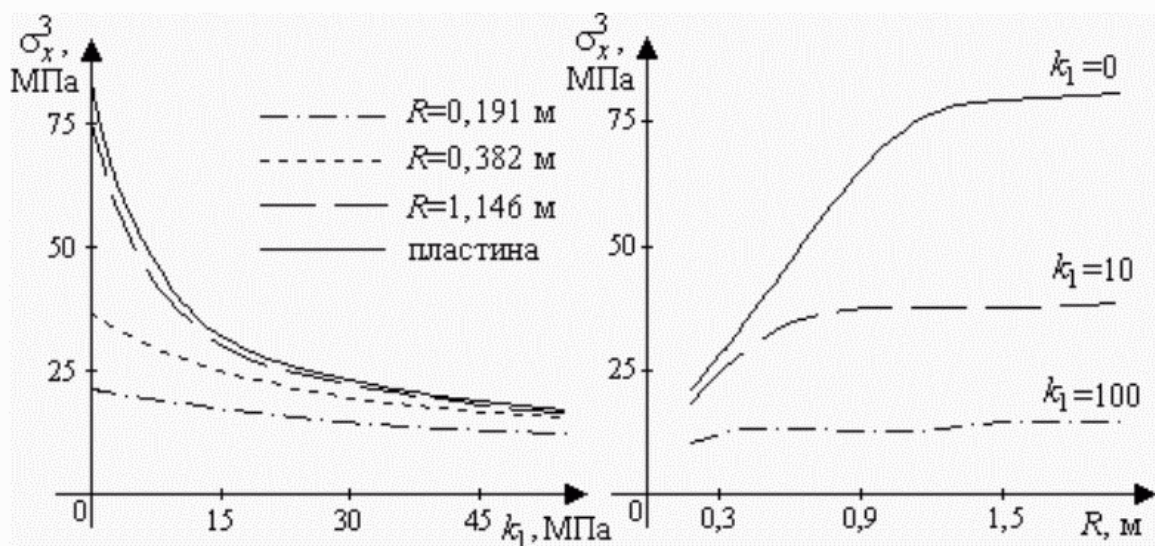
На рис. 3 исследуется зависимость максимальных изгибных напряжений в панелях с разными радиусами кривизны от величины коэффициента постели

$k_1$ . При этом коэффициент  $k_2$ , как и в предыдущем случае, принимался равным нулю. Область изменения радиуса кривизны цилиндрической панели ограничивалась с одной стороны пластинами, а с другой – панелями с центральным углом  $\varphi = \pi$  ( $R=0,191$  м).

На рис. 3, а показано изменение максимальных изгибных напряжений в зависимости от  $k_1$  для панелей с разными радиусами кривизны. Следует отметить, что при увеличении коэффициента постели максимальные значения напряжений асимптотически стремятся к одному и тому же значению. В случае пластин и цилиндрических оболочек с большим радиусом кривизны учет упругого основания приводит к существенному снижению уровня напряжений. На рис. 3, б показаны максимальные изгибные напряжения в зависимости от радиуса кривизны панели для разных значений  $k_1$ .

Исследуется динамическое поведение многослойных конструкций, лежащих на упругом основании толщиной  $H=1$  м. Механические характеристики основания принимались равными:  $E_0 = 8$  МПа,  $\nu_0 = 0,47$  (каучук), коэффициенты постели определялись согласно формулам (1).

На рис. 4 показано изменение напряжений  $\sigma_x^3$  во времени для пластины и цилиндрической панели с  $R = 1,146$  м. Результаты расчета приведены для конструкций без упругого основания, а также для конструкций на одно- и двухпараметрическом основаниях. Анализ результатов показывает, что в начальной стадии динамического взаимодействия конструкции с упругим основанием, коэффициент постели  $k_2$  не влияет на характер изменения напряжений, а на последующем этапе деформирования начинает сказываться сдвиг, обусловленный вторым коэффициентом.



Пластина

Панель  $R=1,146$  м

Рис. 4. Динамическое поведение многослойных конструкций, лежащих на упругом основании.

Таким образом, разработана методика расчета напряженно-деформированного состояния многослойных пластин и цилиндрических оболочек, лежащих на упругих основаниях, при их динамическом нагружении. При этом поведение многослойной конструкции описывается уравнениями уточненной теории, а упругое основание моделируется основанием типа Пастернака.

## **Литература**

1. Григолюк Э.И., Чулков П.П. Теория вязкоупругих многослойных оболочек с жестким наполнителем при конечных прогибах, Журн. прикл. механики и технической физики, 1964, № 5, 109-117.
2. Smetankina N.V., Sotrikhin S.Yu., Shupikov A.N. Theoretical and experimental investigation of vibration of multilayer plates under the action of impulse and impact loads, Int. J. Solids and Structures, 1995, V. 32, № 8/9, 1247-1258.
3. Угримов С. В. Обобщенная теория многослойных пластин, Вестник Харьк. гос. политехн. ун-та, 1998, № 21, 157-160.
4. Шупиков А. Н., Долгополова Н. В. Колебания многослойных цилиндрических панелей при импульсных воздействиях, Вестник Харьк. гос. политехн. ун-та, 1998, № 10, 104-111.
5. Пастернак П.Л. Основы метода расчета фундаментов на упругом основании при помощи двух коэффициентов постели, Москва, Госстройиздат, 1954.
6. Kerr A.D. Elastic and viscoelastic foundation models, J. of Applied mechanics. Transactions of the ASME, 1964, V. 31, Ser.E, № 3, 139-148.
7. Winkler E. Die lehre von elasticitaet und festigkeit, Prag: Dominicus, 1867.
8. Киселев В. А. Расчет пластин, Москва, Стройиздат, 1973

Поступила в редколлегию 14.09.2001

УДК 62.254

## **СТАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ И СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ РАБОЧЕГО КОЛЕСА ТУРБОКОМПРЕССОРА С УЧЕТОМ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ**

В.А. Жовдак, Л.М. Смирнова

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The static stress-and-strain state and free vibrations of cyclic symmetry structure with mistuning are investigated. The paper deals with the process mistuning modeling one variant on the 3D-model of the centrifugal turbocompressor first-stage wheel. Comparative results of tuned and mistuned system analysis are presented.

### **1 Постановка задачи**

Отклонение реальных рабочих колес от строгой симметрии может приводить к существенным изменениям в их напряженно-деформированном состоянии,



как при статическом, так и при динамическом нагружении.

В работе исследуется рабочее колесо первой ступени центробежного газоперекачивающего турбокомпрессора с технологическими отклонениями от циклической симметрии. Конструктивно колесо состоит из основного диска с 15 лопатками и покрывного диска. Покрывной диск соединяется с лопатками припаиванием, что приводит к появлению смещения покрывного диска относительно оси колеса, величиной несколько миллиметров.

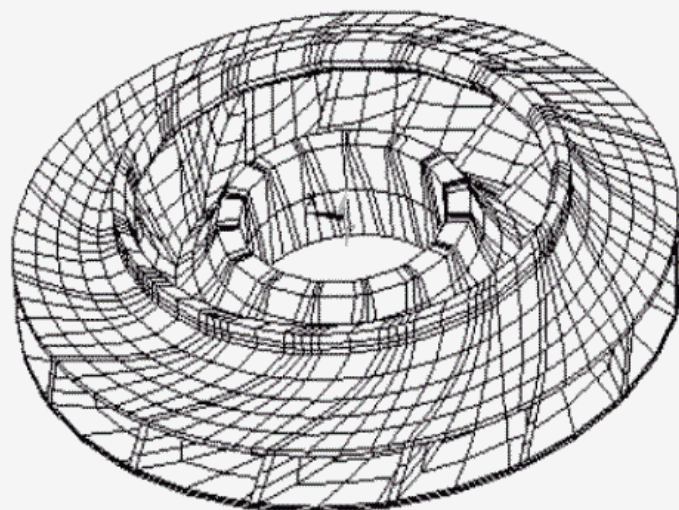


Рис. 1. Конечноэлементная модель рабочего колеса.

Конечноэлементная модель рабочего колеса содержит 3000 трехмерных призматических 20-ти узловых КЭ (рис. 1). Моделирование смещения покрывного диска (рис. 2) при построении конечноэлементной расчетной схемы осуществлялось введением в местах стыка покрывного диска с лопатками промежуточного слоя. При смещении покрывного диска одновременно смещались взаимосвязанные узлы промежуточного слоя.



Рис. 2. Модель смещения покрывного диска.

Ниже представлены результаты расчетов статического НДС и собственных колебаний колеса как циклически симметричной системы, а также с учетом технологической несимметрии.

## 2 Статический анализ

Проведены расчеты по определению напряженно-деформированного состояния от действия центробежных сил рабочего колеса как циклически симметричной системы и с учетом смещения, величиной 5 мм при угловой скорости вращения  $1085 \text{ с}^{-1}$ . Результаты расчетов показывают, что максимальные статические перемещения в колесе (со смещением и без) достигаются на периферии покрывного диска (рис. 3а), а зоны максимальных напряжений располагаются в области стыка лопаток с основным диском (рис. 3б). При внесении смещения в симметричную систему появляется окружная неравномерность напряжений на стыке лопаток с основным диском, величина которой составляет около 6 % (рис. 4).

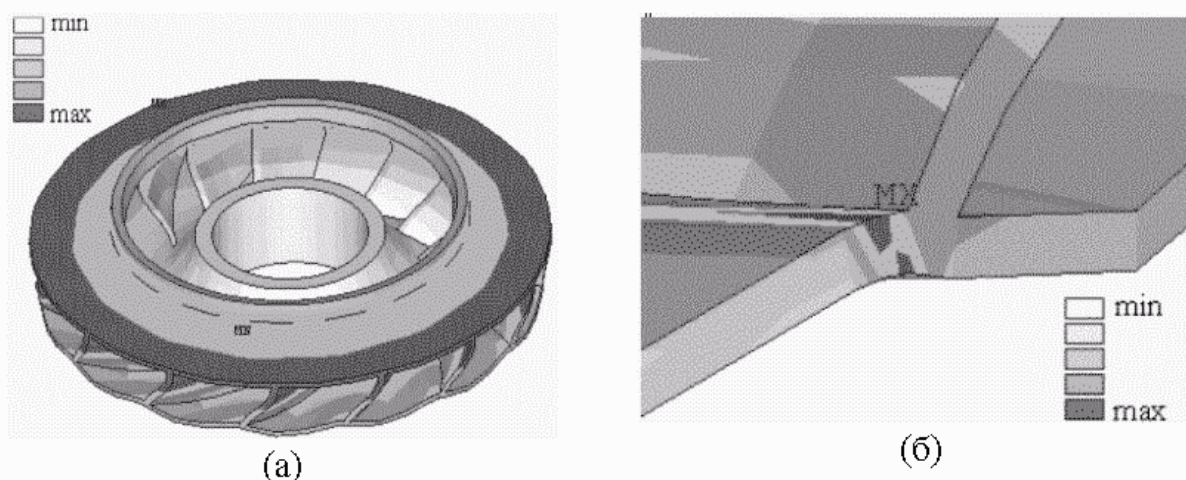


Рис. 3. Статическое напряженно-деформированное состояние:  
(а) - перемещения, (б) - зоны максимальных напряжений.

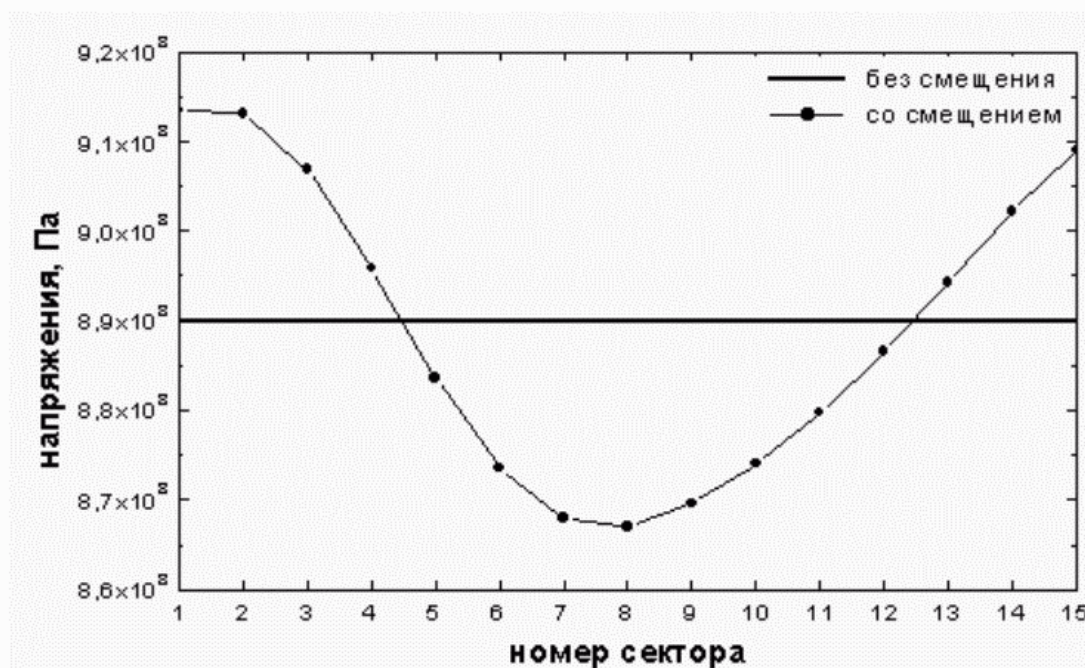


Рис. 4. Окружная неравномерность напряжений.



### 3 Исследование собственных колебаний

Отклонения реальных рабочих колес от строгой симметрии сопровождаются нарушением общих свойств спектров собственных колебаний, что может привести к существенным изменениям в их динамическом поведении. Присутствующие в спектре циклически симметричной системы попарно кратные собственные частоты при внесении расстройки расслаиваются на две различные. Это явление влечет искажение собственных форм колебаний, которые в случае строгой симметрии подчинялись в окружном направлении дискретному гармоническому закону [1,3].

Таблица 1. Собственные формы симметричной системы.

Собственные формы колебаний симметричной системы	
номер частоты	собственная форма
1, 2 (1-я кратная)	
3, 4 (2-я кратная)	
5	
6, 7 (3-я кратная)	
8	
9, 10 (4-я кратная)	

Исследования рабочих колес закрытого типа [2] показали, что спектр собственных частот менее плотный, чем у открытых; собственные формы аналогичны формам колебаний кольцевых дисков (наличие узловых диаметров). Собственные формы колебаний симметричной системы приведены в табл. 1.

В данном случае при внесении относительно большого смещения покрывного диска (по сравнению с допусаемым) собственные частоты отклоняются от кратных незначительно (табл. 2). В то же время относительная перегрузка в системе (т.е. отношение максимальных амплитуд эквивалентных напряжений) на некоторых собственных формах оказывается довольно существенной (табл. 2).

И все же, в силу большой связанности лопаток с основным и покрывным дисками, искажение собственных форм не представляет такой опасности, как в рабочих колесах осевых турбин и компрессоров. По этой же причине, и при вынужденных колебаниях не следует ожидать существенной зависимости степени перегрузки от небольших фазовых изменений в спектре вынуждающей нагрузки.

Таблица 2. Собственные частоты и перегрузка.

номер частоты	собственная частота, с <sup>-1</sup>		относительная перегрузка системы со смещением
	система без смещения	система со смещением	
1	676.94	673.5	1.30
2	676.94	674.3	1.02
3	821.52	819.7	1.05
4	821.52	819.7	1.03
5	843.09	836.1	1.35
6	1561.8	1554.6	1.13
7	1561.8	1554.6	1.21
8	1577.8	1562.9	1.47
9	1977.7	1948.5	1.60
10	1977.7	1962.8	1.15

## Литература

1. Иванов В.П. Колебаний рабочих колес турбомашин. - М.: Машиностроение, 1983. - 224 с. 2. Симсон Э.А., Назаренко С.А., Солошенко В.А. Анализ колебаний рабочих колес турбомашин, Динамика и прочность машин, ХГПУ, 2000, вып.57. - С. 64-72. 3. Whitehead, D.S., 1966, Effects of Mistuning on the Vibration of Turbomachine Blades Induced by Wakes, Journal of Mechanical Engineering Science, Vol.8, pp. 15-21.

Поступила в редколлегию 10.09.2001

## УПРАВЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННЫМ СОСТОЯНИЕМ ПЛОСКОЙ МНОГОСЛОЙНОЙ КАТУШКИ ТОРОИДАЛЬНОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ

Б.Ф. Зайцев, Н.Г. Шultzенко,

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The possibility of reducing maximum stress in multilayer electromagnetic coils is considered. Optimum separation of conducting and nonconducting layers, which introduces the elastic support effect, is suggested. The finite-element method and the modified plane stress state scheme are applied.

Механическая напряженность катушек тороидального магнитного поля является одним из основных факторов, препятствующих достижению высоких параметров электромагнитных полей в установках по удержанию плазмы.

Исследования по рациональному проектированию катушек минимальной механической напряженности рассматривались в ряде работ [1-4]. В одних работах проблема решалась получением оптимальной формы катушек [1, 2], в других – прибегали к дополнительному упругому подкреплению, имеющему различное конструктивное исполнение [3, 4]. Ко второму направлению относится и данная работа.

Схема рассматриваемой плоской катушки представлена на рис. 1. Ряд катушек данной конструкции циклически симметрично расположены относительно колонны установки с опиранием на нее. Совокупность катушек составляет систему тороидального магнитного поля установки [5].

Катушка относится к биттеровскому типу и представляет собой многослойную пластину со стальными подкрепляющими накладками (Б) и проводящей части катушки (ПЧК) в виде медно-изоляционного компаунда. Коммутация витков ПЧК выполнена в "контактной" зоне (К), а скрепление всего пакета осуществляется поперечными шпильками (на рисунке показаны крестиками). Катушка нагружена электромагнитными силами, приложенными к ПЧК в ее плоскости, приближенно задаваемыми формулой [5]

$$F_r = \frac{k}{[\ln(r_e/a)^2]} \cdot \frac{\ln(r_e/r)^2}{r(R_0 - r \cos \theta)},$$

где  $R_0$  – радиус от оси колонны до центра катушки,  $k$  – коэффициент, определяемый уровнем магнитного поля катушки.

Приведенная формула точна для круглой катушки и обобщена на случай переменного внешнего радиуса  $r_e$ .

Равнодействующая объемных сил  $F_r$  направлена к колонне и воспринимается введенным опиранием. Вследствие симметрии катушки и четности  $F_r$  от  $\theta$  рассматривается половина области, а на линии разреза

вводятся условия симметрии.

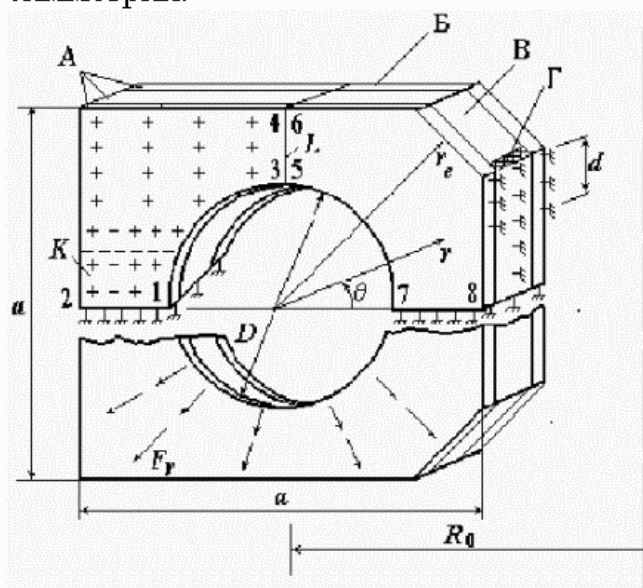


Рис. 1 – Схема катушки: А – скрепленная часть; Б – стальные накладки; В – пакет медных витков; Г – прокладка; К – “контактная” зона

В базовом варианте конструкции скрепление слоев предполагается по всей площади катушки. В этом случае взаимное смещение слоев отсутствует. Геометрия катушки и характер действующих сил позволяют применять обычную схему плоского напряженного состояния, для численной реализации которой использован МКЭ [7]. При этом вводятся эффективные механические характеристики слоистого композита.

Анализ НДС базовой конструкции, как и в случае классической круглой катушки, показал существенную неравномерность распределения напряжений, которые носят изгибный характер (табл., вар. I).

Тангенциальные напряжения в точках 1÷8 ПЧК и характеристика опирания

№	Вариант	$\sigma_t$ , МПа								F/F
		1	2	3	4	5	6	7	8	
I	Базовая конструкция	32,1	10,7	12,1	24,0	12,1	24,0	41,6	18,9	0
II	$d = d_{\max}; C = C_{\text{опт}}$	22,8	14,4	20,7	15,6	31,2	22,3	30,5	29,4	0,6
III	$d = \frac{2}{3}d_{\max}; C > C_{\text{опт}}$	23,4	14,6	17,0	18,9	31,5	16,9	31,4	25,6	0,4
IV	$d < d_{\max}; C \ll C_{\text{опт}}$	18,4	17,0	23,6	13,3	46,1	20,4	21,2	38,9	1

Для уменьшения влияния изгибного фактора рекомендуется упругое подкрепление катушек [3-5]. Для данной конструкции катушки это возможно за счет частичного разобщения стальных накладок и ПЧК, опирания стальных

накладок (СН) непосредственно на колонну, а ПЧК – на колонну через прокладку.

Следствием этого является приложение реакции под накладками к катушке через линию разобщения  $L$  (см. рис. 1), что соответствует упругому опиранию. Как механическая система катушка с разобщением представляет собой многослойную пластину, на части области которой слои скреплены (А), а на части деформируются независимо (Б и В). Во всех слоях реализуется схема плоского напряженного состояния (ПНС).

В математическом плане введенная схема деформирования в рамках ПНС имеет нетрадиционную формулировку, более подробно рассмотренную в [6]. В системе уравнений МКЭ, получаемой согласно [7], связь между подобластями А, Б, В осуществляется через уравнения, которые соответствуют узлам линии стыковки (разобщения)  $L$ .

Каждая подобласть пластины имеет свои эквивалентные жесткостные характеристики, зависящие от сочетания слоев, их толщин и упругих характеристик и определяемые правилами механики композитов. В результате расчета определяются реальные перемещения в плоскостях пластин, а также получаются макронапряжения, которые используются для пересчета напряжений в составляющих подобласть слоях по простым формулам.

Из решения задачи об оптимальном упругом подкреплении круглой катушки тороидального магнитного поля по стержневой модели известно, что наибольший эффект снижения напряжений имеет место при реализации упругого опирания через среднюю часть катушки ( $\theta_L \approx 0,5\pi$ ). Это подтвердили и проведенные численные исследования по предложенной схеме при различных углах разобщения  $\theta_L$ . Более предметно в дальнейшем рассматривается именно такой случай.

На рис. 2, 3 представлены результаты расчеты НДС катушки с разобщением при полном опирании ( $d = 0$ ) на стальные накладки. Картина смещений и распределение напряжений физически интерпретируемы. Существенно более низкий уровень напряжений в ПЧК подобласти А связан с подкрепляющим действием СН. Выясним условия оптимального упругого опирания катушки без подкрепления в подобласти А.

Стальные накладки, соединенные с медным пакетом по линии  $L$ , воспринимают не только продольную силу, которая частично уравнивает равнодействующую внешних сил, но и изгибающий момент и перерезывающую силу. Смоделируем случай, близкий к оптимальному упругому подкреплению круглых катушек [5], предусматривающему передачу только продольной силы. Для этого введем сосредоточенное опирание СН при  $d = d_{max}$ . Распределение напряжений  $\sigma_\theta$  в СН на линии  $L$  практически равномерное, т.е. действительно опоры передают только продольную силу.



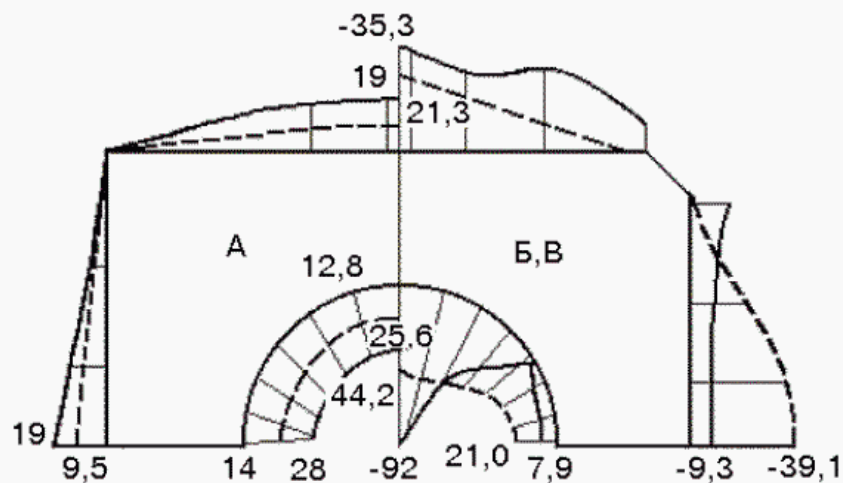


Рис. 2. Тангенциальные напряжения (МПа) в стальных (сплошная линия) и медных (пунктирная линия) элементах катушки при их частичном разобшении

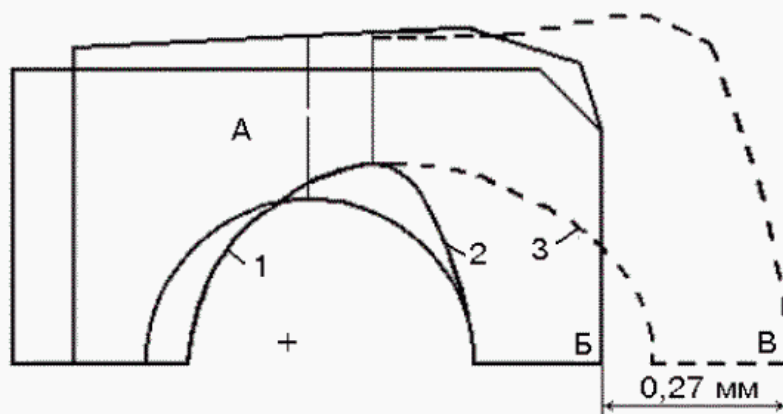


Рис. 3. Деформация катушки с частично разобщенными стальными и медными элементами:

- 1 – положение части А катушки со скрепленными элементами;
- 2, 3 – положение частей Б, В катушки соответственно разобщенных стальных и медных элементов

Варьировалась жесткость прокладки под ПЧК с целью снижения максимальных напряжений в меди (ПЧК). Результаты для оптимального варианта II (жесткость прокладки  $C_{opt}$ ) представлены в таблице для точек, указанных на рис. 1.

Основной характеристикой оптимального упругого опирания является соотношение суммарной реакции упругого опирания на СН  $F'$  и результирующей внешних сил  $F$ . Величина  $F'$  вычислялась как интеграл от напряжения  $\sigma_\theta$  в СН справа от линии  $L$ . Сила  $F$  равна сумме  $F'$  и суммарной реакции прокладки под ПЧК ( $F''$ ). Для данной задачи оптимальная величина  $F'/F$  составила 0,6 (заметим, что для круглой катушки это значение равно 0,8 [5]).

Для реального опирания ("подковообразная" разобшенная часть СН) СН воспринимают все силовые факторы и оптимальное опирание имеет место на более жесткой прокладке. Средняя часть СН теряет контакт с колонной, поэтому целесообразно заранее осуществлять неполное опирание ( $d \approx \frac{2}{3} d_{\max}$ ). Для этого варианта (вар. III таблицы) максимальное напряжение имеет примерно такие же величины, как и для предыдущего, однако характеристика  $F'/F \approx 0,4$ .

Таким образом, оптимальное упругое опирание катушки, полученное частичным разобщением СН и ПЧК, а также частичным жестким опиранием СН и упругим опиранием ПЧК с заданной податливостью, позволяет снизить максимальные растягивающие напряжения в меди с 41,6 до 31,5 МПа.

Другой ответственной характеристикой напряженности меди в ПЧК являются напряжения на границе КЗ, которые для базового и оптимального по максимальным напряжениям вариантов распределены очень неравномерно. Можно добиться почти равномерного (вар. IV) распределения напряжений на границе КЗ, при этом, однако, возрастают максимальные напряжения в других (менее ответственных) частях катушки. Результаты варианта IV получены при неполном опирании СН и очень податливой прокладке по ПЧК.

## Литература

1. Лейтес Л.В. Тороидальный реактор без сердечника для энергосистем//М.: Электричество. – 1960. – № 11. – С.76–81.
2. Шафранов В.Д. Об оптимальной форме тороидальных соленоидов// Журн. техн. физики. – 1972. – 42, вып. 9. – С. 1785–1791.
3. Ваулина И.Г., Елисеев В.В., Пальмов В.А. и др. О расчете прочности электромагнитной системы установки Т-20 //Докл. Всесоюз. конф. по инженерным проблемам термоядерных реакторов. Ленинград, 28–30 июня 1977 г. Л., Науч.-исслед. ин-т электрофизич. аппаратуры им. Д.В. Ефремова, 1977. – I. – С. 265-273.
4. Монтгомери Д.Б. Разработка магнитных систем // Тр. Ин-та инженеров по электротехнике и радиоэлектронике. – 1981. – 69, № 8. – С. 133–167.
5. Расчет на прочность биттеровской катушки тороидального магнитного поля установки типа токамак/ А.Н. Подгорный, А.Г. Киров, Б.Ф. Зайцев и др.–Харьков, 1986. – 43 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения: № 235)
6. Зайцев Б.Ф. Модифицированная схема плоского напряженного состояния для многослойной пластины // Науковий вісник будівництва. – 2001.– Вып. 14. –С.40–43.
7. Решение прикладных контактных задач методом конечных элементов /А.Н.Подгорный, Г. А. Марченко, П.П. Гонтаровский, Б.Н. Киркач. – Харьков, 1984. – 64 с. (Препринт/АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения: № 198)

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК 539.3

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВИДОВ РЕМОНТА МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРУБОПРОВОДОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РАЗМЕРОВ ДЕФЕКТНЫХ УЧАСТКОВ**

О.В. Конохова, П.Ф. Ворончагин, В.И. Конохов

*Инженерно-технический центр "Диагностика", Харьков, Украина*

In present article offers a repair laying necessity determination methods and air of required repair arterial conduits in dependence on size of corrosive defeating. A Given methods founded on being normative documents and allows to take into account majority of factors, determining bearing conduits areas ability, containing the corrosive defects.

Наружная поверхность магистральных трубопроводов, проработавших 10 и более лет, вследствие различных причин - нарушение регламентированного режима электрохимзащиты, механические воздействия, последствия нарушения технологии изготовления и др. - может иметь различные дефекты, обнаруживаемые при обследовании. Все дефекты, независимо от их происхождения, являются концентраторами напряжений. В зависимости от вида и величины дефекты можно разделить на допустимые, то есть те, которые не снижают несущей способности, и недопустимые, то есть требующие устранения.

Основным видом дефектов, обнаруживаемых при комплексном обследовании магистральных трубопроводов, являются каверны, представляющие собой несквозные отверстия с пологим дном. Этимология их образования различна - это и следствие язвенной коррозии, и выпадение шлаковых включений и т.д. В зависимости от размеров дефектов в случае необходимости их устранения требуется тот или иной вид ремонта.

В настоящее время недостаточно нормативной документации, отвечающей задаче определения вида ремонта в зависимости от величины обнаруженного дефекта. В Инструкции НПО "Союзтехнологии" по освидетельствованию, отбраковке и ремонту труб в процессе эксплуатации и капитального ремонта линейной части магистральных газопроводов [1], утвержденной в 1991 году, приведен график, по которому рекомендуется определять степень опасности обнаруженного дефекта. Но, так как при построении этого графика не учтены ни параметры нагружения трубопровода, ни его геометрия, то, следовательно, нельзя считать его достоверным. Кроме вышеприведенного документа, в 1996 г. Минским физико-техническим институтом была разработана "Методика по оценке несущей способности магистральных газопроводов по данным внутритрубной диагностики" [2]. В этой Методике приведена формула расчета допускаемого давления с учетом наличия дефекта Эта формула практически совпадает с аналогичной

формулой американского стандарта ASME B31.6-1991 & Manual for Determining the Remaining Strength of Corroded Pipelines [3]. Согласно этому документу наличие практически любого дефекта приводит к необходимости снижения номинального давления газа в трубе либо ремонту, что не всегда отвечает действительности.

В соответствии с ГОСТ 24755-89 [4], основанном на методе компенсирующих площадей, на любой цилиндрической обечайке возможно наличие некоторого отверстия, которое не ослабляет рассматриваемое сечение. Площадь поперечного сечения этого отверстия -  $F_0$

$$F_0 = d_{0R} \cdot S, \quad (1)$$

где  $S$  – фактическое значение толщины участка магистрального трубопровода, мм;

$d_{0R}$  – расчетный диаметр одиночного отверстия, не требующего дополнительного укрепления, мм

$$d_{0R} = 2 \cdot \left( \frac{S}{S_R} - 0,8 \right) \cdot \sqrt{D \cdot S}, \quad (2)$$

где  $D$  – внутренний диаметр участка трубопровода, мм;

$S_R$  – расчетное значение толщины участка магистрального трубопровода, мм

$$S_R = \frac{n \cdot P \cdot D_H}{2 \cdot ([\sigma] + n \cdot P)}, \quad (3)$$

где  $D_H$  – наружный диаметр участка трубопровода, мм;

$P$  – расчетное давление, МПа;

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение материала трубопровода, МПа;

$n$  – коэффициент надежности по нагрузке (см. табл.13 СНиП 2.05.06-85 [5]);

$$[\sigma] = R_m / n_m, \quad (4)$$

где  $R_m$  – предел прочности материала трубы;

$n_m$  – коэффициент запаса прочности по пределу прочности

$$n_m = \frac{k_H \cdot k_1}{m}, \quad (5)$$

$k_H$  – коэффициент надежности по назначению;

$k_1$  – коэффициенты надежности по материалу;

$m$  – коэффициент условий работы трубопровода.

Для магистральных трубопроводов, пролегающих по территории Украины, характерными являются такие нагрузки, как масса трубопровода и обустройств, давление грунта (для подземных участков), внутреннее давление и т.д. В зависимости от категории рассматриваемого участка трубопровода, коэффициент условий работы при расчете трубопровода на прочность, согласно табл.1 СНиП 2.05.06-85 [5], принимается равным следующим величинам:

категория В –  $m = 0,6$ ;

категории I, II –  $m = 0,75$ ;  
категории III, IV –  $m = 0,9$ .

Категория участка трубопровода, в зависимости от его условий эксплуатации, принимается в соответствии с табл.2 и 3 СНиП 2.05.06-85 [5].

Значение коэффициента надежности по назначению  $k_H$  выбирается в соответствии с таблицей 11 СНиП 2.05.06-85 [5] в зависимости от диаметра трубопровода и давления продукта.

Так как достоверная документация на магистральные газопроводы, проработавшие 10 и более лет, как правило, отсутствует, то допускаемые напряжения определяются по пределу прочности, который, в свою очередь, определяется по замеренному значению твердости НВ в соответствии с ГОСТ 22761-77 [6]. Коэффициент надежности по материалу  $k_1$  для определения запаса по пределу прочности рекомендуется брать равным 1,55.

Если же марка стали, из которой изготовлен магистральный трубопровод, известна, то значение предела прочности материала определяется как наименьшее из двух значений, одно из которых получено в результате испытаний (по диаграмме растяжения или по измеренному значению твердости в соответствии с ГОСТ 22762-77), а второе - из ГОСТа 14249-89 [7], либо другой нормативной документации.

В соответствии с Приложением к п.2.3 СНиП 2.05.06-85 [5], при испытании трубопровода допускается повышение давления до величины, вызывающей напряжение в металле трубы до предела текучести с учетом минусового допуска на толщину стенки, то есть напряжение не может превышать значения

$$[\sigma]_1 = \frac{R_e}{1,1}, \quad (6)$$

так как минусовый допуск на толщину стенки не превышает 10 процентов номинального значения толщины.

Значение предела текучести материала можно определить так же как и значение предела прочности, а именно, как наименьшее из двух значений, одно из которых получено в результате испытаний (по диаграмме растяжения или по измеренному значению твердости в соответствии с ГОСТ 22762-77), а второе - из ГОСТа 14249-89 [7] либо другой нормативной документации.

Согласно п.2.5 приложения 3 ДНАОП 1.3.07-8.02-93 [8], значение предела текучести по значениям НВ определяется следующим образом:

$$\text{для твердостей НВ} \geq 1500 \text{ МПа} \quad R_e = 0,367 \cdot \text{НВ} - 240; \quad (7)$$

$$\text{для твердостей НВ} < 1500 \text{ МПа} \quad R_e = 0,2 \cdot \text{НВ}. \quad (8)$$

Площадь обнаруженного при комплексном обследовании дефекта с некоторым запасом можно считать равной  $F_{\text{ДЕФ}}$

$$F_{\text{ДЕФ}} = d_{\text{ДЕФ}} \cdot S_{\text{ДЕФ}}, \quad (9)$$

где  $S_{\text{ДЕФ}}$  – глубина дефекта, мм;



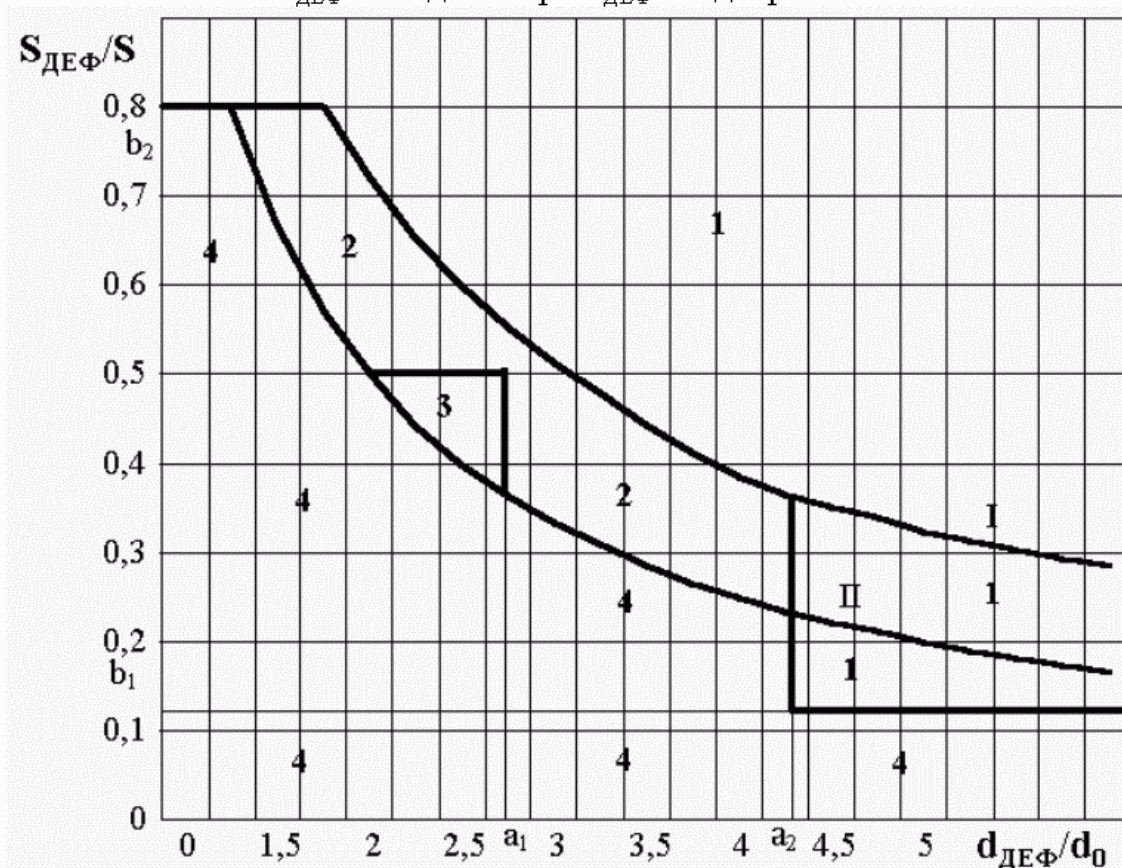
$d_{\text{ДЕФ}}$  – диаметр дефекта, мм.

Условие, обеспечивающее прочность трубопровода, в этом случае имеет вид

$$F_{\text{ДЕФ}} \leq F_0. \quad (10)$$

По двум значениям допускаемого напряжения, определяемым по формулам (4) и (6) можно определить и 2 значения площади отверстия, не требующего укрепления, - гарантированное, соответствующее допускаемому напряжению, полученному по формуле (4), и предельное, соответствующее формуле (6). Таким образом, в соответствии с (10), можно построить 2 кривые - зависимости глубины допускаемого дефекта от его протяженности.

Зависимость относительной глубины допускаемого дефекта  $S_{\text{ДЕФ}}/S$  от диаметра  $d_{\text{ДЕФ}}$ . Виды ремонта



I – Допускаемый дефект, соответствующий предельному значению допускаемого напряжения.

II – Допускаемый дефект, соответствующий гарантированному значению допускаемого напряжения.

$a_1$  - соответствует дефекту, размер которого вдоль образующей ограничен 200 мм, а в окружном направлении - 150 мм

$a_2$  - соответствует дефекту длиной 400 мм и шириной до  $1,5 \cdot S$

$b_1$  - относительная глубина дефекта равна  $1 - \frac{S_R}{S}$

$b_2$  - соответствует такой глубине дефекта, при которой остаточная толщина стенки составляет:

для труб толщиной до 10 мм включительно - 2 мм

для труб толщиной свыше 10 мм - 20 % толщины.

Область 1 – недопустимые дефекты, требующие вырезки дефектных мест и сварки катушки;

Область 2 – дефекты, требующие ремонта заваркой или сваркой заплат; Область 3 – дефекты, требующие устранения путем зашлифовки;

Область 4 – допустимые дефекты.

Кроме того, условие (10), обеспечивая прочность трубопровода в целом, тем не менее, допускает наличие даже некоторого сквозного отверстия, которое недопустимо с точки зрения герметичности. Разгерметизация, то есть локальное разрушение в зоне дефекта, может произойти в том случае, если жесткость трубопровода в целом существенно (на порядок) превышает жесткость дефектного места. Отсюда вытекает еще одно ограничение, накладываемое на величину дефекта

$$S_{\text{деф}} \leq 0,8 \cdot S. \quad (11)$$

Это ограничение совпадает как с американским стандартом ASME V31.6 - 1991 [3], так и с отечественными ограничениями по ремонту [9,10].

Выше приведены ограничительные кривые зависимости глубины дефекта от его протяженности. Там же указаны области, соответствующие различным видам ремонта, который необходимо проводить, если обнаруженный дефект окажется в той или иной из них. Виды ремонта для различных размеров дефектов, рекомендуемые для выполнения в настоящей работе и указанные на рисунке, выбраны в соответствии с действующими в настоящее время документами [9-13].

Так как приведенные выше формулы для сквозных отверстий правильной формы получены в соответствии с принципом “компенсирующих площадей”, то для реальных несквозных дефектов неправильной формы условие прочности будет иметь вид

$$V_{\text{деф}} \leq \frac{\pi \cdot d_{\text{деф}}^2}{4} \cdot S, \quad (12)$$

где  $V_{\text{деф}}$  – объем рассматриваемого дефекта.

Однако, кроме задачи определения вида необходимого ремонта для участков содержащих недопустимые дефекты, стоит задача определения допустимого срока эксплуатации участков с дефектами, не требующими устранения на момент их обнаружения.

Процесс коррозионного разрушения зависит от многих факторов. Это кислотность и влажность грунтов, эффективность работы станций электрохимзащиты, наличие источников блуждающих токов и многое другое. За время эксплуатации магистрального трубопровода эти параметры могут

изменяться, однако эти изменения происходят достаточно медленно и можно предположить, что скорость коррозии для каждого участка магистрального трубопровода между обследованиями является величиной постоянной. Основываясь на этом предположении, определим остаточный ресурс эксплуатации участков трубы:

для участков, содержащих дефекты, диаметр которых ниже диаметра отверстия, не требующего укрепления

$$\tau_s = \frac{S - S_R}{S_{\text{ДЕФ}}} \cdot \tau_o, \quad (13)$$

где  $\tau_o$  – отработанный ресурс;

для участков, содержащих дефекты, диаметр которых выше диаметра отверстия, не требующего укрепления

$$\tau_v = \frac{[V] - V_{\text{ДЕФ}}}{V_{\text{ДЕФ}}} \cdot \tau_o, \quad (14)$$

где  $V_{\text{ДЕФ}}$  – объем рассматриваемого дефекта

$[V] = \frac{\pi \cdot d_o^2}{4} \cdot S$  – объем допускаемого дефекта.

## Литература

**1.** Инструкция по освидетельствованию, отбраковке и ремонту труб в процессе эксплуатации и капитального ремонта линейной части магистральных газопроводов. - М., НПО "Союзгазтехнология", ВНИИГАЗ, 1991. **2.** Методика по оценке несущей способности магистральных газопроводов по данным внутритрубной диагностики. - Минск, Академия наук Беларуси. Физико-технический институт. 1996. **3.** ASME B31.6-1991 & Manual for Determining the Remaining Strength of Corroded Pipelines. **4.** ГОСТ 24755-89. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность укрепления отверстий **5.** СНиП 2.05.06-85. Магистральные трубопроводы **6.** ГОСТ 22762-77. Металлы и сплавы. Метод измерения твердости по Бринеллю переносными твердомерами статического действия. **7.** ГОСТ 14249-89. Сосуды и аппараты. Нормы и методы расчета на прочность. **8.** ДНАОП 1.3.07-8.02-93. Проведение работ по оценке остаточной работоспособности технологического оборудования нефтеперерабатывающих, нефтехимических и химических производств. - Киев, Госнадзорохрантруда Украины, 1993. **9.** СНиП III-42-80. Магистральные трубопроводы. Правила производства и приемки работ. **10.** ВСН 006-88. Строительство магистральных и промысловых трубопроводов. Сварка. **11.** ВСН 012-88. Строительство магистральных и промысловых трубопроводов. Контроль качества и приемки работ. **12.** Инструкция по отбраковке труб при капитальном ремонте линейной части магистральных газопроводов. - М., ВНИИГАЗ, 1982. **13.** Инструкция по устранению

коррозионных повреждений труб сваркой при капитальном ремонте магистральных газопроводов. - М., ВНИИГАЗ, 1985. **14**. РД 51-108-86. Инструкция по технологии сварки и резки труб сваркой при капитальном ремонте магистральных газопроводов.

Поступила в редколлегию 06.09.2001

УДК 629.114.2.02.-191

## **КОМПЛЕКСНАЯ ОЦЕНКА ДОЛГОВЕЧНОСТИ КОЛЕСНЫХ ТОРМОЗОВ ТРАКТОРОВ ТИПА Т-150К**

В.Г. Кухтов<sup>1</sup>, О.В. Щербак<sup>2</sup>, А.Н. Лесь<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *ОАО "Харьковский тракторный завод", Украина;* <sup>2</sup> *Харьковский национальный автомобильно-дорожный университет, Украина*

The article contains results of settlement researches of the pressure and deformed condition of a wheel brake drum with use of spatial solid-state designing. The recommendations for perfection of its design are given.

Серьезной альтернативой проведению экспериментальных исследований в последнее время является использование современных универсальных программных комплексов, позволяющих проводить расчеты напряженно-деформированного состояния сложных деталей машин по уточненным расчетным схемам от действия всех видов силового и температурного нагружений.

Особенно эффективно использование таких комплексов на стадии выбора рациональных размеров деталей и узлов при проектировании и модернизации. Единственным препятствием быстрому внедрению таких комплексов является их относительно высокая стоимость и отсутствие справочной литературы, что требует определенного времени по овладению их большими вычислительных возможностей широкому кругу инженеров–исследователей.

На ОАО "Харьковский тракторный завод" внедрен в практику проектирования графический пакет для трехмерного твердотельного моделирования "SolidWORKS". В настоящее время ряд чертежей переведен в этот пакет, а новое проектирование проводится на основе трехмерного твердотельного моделирования. Примером такого моделирования является колесный тормоз рис. 1.

Компьютерное представление деталей дает возможность существенно уменьшить время для подготовки базы данных к компьютерным расчетам. Форматы хранения чертежей согласованы между компаниями-изготовителями графических и программных комплексов. Создателями

программных комплексов делаются попытки встраивания расчетных пакетов в графические. Примерами могут служить встраиваемая версия УПК COSMOS для пакета SolidWORKS или пакет PRO/МЕХАНИКА, используемый системой трехмерного твердотельного и поверхностного проектирования PRO/ENGINEER. Встроенные пакеты гораздо проще в обращении, чем основные версии, но это достигается существенным сужением возможностей исследователя вмешиваться в процесс построения конечно-элементной расчетной модели, выбор конечного элемента, типа решаемой задачи, метода решения разрешающей системы уравнений.

Данная задача может служить примером достаточно эффективного использования новых возможностей моделирования и рационального проектирования в системе пространственного твердотельного проектирования SolidWORKS с встроенной версией УПК COSMOS.

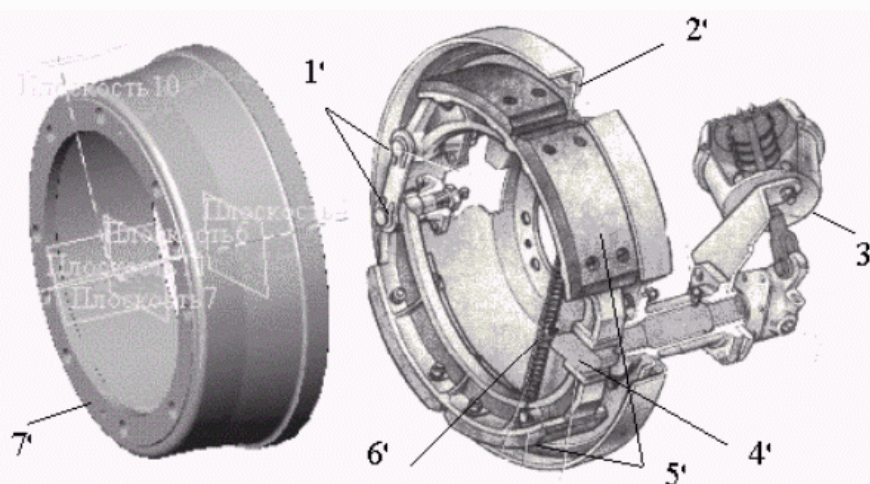


Рис. 1. Колесный тормоз трактора Т-150К; эксцентриковые оси; 2 - тормозной щит; 3-тормозная камера; 4 - разжимной кулак; 5 - тормозные колодки; 6 - стяжная пружина; 7 - тормозной барабан.

Тормозной барабан представляет собой одну из самых ответственных деталей тормозной системы. Его долговечность зависит от двух факторов. Первым фактором является износ внутренней цилиндрической поверхности барабана, соприкасающейся с тормозной колодкой. Долговечность по этому фактору зависит от выбора фрикционного материала колодки и удельной силы трения. Вторым фактором является усталостная прочность барабана, которая зависит от усталостной прочности материала и напряженно-деформированного состояния при торможении. Очевидно, что при прочих равных условиях усталостная прочность барабана тем выше, чем ниже максимальные напряжения. Однако, слишком маленькие напряжения, а значит излишне большие запасы прочности, практически, не повышая долговечности, приводят к заметному увеличению металлоемкости.

На рис. 2 представлена твердотельная модель барабана исходной кон-



струкции. Если не учитывать отверстий для болтов, соединяющий барабан со ступицей, конструкция барабана является осесимметричной, однако, циклически симметричное приложение нагрузки не позволяет применить осесимметричную расчетную модель. Поэтому приходится ограничиться циклически симметричной схемой расчета с центральным углом секторного элемента равным  $90^\circ$ . Построение модели не вызывает, практически, никаких трудностей. Строится меридиональное сечение барабана. Затем пространственная модель создается путем вращения сечения вокруг оси на нужный угол. Некоторые затруднения возникают при задании нагрузки от тормозных колодок. Для того, чтобы впоследствии приложить силу нормального давления и силу трения, на внутренней цилиндрической поверхности барабана создается еще одна поверхность, площадь которой совпадает с половиной поверхности тормозной колодки, и затем этой поверхности приходится придать толщину. Достаточно ее “углубить” на 0,1 мм. Такое маленькое углубление не скажется впоследствии на результатах расчета, так как программа автоматической разбивки на конечные элементы его не “замечит”.

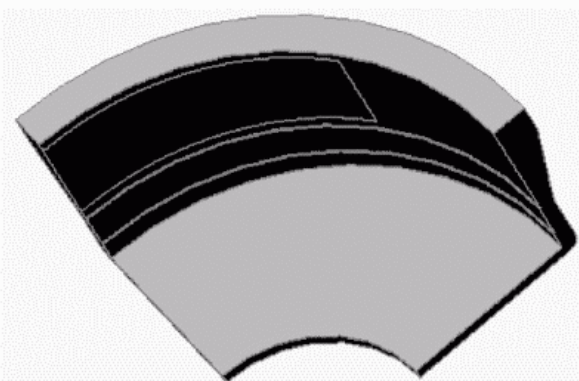


Рис. 2. Твёрдотельная модель барабана исходной конструкции.

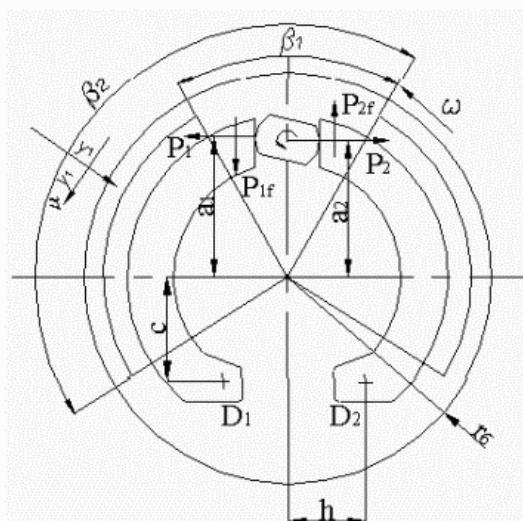


Рис. 3. Схема сил действующих на колодочный тормоз.

Такие искусственные построения потребовались из-за неполного согласования встраиваемой версии сопроцессора УПК COSMOS с системой SolidWork, о чем упоминалось выше.

Расчетные возможности встраиваемой версия УПК COSMOS по отношению к самостоятельному варианту ограничены количеством типов решаемых задач, конечных элементов, способами построения конечно-элементной сетки. Несмотря на это встроенная версия по своим оставшимся расчетным возможностям способна покрыть примерно 70% всех прочностных задач, которые встречаются при проектировании транспортных машин типа автомобилей и тракторов. При этом постановка и осмысление примерно

половины из них под силу инженеру-конструктору. Решение остальных более сложных задач при выборе расчетных схем и анализе результатов потребует, как правило, участия руководителей групп и инженеров-исследователей.

Вышеупомянутая версия способна решать 4 типа задач:

- теплопроводности;
- термоупругости;
- упругого силового деформирования;
- нахождение собственных частот.

Выбор типов конечных элементов тоже ограничен – треугольные квадратичные шестиузловые для плоских, пространственных пластинчатых, оболочечных деталей, и тетраэдральные квадратичные десятиузловые для объемных деталей машин.

Во всех вышеперечисленных задачах необходимо решить некоторую систему дифференциальных уравнений в частных производных. Метод конечных элементов позволяет представить вектор решения набором кусочнонепрерывных функций в каждом конечном элементе. После этого задача сводится к нахождению постоянных коэффициентов аппроксимирующих функций. Как правило, аппроксимирующие функции представляются полиномами невысокой степени, не выше третьей. Опыт расчетов, теоретические исследования показывают, что применение полиномов с линейной аппроксимацией перемещений дают недостаточную точность при определении напряжений. Поэтому не случайно в данном программном комплексе выбраны конечные элементы с квадратичной аппроксимацией, которая существенно повышает точность определения напряжений по сравнению с линейной. Кубическая аппроксимация перемещений в УПК практически не применяется. Повышение точности решения достигается, в основном, измельчением сетки и ее сгущением в зонах ожидаемых высоких градиентов напряжений.

Схема сил действующих на барабан представлена на рис. 3.

Величина нормального усилия от тормозной колодки составляла 66684,75 Н. Величина касательного усилия при коэффициенте трения 0,4 – 13336,95 Н. Удельные усилия вычисляются программой автоматически в зависимости от площадей поверхностей, на которых они действуют. Распределение усилий по поверхности предполагается равномерным. В качестве граничных условий принималось защемление внешней поверхности плоского днища. Внутренняя поверхность днища остается свободной, что несколько приближает этот тип граничных условий к реальному фланцевому соединению тормозного барабана со ступицей. Условиями периодичности в радиальных сечениях записывались в виде равенства нулю окружных перемещений.

В результате разбивки на конечные элементы барабана исходной конструкции было получено 31972 элементов, 8644 узлов, 168264 уравнений.

На рис. 4 показаны картины напряжений в исходной конструкции барабана. Видно, что максимальные напряжения не превышают 12,7 МПа. Предел выносливости чугуна не менее 35 МПа, т.е. имеем большой запас по усталостной прочности. Это свидетельствует о том, что имеются резервы снижения металлоемкости барабана. При этом можно пойти на увеличение максимальных напряжений, т.к. реальный запас прочности гораздо меньше допускаемого, который можно принять равным 1,5 [1]. Расчеты показывают, что пропорциональное уменьшение толщин резко увеличивает напряжения, поэтому необходимо более радикально изменить конструкцию, например, введением ребер жесткости. Естественно, эти изменения должны приводить к уменьшению металлоемкости. Нужно отметить следующее.

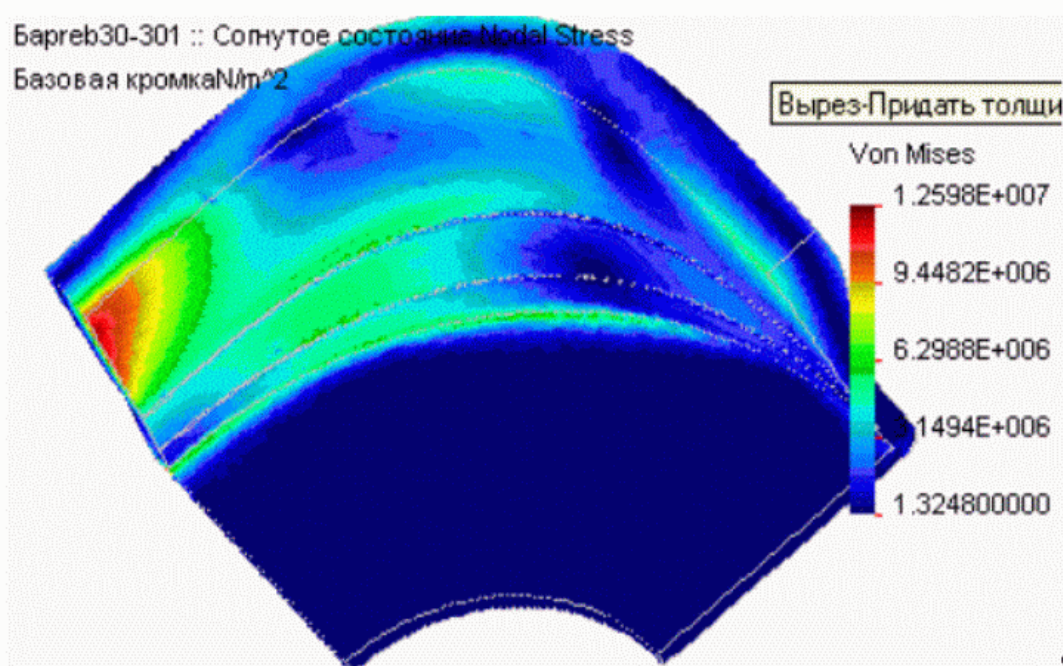


Рис. 4. Напряженно-деформированное состояние барабана исходной конструкции

С точки зрения прикладной теории оболочек и пластин конструкцию можно представить как цилиндрическую оболочку с плоским кольцевым днищем [2], [3]. Известно, что такое сочетание оболочек с пластинами при действии внутреннего давления может привести к большим изгибающим моментам в месте соединения пластины с оболочкой. Т.к. эти краевые моменты очень быстро затухают, то фактически они играют роль концентраторов напряжений, т.к. изгибные напряжения от краевых моментов могут в 10 раз превышать номинальные. Увеличение толщины сопрягаемых элементов приведет к падению напряжений, но за счет увеличения металлоемкости.

Но краевые изгибающие моменты можно снизить и без увеличения металлоемкости, за счет рационального подбора жесткостей сопрягаемых деталей.



Главная задача при этом уменьшить защемляющее действие пластины на цилиндрическую оболочку в месте сопряжения. В этом случае увеличение толщины сопрягаемых деталей будет даже вредно, особенно увеличение толщины пластинчатого элемента. Не случайно в некоторых конструкциях автомобильных тормозных барабанов днища выполнены из стали, толщиной 3–5 мм, а цилиндрическая часть чугуновой. Путем перебора нескольких вариантов удалось подобрать конструкцию с окружными ребрами, вес которой уменьшился на  $\approx 30\%$  от исходной, а толщина днища уменьшена на 2 мм. На рис. 5 представлено распределение напряжений в конструкции барабана с продольными и поперечными ребрами.

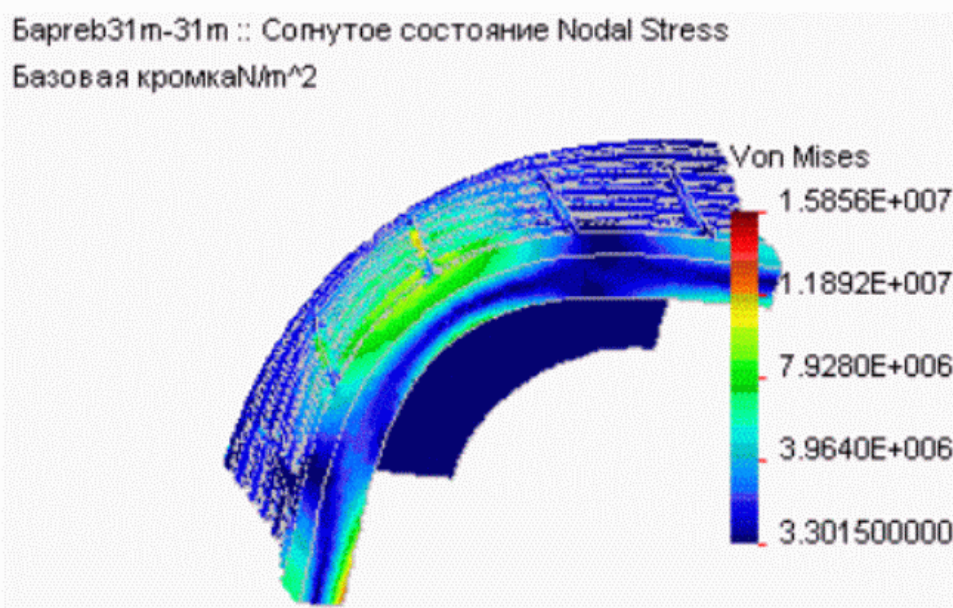


Рис. 5. Напряжения в конструкции с поперечными и продольными ребрами.

Если бы позволила технология, то толщину днища полезно было бы уменьшить не менее чем в два раза. Небольшое увеличение напряжений в оребренной конструкции до 162 МПа вполне допустимо. Была так же рассчитана конструкция, в которой к основным ребрам добавлены 20 продольных ребер, равномерно расположенных по окружности.

Однако, такая конструкция оказалась неэффективной, т.к. вес несколько увеличился, а напряжения практически не уменьшились. Этот процесс можно продолжать и далее, но уже сейчас видны какие большие возможности дает сочетание новых графических пакетов, программных средств для прочностных расчетов с экспериментальными исследованиями деталей и узлов. Окончательные результаты компьютерного проектирования сведены в таблице.

Конечно же, расчетные исследования никогда не смогут полностью заменить экспериментальные, однако количество исследуемых образцов можно существенно уменьшить и сэкономить значительные материальные ресурсы.

Стендовые и натурные испытания тормозных барабанов показали удовлетворительный уровень долговечности.

Результаты проектирования.

Наименование конструкции	Масса барабана, кг	Эквивалентные напряжения, МПа
номинальная	10,95	12,7
с окружными ребрами	7,73	16,2
с окружными и продольными ребрами	7,85	15,8

### Литература

1. Когаев В. П. , Махутов Н. А., Гусенков. А. П. Расчёты деталей машин и конструкций на прочность и долговечность: Справочник – М.: Машиностроение , 1985. – 224с. 2. Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. – Рига: Зинатне, 1988г. – 284с. 3. Образцов И.Ф., Савельев Л. М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летальных аппаратов. – М.; Высшая школа , 1985. – 392с.

Поступила в редколлегию 03.09.2001

УДК 621.165: 539.3

### ОСОБЕННОСТИ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ СВАРНЫХ РОТОРОВ

Е.В. Левченко, Н.Н. Гришин

ОАО “Турбоатом”, Харьков, Украина

Examined are stress-strain state and improvement of weld design strength of welded rotors for steam and gas turbines.

ОАО “Турбоатом” в цилиндрах низкого давления мощных паровых турбин применяет, как правило, дисковые роторы сварной конструкции [1-3]. Сварные роторы барабанного типа иногда применяются в цилиндрах высокого и среднего давлений паровых турбин АЭС [4] и компрессорах газовых турбин. Преимущества сварных роторов в сравнении с цельноковаными роторами и роторами с насадными дисками, опыт их конструирования, производства и эксплуатации рассмотрены в [5].

Конструкции сварных роторов, как показано на рис.1, включают кованые диски 1 с наружными 3 и внутренними 4 частями относительно перемычек 2. Диски соединены сварными швами 5 по перемычкам 2. В



сварных швах, как правило в их корне, при сварке образуются объективно неизбежные различного рода дефекты: непровары, зашлаковки, трещины. В настоящее время не существует неразрушающих методов контроля, позволяющих достоверно определять характер и, главное, точные размеры дефектов, как при изготовлении, так и в изготовленном роторе.

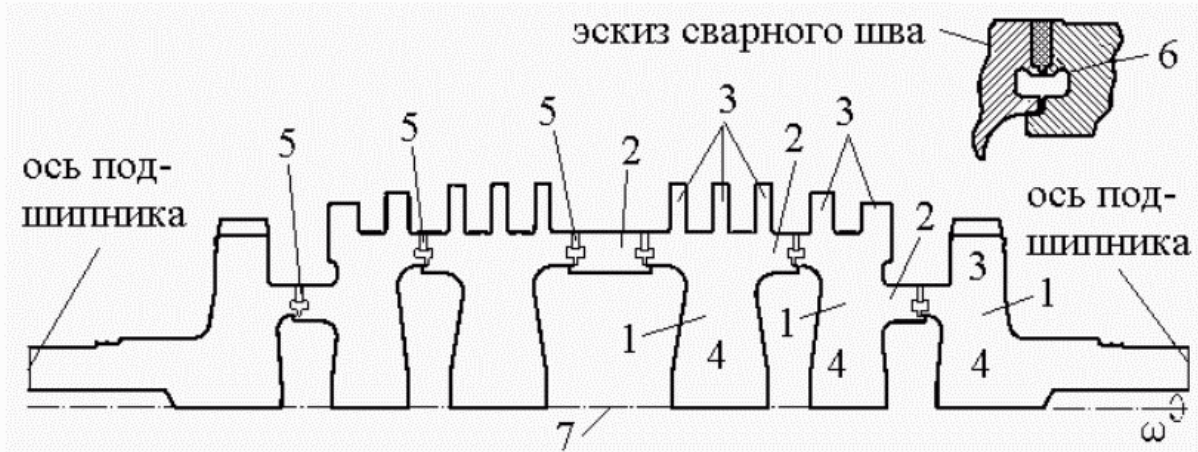


Рис.1. Сварной ротор паровой турбины. 1 - кованые диски; 2 - перемычки; 3 - наружные части дисков; 4 - внутренние части дисков; 5 - сварные швы; 6 "деконцентраторы" напряжений; 7 - ось вращения ротора.

Кроме дефектов сварки, в зоне корня сварного шва практически всегда выполняют различного вида проточки и выступы, которые являются конструктивными концентраторами напряжений.

В целях обеспечения высокой надежности сварных роторов при эксплуатации, на предприятии разрабатываются мероприятия по изменению технологии сварки, внедряются новые методы ультразвукового контроля и более совершенные конструкции роторов, вносятся изменения в зоны сварных швов перемычек.

Например, в зоне сварных швов с внутренней стороны перемычек выполняются кольцевые проточки – деконцентраторы 6 (рис.1) или применяют другие изменения, которые приводят к уменьшению осевых усилий в корне сварного шва [6,7]. Отметим, что деконцентраторы и изменения, упомянутые выше, только уменьшают или сводят к нулю осевые напряжения в корне сварного шва. Исследования и расчеты показали, что более эффективными являются такие изменения, которые не уменьшают осевые напряжения в корне шва, а регулируют характер напряженного состояния в этих зонах.

Суть таких изменений заключается в следующем. Как показал анализ, наиболее опасными являются сварные швы, в корне которых имеют место растягивающие осевые напряжения при изгибе перемычки от действия центробежных сил (ЦБС). При вращении ротора под действием ЦБС диски и

перемычки между дисками деформируются так, что их радиальные перемещения могут заметно различаться. Если, из-за различного напряженного состояния дисков и перемычек, радиальные перемещения концевых участков перемычек оказываются меньшими чем радиальные перемещения средних точек перемычек, т.е. диски сдерживают радиальные перемещения концов перемычек, то перемычки изгибаются, образуя выпуклость в радиальном направлении ротора. В средней части перемычки, где расположен сварной шов, на ее наружной поверхности возникают растягивающие осевые напряжения, а на внутренней, т.е. в корне сварного шва - сжимающие. Если же радиальные перемещения средних участков перемычки меньше перемещений концевых участков, что наблюдается для дисков с тяжелыми лопатками или при относительно малом диаметре перемычек, то изгиб перемычки происходит выпуклостью к оси турбины. В этих случаях на внутренней поверхности среднего сечения перемычки, т.е. в корне сварного шва, возникают растягивающие осевые напряжения.

При наличии в корне сварного шва дефектов или конструктивных проточек, выполняющих роль концентраторов напряжений, возможно зарождение и развитие кольцевых трещин, расположенных в плоскости перпендикулярной оси вращения ротора. Их развитие происходит под действием, на первый взгляд, достаточно малых по величине осевых растягивающих напряжений,  $\leq 45$  МПа, и знакопеременных напряжений с амплитудой,  $\approx 3,5$  МПа, при вращении ротора (коэффициент асимметрии цикла  $\gamma < 1$ ).

Методы, ведущие к снижению осевых напряжений от ЦБС в корне сварного шва, приводят к коэффициенту асимметрии цикла  $\gamma = -1$ . Более эффективны методы, которые приводят к преобразованию растягивающих осевых напряжений до вполне определенных величин, способствующих закрытию дефектов за счет сжатия. В этом случае коэффициент асимметрии  $\gamma > 1$ .

Очевидным, но не всегда конструктивно применимым, является метод размещения дополнительных дискретных масс в зоне сварных швов, подгружающих середину перемычки.

Более эффективным по простоте исполнения и достижению необходимых результатов является метод асимметричного расположения верхней части диска относительно внутренней, как показано на рис. 2. При этом, ось симметрии 6 наружной части 3 диска 1 оказывается смещенной относительно оси симметрии 7 внутренней части 4 того же диска 1 в сторону перемычки 2, в корне сварного шва 5 которой требуется преобразовать уровень растягивающих напряжений. Напряженное состояние перемычек 2 и характер осевых напряжений в корне сварного шва определяют расчетным путем, например, МКЭ, экспериментальным путем или другими известными методами. Величину асимметрии “e” выбирают расчетным путем по условию

создания в корне сварных швов 5, во вращающемся роторе, сжимающих напряжений заданной величины. Опыт использования такого подхода показал, что для этого можно принять  $e \approx 5-30$  мм.

При вращении вокруг оси  $z$  (рис.2) сварного ротора с асимметричным расположением наружной 3 и внутренней 4 частей дисков 1, от ЦБС возникают изгибающие моменты  $M$  в плоскости оси вращения ротора из-за различных радиальных перемещений  $U_r^B$  и  $U_r^A$  сторон А и В наружной части 3 диска 1.

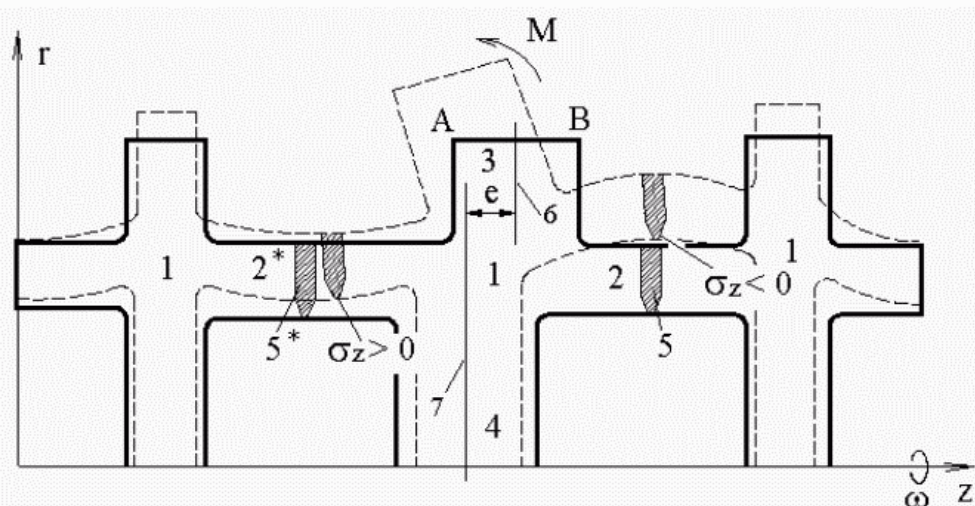


Рис.2. Схема деформации ротора при вращении.

Это происходит за счет того, что сторона А наружной части 3, как бы поддерживается внутренней частью 4 диска 1, а сторона В нависает над этой внутренней частью диска 4, т.е. свободна в радиальном направлении  $r$ . При вращении ротора сторона В в радиальном направлении  $r$  имеет большие перемещения от действия ЦБС, чем сторона А ( $U_r^B > U_r^A$ ) и наружная часть 3 диска 1 поворачивается, изгибая перемычки 2 и 2\*, как показано схематично пунктирной линией на рис.2. При этом перемычка 2 со сварным швом 5 изгибается выпуклостью от оси вращения ротора, т.е. на ее внутренней стороне в районе корня сварного шва 5 возникают сжимающие осевые напряжения  $\sigma_z < 0$  (внутренние волокна перемычки 2 сжимаются).

Сжимающие напряжения порядка 13...30 МПа, превышающие по абсолютной величине знакопеременные напряжения от весовых нагрузок равные, как правило, 3...20 МПа, не позволяют "раскрываться" и подрастать возможным дефектам в корне сварных швов, т.е. необходимо стремиться получить коэффициент асимметрии  $\gamma \approx 1,6...7$  ( $\sigma_{\min} \approx -7...-60$  МПа,  $\sigma_{\max} \approx -1...-20$  МПа).

В сварном роторе барабанного типа положительный эффект – преоб-

разование осевых растягивающих напряжений в корне сварных швов в сжимающие, достигается выполнением внутренней расточки в зоне пере-мычки со сварным швом и ближайших участков крепления рабочих лопаток большего размера, чем диаметр соседних перемычек.

В настоящее время ОАО "Турбоатом" переходит к вертикальной сварке роторов быстроходных турбин, что значительно улучшает качество сварных швов, поскольку исключаются знакопеременные напряжения изгиба при вращении ротора во время сварки.

Внедрение в производство и проектные разработки всех рассмотренных выше рекомендаций и мероприятий, практически исключили повреждения сварных швов, что подтверждается опытом длительной эксплуатации сварных роторов, изготовленных с учетом упомянутых мероприятий.

### **Литература**

**1.** Прочность паровых турбин/ Под ред. Л.А.Шубенко-Шубина. - М., Машиностроение, 1973. - 456с. **2.** Паровая турбина К-160-130 ХТГЗ/ Под ред. С.П.Соболева. - М., Энергия, 1980. - 192с. **3.** Паровая турбина К-500-240 / Под ред. В.Н.Саввина. - М., Энергоатомиздат, 1984. - 264с. **4.** Паротурбинные установки атомных электростанций/ Под ред. Ю.Ф.Косяка. - М., Энергия, 1978. - 312с. **5.** Левченко Е.В., Гришин Н.Н., Аркадьев Б.А., Сухинин В.П. Сварные роторы турбоагрегатов (опыт создания и эксплуатации). Теплоэнергетика. 1998, №1. - с.40-43. **6.** Заявка №1396965, Великобритания. Сварной ротор. Публикация 1975г. **7.** Заявка №1396966, Великобритания. Составные части сварного ротора. Публикация 1975г.

Поступила в редколлегию 03.09.2001

УДК 539.3

### **КОМБИНИРОВАННОЕ АВТОФРЕТИРОВАНИЕ ТОЛСТОСТЕННЫХ ЦИЛИНДРОВ**

Г.И.Львов, С.В.Лысенко

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The autofrettage of thick-walled cylinders of a variable thickness is considered on the basis of variational statement of the contact task elastic-plastic deformation and unloading. The numerical realization is carried out by a finite element method in a package ANSYS. The model of a material takes into account kinematic hardening and ideal effect Baushinger. The optimum geometric parameters of bandage and initial free clearance are defined, at which the favorable distribution of residual stresses will be derivated and the bandage after a full unloading is removed.

Толстостенные цилиндры, работающие при высоких статических импульсных давлениях, являются распространенными элементами многих ответственных конструкций. В тех случаях, когда величина давления соизмерима с пределом прочности материала, повышение несущей способности может быть достигнуто специальными приемами автофретирования. В результате целенаправленного пластического деформирования внутренним давлением в цилиндрах развивается благоприятное поле остаточных напряжений.

Закономерности формирования остаточных напряжений изучены для широкого класса материалов с различным характером диаграмм деформирования [1-3].

Величина остаточных напряжений зависит от размеров области пластического деформирования и различия в характере распределения напряжений в пластическом и упругом состояниях.

Возможности автофретирования часто ограничиваются прочностью цилиндров в процессе пластического нагружения. Такое ограничение особенно существенно для цилиндров с различной толщиной стенок, так как создание неравномерного технологического давления при автофретировании связано со значительными техническими трудностями.

Для повышения эффективности автофретирования цилиндров переменной толщины целесообразно применять технологические бандажи для ограничения деформаций цилиндров в областях с меньшей толщиной стенок.

Схема комбинированного автофретирования равномерным давлением с одним ограничительным бандажом показана на рис.1.

Теоретический анализ такого процесса автофретирования сводится к решению упругопластической задачи нагружения и разгрузки с учетом контактного взаимодействия цилиндра с технологическим бандажом.

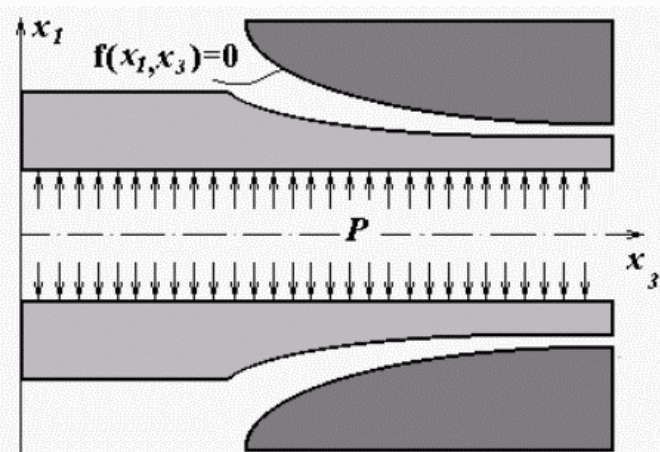


Рис. 1. Схема комбинированного автофретирования

Рассмотрим такую задачу для случая осесимметричного деформирования двух тел вращения. В процессе нагружения и разгрузки приращения напряжений деформируемых тел должны удовлетворять уравнениям равновесия.



$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1}(d\sigma_{11}) + \frac{\partial}{\partial x_3}(d\sigma_{31}) + \frac{d\sigma_{11} - d\sigma_{22}}{x_1} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3}(d\sigma_{33}) + \frac{\partial}{\partial x_1}(d\sigma_{31}) + \frac{1}{x_1}d\sigma_{13} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

Поверхность  $S$  каждого тела можно представить в виде суммы  $S = S_F \cup S_K$ , где  $S_F$  - часть, на которой заданы приращения внешних сил, а  $S_K$  - поверхность контакта между цилиндрами и бандажом.

Представим уравнение внешней поверхности цилиндра параметрическими уравнениями  $x_1 = x_1(\alpha)$ ,  $x_3 = x_3(\alpha)$ , где  $\alpha$  - длина дуги меридиана в исходном состоянии.

Внутренняя поверхность бандажа, с которой возможен контакт, задается неявным уравнением  $f(x_1, x_3) = 0$ . Кинематическое условие взаимодействия накладывает на приращения перемещений цилиндра  $dU_C$  и бандажа  $dU_B$  ограничение в виде неравенства

$$f(x_1, x_3) + \text{grad } f \cdot (U_C + dU_C) - \text{grad } f \cdot (U_B + dU_B) \leq 0. \quad (2)$$

В области контакта условие (2) выполняется со знаком равенства.

Приращения деформаций связаны с приращениями перемещений линейными соотношениями

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11} &= \frac{\partial}{\partial x_1}(du_1); & d\varepsilon_{22} &= \frac{1}{x_1}(du_1); \\ d\varepsilon_{33} &= \frac{\partial}{\partial x_3}(du_3); & d\varepsilon_{13} &= \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}(du_3) + \frac{\partial}{\partial x_3}(du_1) \right] \end{aligned} \quad (3)$$

Траектории деформирования в процессах автофретирования имеют сложный характер. При разгрузке возможно появление вторичных пластических деформаций обратного знака. В условиях контактного взаимодействия процесс нагружения не будет простым даже при монотонном возрастании внешней нагрузки.

Для адекватного описания процесса развития пластических деформаций необходимо привлекать физические соотношения, отражающие направленный характер упрочнения и эффект Баушингера. В качестве физических соотношений, удовлетворяющих сформулированным условиям при одном цикле нагружения и разгрузки, выбрана теория пластического течения с трансляционным упрочнением [4,5]. Приращения пластических деформаций при активном нагружении определяются законом течения

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

ассоциированного с поверхностью пластичности

$$\varphi = \frac{3}{2}(S_{ij} - \rho_{ij}) \cdot (S_{ij} - \rho_{ij}) - \sigma_T^2 = 0, \quad (5)$$

где  $S_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_0$  - девиатор напряжений,  $\sigma_T$  - предел текучести в исходном состоянии. Направленность упрочнения отражается девиатором  $\rho_{ij}$ , зависящим от накопленных пластических деформаций:

$$\rho_{ij} = \int C \cdot d\varepsilon_{ij}^p, \quad (6)$$

где интеграл берется по пути нагружения. Если  $C$  – постоянная величина, то упрочнение является линейным. Полилинейный закон упрочнения соответствует дискретному набору значений  $C_k(\varepsilon^p)$ .

Положение поверхности пластичности определяется всей историей пластического деформирования, но упрочнение является трансляционным, что соответствует идеальному эффекту Баушингера.

Приращение пластических деформаций выражаются через приращения напряжений

$$d\varepsilon_{ij} = \frac{(S_{mn} - \rho_{mn}) \cdot d\sigma_{mn}}{3 \cdot C \cdot (S_{kl} - \rho_{kl}) \cdot (S_{kl} - \rho_{kl})} (S_{ij} - \rho_{kl}). \quad (7)$$

Если условия активного нагружения не выполняются, то приращения пластических деформаций принимаются равными нулю.

На каждом этапе процесса автофретирования определение приращений всех компонентов напряженно-деформированного состояния сводится к интегрированию краевой задачи для уравнений (1), (3), (7) с краевыми условиями и кинематическими ограничениями контактного взаимодействия (2).

Нелинейность этой задачи обусловлена тем, что в ходе решения необходимо определить границы области контакта и устанавливать характер нагружения во всем объеме цилиндра.

Для численного решения поставленной задачи методом конечных элементов она приводится к экстремальной проблеме для функционала, определенного на кинематически допустимых приращениях перемещений, удовлетворяющих неравенству (2):

$$\min J(dU_C, dU_B) = \frac{1}{2} \iiint_{V_C + V_B} d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} dV - \iint_{S_F} dU_C dp dS. \quad (8)$$

Соответствие экстремальной проблемы (8) поставленной контактной задаче устанавливается методами теории вариационных неравенств [6,7].

Численное решение выполнено МКЭ в пакете ANSYS для осесимметричного автофретирования ступенчатого цилиндра с использованием бандажа цилиндрической формы. Исходные геометрические параметры конструкции имели следующие значения (см. рис.2): внутренний радиус цилиндра  $R_1 = 0,06$  м; внешний малый радиус цилиндра  $R_2 = 0,092$  м; внешний большой радиус цилиндра  $R_3 = 0,138$  м; внутренний радиус бандажа  $R_{b1} = 0,093$  м;

внешний радиус бандажа  $R_{b2} = 0,16$  м; длина цилиндра  $L = 0,525$  м; длина бандажа  $L_b = 0,247$  м; начальный свободный зазор между поверхностями цилиндра и бандажа  $\delta = 0,001$  м. Для построения конечно-элементной модели составной конструкции использовался осесимметричный элемент PLANE42 с четырьмя узлами и двумя степенями свободы ( $U_{x1}, U_{x3}$ ) в каждом из них. Координата  $x_3$  соответствует оси вращения, а координата  $x_1$  связана с радиальным направлением моделируемой трубы. Для моделирования контактного взаимодействия между поверхностями цилиндра и бандажа, которые в исходном ненагруженном состоянии разделены свободным зазором  $\delta$ , использовались осесимметричные трехузловые контактные элементы CONTACT48 типа “узел к поверхности”. При помощи псевдоэлементной техники образованы контактные поверхности, которые могут взаимодействовать в процессе упругопластического деформирования и разгрузки. На рис.2 представлена конечно-элементная модель, которая включает 2058 элементов PLANE42 (соответственно 1538 для цилиндра и 480 для бандажа), а также 38 контактных элементов CONTACT48 между поверхностями цилиндра и бандажа.

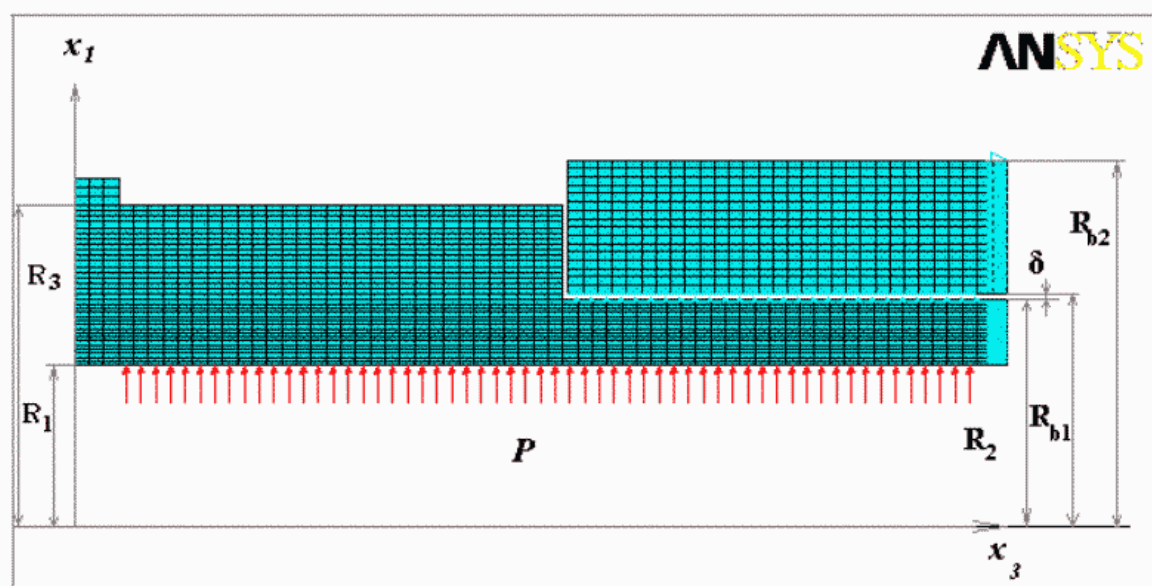


Рис.2. Конечно-элементная модель составной конструкции

Технологический процесс автофретирования производится внутренним гидравлическим давлением по всей поверхности трубы за исключением крайних кольцевых поверхностей шириной 0.025 м, где обычно монтируются пробки, несущие обтюрирующие замки. Если они соединяются между собой при помощи центрального стержня, то автофретирование осуществляется без продольного растяжения. В этом случае наиболее близко реальным условиям закрепления цилиндра соответствуют свободные края.

Для выполнения численных расчетов были приняты следующие характеристики материала цилиндра и бандажа: модуль упругости

$E = 0.21 \cdot 10^6$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,29$ ; предел текучести  $\sigma_T = 1200$  МПа; предел прочности  $\sigma_B = 1500$  МПа. Диаграмма деформирования  $\sigma(\varepsilon)$  задавалась полилинейной кривой (опция MKIN).

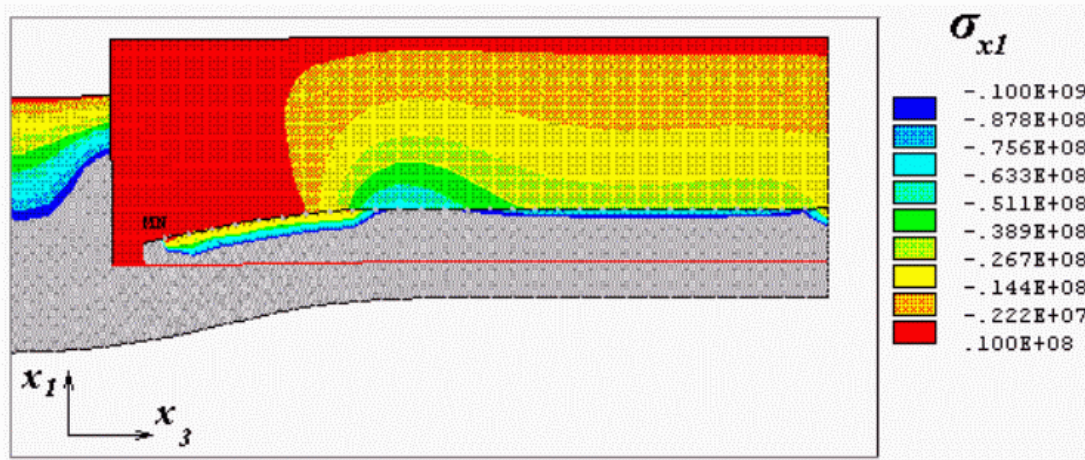


Рис.3. Распределение радиальных напряжений

Для решения физически и конструктивно нелинейной задачи применялось пошаговое нагружение цилиндрической трубы давлением автофретирования в интерактивном режиме (опция Singleframe Restart) с автоматической корректировкой подшагов нагружения. Причем, предполагалось, что на каждом подшаге нагрузка изменяется по линейному закону. Такая техника решения нелинейной задачи обеспечивает быструю сходимость метода Ньютона-Рафсона (от 3 до 10 итераций) и позволяет отразить историю нагружения.

При комбинированном автофретировании цилиндров с использованием вспомогательных бандажей одной из главных задач является определение оптимальных значений начального зазора и геометрических параметров бандажа. При большом значении зазора  $\delta > 0,002$  м на участке цилиндра с меньшей толщиной ( $h = 0,032$  м) развиваются опасные остаточные пластические деформации до 10 %. В этом случае бандаж не выполняет свою функцию ограничителя деформаций. Если исходный зазор слишком мал ( $\delta < 0,0007$  м), то остаточные пластические деформации цилиндра препятствуют полной разгрузке в бандаже, в результате чего создается остаточный натяг. Тогда бандаж не может быть снят с цилиндра. Более того, величина начального зазора должна гарантировать освобождение поверхностей цилиндра и бандажа после разгрузки с учетом допуска на посадку  $\beta = (0,022 \div 0,052)$  мм. Увеличивая внешний радиус бандажа до  $R_{b2} = 0,192$  м, можно незначительно перераспределить напряжения на контактирующих поверхностях (становится больше скачок окружных напряжений) и тем самым повлиять на благоприятное соотношение остаточных радиальных перемещений на этих же поверхностях после разгрузки. Однако



численные эксперименты показали, что значительное увеличение толщины бандажа  $h > 0,1$  м неэффективно. В результате многократного варьирования данных геометрических параметров установлены их рациональные значения:  $\delta = 0,001$  м,  $R_{b1} = 0,093$  м,  $R_{b2} = 0,16$  м, при которых достигается благоприятный результат автофретирования. Ниже приведены результаты расчета технологического процесса только для рациональных значений параметров.

В интерактивном режиме расчета автофретирования зафиксированы 7 состояний нагружения конструкции от начального значения давления  $P = 500$  МПа до максимального значения  $P = 950$  МПа.

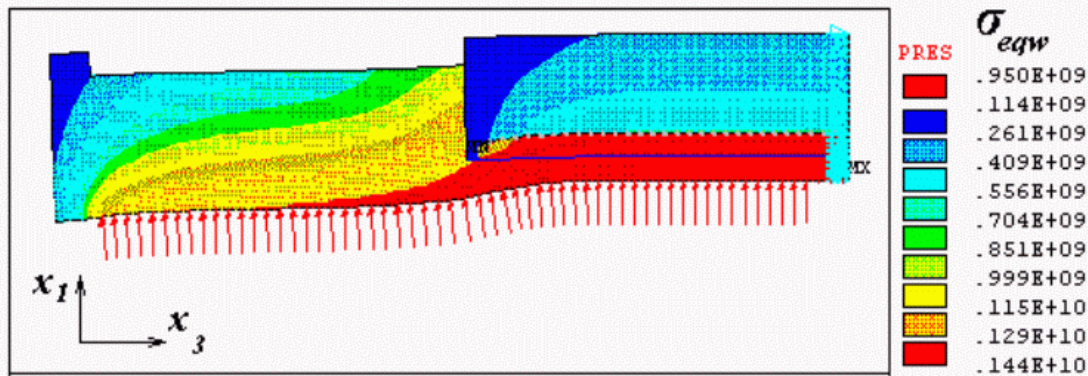


Рис. 4. Распределение эквивалентных напряжений при  $P = 950$  МПа

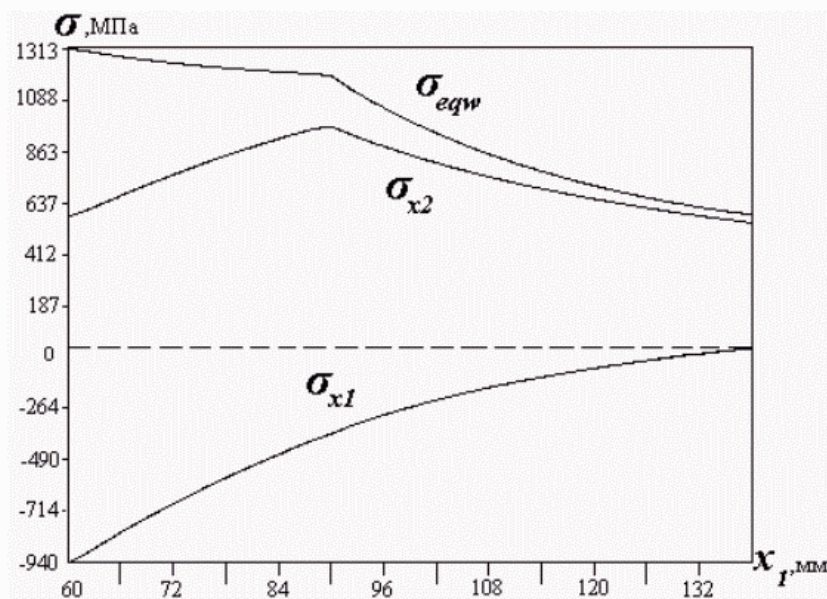


Рис.5. Распределение напряжений в 1-ом радиальном сечении

При начальной нагрузке образуются незначительные зоны пластических деформаций на втором участке цилиндра, но поверхности цилиндра и бандажа еще не контактируют. Зоны контакта возникают при нагрузке  $P = 650$  МПа. На рис.3. показана зона контактного взаимодействия при давлении  $P = 700$  МПа, которая охватывает 21 узел. Этот факт наглядно



иллюстрируется по характеру распределения радиальных напряжений  $\sigma_{x1}$ , которые через зону контакта плавно распространяются по телу бандажа.

Окончательное распределение эквивалентных напряжений по Мизесу  $\sigma_{eqw}$  по всей составной конструкции при максимальной нагрузке  $P = 950$  МПа представлено на рис. 4. По линиям уровня напряжений, которые достигают предела текучести материала  $\sigma_T = 1200$  МПа видно, что второй участок цилиндра полностью перешел в пластическое состояние, в то время как на первом участке они составляют менее 50%. Так как характер распределения напряжений на этих участках существенно отличается, то целесообразно исследовать закономерности изменения напряжений по толщине в двух специфичных радиальных сечениях: 1)  $x_3 = 0,15$  м ; 2)  $x_3 = 0,4$  м.

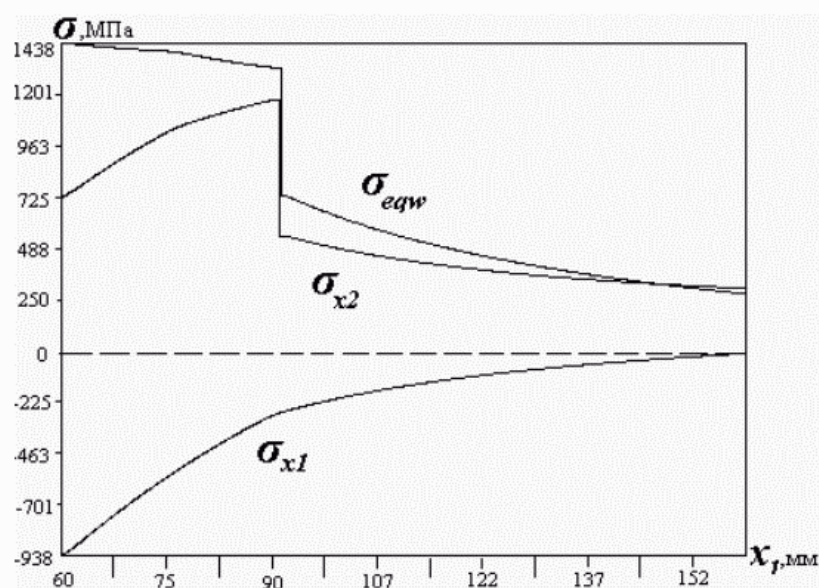


Рис.6. Распределение напряжений во 2-ом радиальном сечении

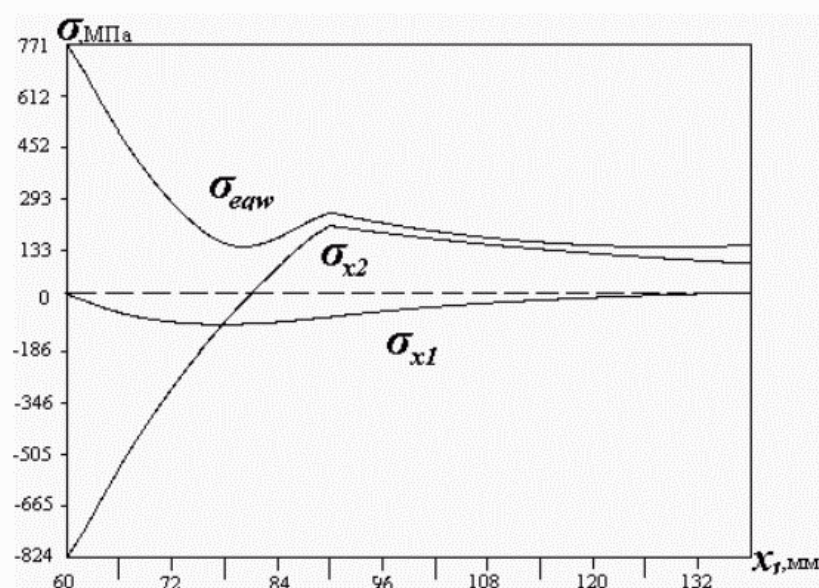


Рис.7. Распределение напряжений в 1-ом сечении при  $P = 0$ .

На рис. 5 приведено распределение эквивалентных  $\sigma_{eqw}$ , окружных  $\sigma_{x2}$  и радиальных  $\sigma_{x1}$  напряжений в первом сечении при максимальной нагрузке  $P = 950$  МПа. Эти же напряжения даны во втором сечении, которое проходит через цилиндр и бандаж (рис.6). Если окружные напряжения на границе раздела тел терпят разрыв, то радиальные непрерывны по всей толщине контактирующих тел.

На последнем шаге нагрузка была полностью снята. На рис.7 приведено распределение остаточных напряжений в первом радиальном сечении. Максимальное окружное напряжение на внутренней поверхности цилиндра  $\sigma_{x2} = -824,5$  МПа. Во втором сечении (рис.8) характер распределения напряжений существенно отличается, но сжимающие окружные напряжения на внутренней поверхности примерно тоже порядка, а именно  $\sigma_{x2} = -642$  МПа.

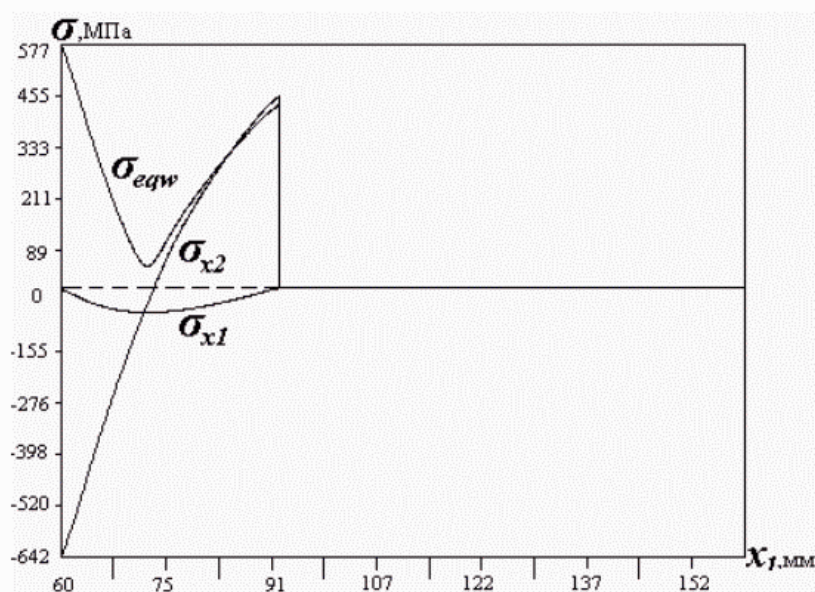


Рис. 8. Распределение напряжений во 2-ом сечении при  $P = 0$ .

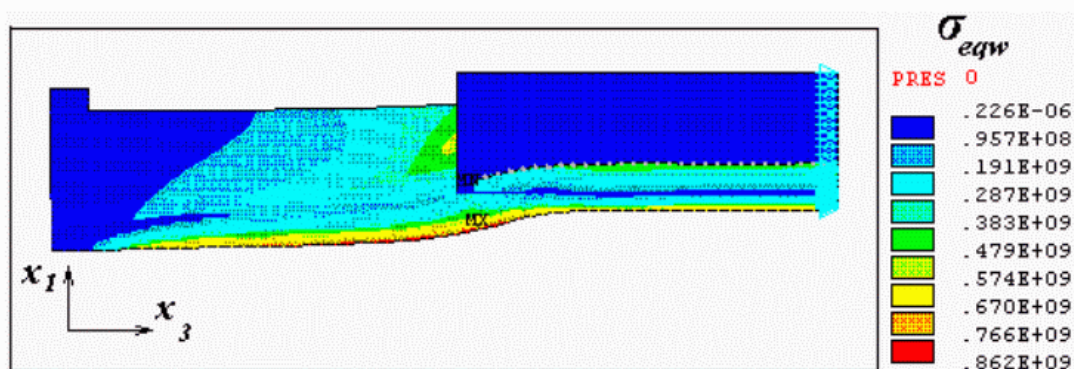


Рис. 9. Распределение эквивалентных напряжений при  $P = 0$ .

Распределение эквивалентных остаточных напряжений по всей конструкции показано на рис.9. Бандаж полностью разгружен, а остаточные радиальные перемещения узла внешней контактной поверхности трубы во втором сечении

меньше начального зазора:  $U_{Xl} = 0,938$  мм. Тогда фактический зазор после разгрузки  $\delta = 0,062$  мм, что превосходит допускаемую посадку  $\beta$ , и бандаж можно снять с цилиндра.

Предложенный метод расчета позволяет определить рациональные параметры комбинированного автофреттирования, при которых достигаются достаточно равномерные поля остаточных напряжений на внутренней поверхности цилиндра.

### **Литература**

**1.** Биргер И.А. Остаточные напряжения, М., 1963. – 230 с. **2.** Perl M., Aroné R. Stress Intensity Factors for a Radially Multicracked Partially-Autofrettagged Pressurized Thick-Walled Cylinder, Trans. of the ASME, J. of Pressure Vessel Technology, 110, 1988, pp. 147 – 154. **3.** Schindler H.J. Determination and Evaluation of Residual Stresses in Thick-Walled Cylinders due to Auto-Frettagage, Proc. of the 6th Int. Conf. on Residual Stresses, Oxford, U.K., July 10-12, 2000, Vol. 2, 837-844. **4.** Baltov A., Sawczuk A. A rule of anisotropic hardening. – Acta mechanica, 1965, № 1, p.81-92. **5.** Кадашевич Ю.И., Новожилов В.В. Теория пластичности, учитывающая остаточные микронапряжения. – Прикладная математика и механика, 1958, т. XXII, вып.1, с. 78-89. **6.** Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980. - 382 с. **7.** Львов Г.И. Вариационная постановка контактной задачи для линейно-упругих и физически нелинейных пологих оболочек. Прикладная математика и механика. М., 1982, т. 46, № 5, с. 841-846.

Поступила в редколлегию 24.09.2001

УДК 625.282:625.032.07

## **О ВЛИЯНИИ ХАРАКТЕРИСТИК СВЯЗЕЙ ТЕЛЕЖКИ С КУЗОВОМ НА ДИНАМИЧЕСКИЕ И ЭКСПЛУАТАЦИОННЫЕ ПОКАЗАТЕЛИ ТЕПЛОВОЗА**

В.Г. Маслиев

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

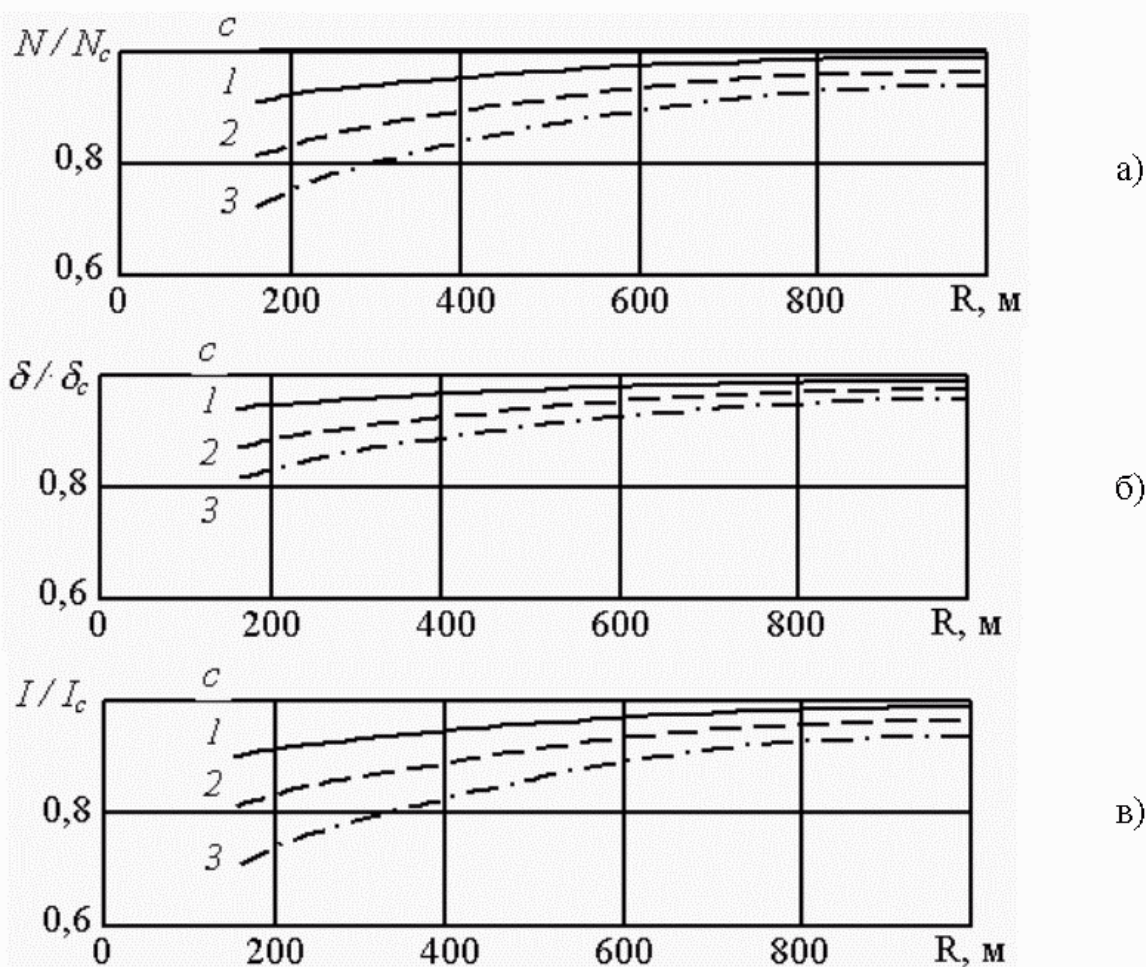
Методом математичного моделювання досліджено вплив характеристик зв'язків кузова тепловозу з рамою візка на ресурс бандажів. Показано доцільність довертання візку у напрямку кривої ділянки шляху, якщо вона є малого радіуса, бо це дещо знижує знос гребнів коліс.

С целью увеличения ресурса бандажей колес тепловоза, предлагается усовершенствовать систему связей кузова с тележкой, путем уменьшения или изменения знака на обратный у момента сопротивления ее повороту.



Методом математического моделирования с использованием ЭВМ типа IBM ES/9000 MOD 421 проведено исследование динамики установившегося движения тепловоза типа 2ТЭ116 по круговому участку рельсового пути [1]. В модели детально представлены характеристики связей кузова с тележкой в виде роликовых опор, описание которых приведено в [2]. Особенность этих опор состоит в возможности реализации различной величины и знака момента, приложенного от кузова к тележке: положительного, который обеспечивает центровку тележки в прямых участках пути, а также нулевого или отрицательного, т.е. поворачивающего тележку внутрь кривой. Такой “активный” момент должен улучшить вписывание тележки в кривую, т.е. уменьшить направляющие силы, углы набегания и скорости скольжения гребней колес, что приведет к увеличению ресурса бандажей вследствие уменьшения износа гребней.

Зависимости упомянутых показателей от радиуса кривой и величины момента приведены на рисунке.



Зависимости направляющих сил (а), углов набегания гребня направляющей колесной пары (б) и показателя износа гребня (в) – от радиуса кривой; момент, действующий на тележку: с – (1250 Нм); 1 – (0 Нм); 2 – (-1250 Нм); 3 – (-3000 Нм); с – серийный тепловоз.

Анализ показывает, что снижение величины момента до нуля уменьшает износ гребней в сравнении с серийным тепловозом на 6...8%, а введение такого же по модулю “активного” момента способствует дальнейшему снижению показателей динамики и износа гребней – до 12% в кривых радиусом 350 м. Аналогичная картина наблюдается и на второй колесной паре тележки. При дальнейшем увеличении “активного” момента появляется устойчивый контакт у гребня третьей колесной пары с наружным рельсом, поскольку тележка занимает хордовое положение и появляется его износ. При выходе тепловоза из кривой “активный” момент препятствует повороту тележки, что делает необходимым его ограничение по величине.

Отсюда можно сделать следующие выводы:

- уменьшение момента сопротивления повороту тележки или введение “активного” момента, действующего между кузовом и тележкой в направлении кривой, в целом улучшают динамические показатели тепловоза, что способствует некоторому увеличению ресурса бандажей по износу гребней колес;

- величина “активного” момента ограничена по условиям выхода тепловоза из кривых участков пути, а также по износу гребня у третьей колесной пары.

## **Литература**

1. Маслиев В.Г., Калинина С.А., Якунин Д.И. Базовая математическая модель горизонтальной динамики локомотива // Новые решения в современных технологиях: Вісник Харківського державного політехнічного університету. Збірка наукових праць. Випуск 118.- Харків: ХДПУ, 2000.- С.17 – 20. 2. А.С.1071495 СССР, МКИ В 61 F 5/02; В 61 F 5/16. Роликовая опора кузова локомотива / В.Г.Маслиев, Э.П.Елбаев, Ю.П.Рыжков, А.В.Клименко; (СССР).- 2с. ил.; Оpubл.07.02.84, Бюл. № 5.

Поступила в редколлегию 24.09.2001

УДК 517.944

## **ПРЕОБРАЗОВАНИЕ НЕЗАВИСИМЫХ ПЕРЕМЕННЫХ ПО ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОМУ РЕШЕНИЮ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДВУХ УРАВНЕНИЙ**

В.И.Мельник

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

В роботі розглядається модифікація відомого із теорії гіперболічних систем методу перетворення незалежних змінних по розв'язкові. В запропонованому варіанті, стосовно систем двох рівнянь гарантується перехід на сітку характеристик.



## Введение

Актуальность проблемы дальнейшего изучения квазилинейных гиперболических систем уравнений диктуется их широким прикладным значением. Они нашли применение в газовой динамике [1]. На них базируются теории пластичности [2] и предельного равновесия [3] различных сред, например, сыпучих и вязных. Известны и другие их приложения [4]. Ограничимся рассмотрением системы двух квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка, приводимой к виду

$$\frac{\partial u}{\partial x} + A \frac{\partial u}{\partial y} = b, \quad (x, y) \in D \subset \mathbf{R}^2, \quad (1)$$

где: область  $D$  — односвязная;  $u: D \rightarrow \mathbf{R}^2$  — искомая функция;  $b = (b_i(x, y, u))_{i=1}^2$  — вектор-столбец;  $A = (a_{ij}(x, y, u))_{i,j=1}^2$ .

Пусть  $l^i(x, y, u)$ ,  $i = 1, 2$  — левые собственные векторы матрицы  $A$ , соответствующие собственным значениям  $\xi_i(x, y, u)$ , т.е.  $l^i A = \xi_i l^i$ .

**Определение 1.** Система квазилинейных уравнений (1) называется гиперболической в области  $D$ , если для всех  $(x, y) \in D$ : во-первых, все собственные значения  $\xi_i(x, y, u)$ ,  $i = 1, 2$  матрицы  $A = A(x, y, u)$  вещественны; во-вторых, существуют линейно независимые нормированные левые собственные векторы  $l^i(x, y, u)$ ,  $i = 1, 2$  [1, 4, 5].

**Определение 2.** Система (1) называется гиперболической в узком смысле в области  $D$ , если для всех  $(x, y) \in D$  выполняются условия определения 1, а собственные значения  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  матрицы  $A$  различны [1].

Если для системы (1) условие гиперболичности соблюдается, то путем известных преобразований она приводится к нормальной форме [5]:

$$l^i \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \xi_i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = l^i b, \quad i = 1, 2. \quad (2)$$

**Определение 3.** Под характеристическими направлениями системы (1) условимся понимать определенные уравнениями

$$\frac{dy}{dx} = \xi_i(x, y, u), \quad i = 1, 2. \quad (3)$$

направления дифференцирования функции  $u(x, y)$  в равенствах (2) [1].

**Определение 4.** Первые интегралы дифференциальных уравнений характеристик (3) определяют два однопараметрических семейства характеристических кривых (характеристик) с параметрами  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , соответствующими собственным числам  $\xi_i$  матрицы коэффициентов  $A$  [3].

В случае, когда два семейства характеристик используют как семейства координатных кривых, предполагают замену  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$ , где

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ . В таком случае (3) дает [2,3]

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_j} = \xi_i \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \quad i, j = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (4)$$

Обозначив  $U(\lambda) = u(x(\lambda), y(\lambda))$  система (2) приводится к виду [5]

$$l^j \frac{\partial U}{\partial \lambda_j} = l^i b \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \quad i = 1, 2, \quad i \neq j. \quad (5)$$

**Определение 5.** Уравнения системы (5), выполняющиеся вдоль характеристик  $\lambda_j = \text{const}$  и, являющиеся следствиями уравнений исходной системы (1), условимся называть соотношениями на характеристиках.

Для некоторых конкретных систем рассматриваемого класса соотношения на характеристиках (5) удастся интегрировать [2,3].

### 1. Постановка задачи

Как показано выше, переход от исходной системы (1) к (4) и (5) предусматривает неявную замену переменных, при которой функциональные зависимости  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$  остаются неизвестными. Предложим явную замену переменных, когда связь между старыми координатами  $x$ ,  $y$  и новыми (параметрами характеристик)  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , изначально представляется в аналитическом виде. Такую задачу ставим в предположении, что ее решение послужит дальнейшему развитию общей теории гиперболических систем.

**Замечание.** Переход от  $(x, y)$  к  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , в процессе которого система (2) преобразуется в систему (5), возможен в случае, если такая замена переменных является невырожденной, т.е. когда

$$\frac{D(x, y)}{D(\lambda_1, \lambda_2)} = \det \begin{vmatrix} \partial x / \partial \lambda_1 & \partial x / \partial \lambda_2 \\ \partial y / \partial \lambda_1 & \partial y / \partial \lambda_2 \end{vmatrix} \neq 0. \quad (6)$$

В известном случае частные производные  $\partial / \partial \lambda_j x$ , и  $\partial / \partial \lambda_j y$ ,  $j = 1, 2$ , равно, как и якобиан (6), остаются неизвестными.

Заметим, что настоящая работа не первая [2,3] попытка решения такой задачи. Первым, применительно к математической теории пластичности, обозначил эту задачу, Христианович [5] в 1936 году.

### 2. Замена переменных

Из газовой динамики известно преобразование координат (независимых переменных) по решению [1], когда новые координаты записывают в виде выражений для полных дифференциалов. Этот метод предусматривает введение четырех новых неизвестных функций  $\eta_i = \eta_i(\lambda, U)$ ,  $\theta_i = \theta_i(\lambda, U)$ ,  $i = 1, 2$ , таких, что

$$\{ dy = \eta_1 d\lambda_1 + \theta_1 d\lambda_2; \quad dx = \eta_2 d\lambda_1 + \theta_2 d\lambda_2. \quad (7)$$

Законность замены (7) предполагает выполнение двух условий [1]:

$$\Delta = \eta_1 \theta_2 - \eta_2 \theta_1 \neq 0, \quad (8)$$

$$\partial \eta_i / \partial \lambda_2 = \partial \theta_i / \partial \lambda_1; \quad i = 1, 2. \quad (9)$$

Справедливость (8) вытекает из соображений существования решения системы (7) относительно дифференциалов  $d\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$ , а (9) — из равенства смешанных производных:  $\partial^2 / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 x = \partial^2 / \partial \lambda_2 \partial \lambda_1 x$  и  $\partial^2 / \partial \lambda_1 \partial \lambda_2 y = \partial^2 / \partial \lambda_2 \partial \lambda_1 y$ .

Используем замену (7) для достижения цели, поставленной в п. 1 настоящей работы. Цель достигается если  $\eta_i$ ,  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$  — найдены, а применение замены (7) обеспечивает невырожденный переход от системы (2) к системе соотношений на характеристиках (5). Известный [1] алгоритм поиска функций  $\eta_i$ ,  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$  не всегда дает положительный результат (особенно в случае двух уравнений) и совсем не гарантирует переход к системе (5). В работе [1] преследовались иные цели. По этому, далее модифицируем известное преобразование координат по решению, для чего: во-первых, количество неизвестных функций из (7) сведем до двух; во-вторых, выведем уравнения, из которых эти две функции могут быть определены.

Поскольку вдоль характеристик  $\lambda_i = const$   $d\lambda_i = 0$ ,  $i = 1, 2$  из (7) имеем

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{\theta_1}{\theta_2} = \xi_1; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\eta_1}{\eta_2} = \xi_2. \end{array} \right. \quad (10)$$

Собственные числа  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  определяют направления дифференцирования (3) и, следовательно, могут быть записаны как тангенс некоторого угла, то используя замену

$$\sin \alpha_i = \xi_i / \sqrt{1 + \xi_i^2}, \quad \cos \alpha_i = 1 / \sqrt{1 + \xi_i^2}, \quad i = 1, 2 \quad (11)$$

представим их в виде отношений:

$$\xi_i = \sin \alpha_i / \cos \alpha_i, \quad i = 1, 2 \quad (12)$$

С учетом (10) и (12) можно утверждать, что функции  $\eta_i$  и  $\theta_i$ ,  $i = 1, 2$  имеют общие, отличные от единицы, множители. Условимся называть их масштабирующими и обозначим соответственно:

$$v = v(x, y, u(x, y)) = v(\lambda, U) \quad \text{и} \quad \omega = \omega(x, y, u(x, y)) = \omega(\lambda, U). \quad (13)$$

Тогда учитывая (10 – 13), из (7) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} dy = v \sin \alpha_2 d\lambda_1 + \omega \sin \alpha_1 d\lambda_2, \\ dx = v \cos \alpha_2 d\lambda_1 + \omega \cos \alpha_1 d\lambda_2. \end{array} \right. \quad (14)$$

Запишем для (14) аналогичные (8), (9) уравнения ограничений

$$\Delta = \nu\omega \sin(\alpha_2 - \alpha_1) \neq 0, \quad (15)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \lambda_2}(\nu \sin \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(\omega \sin \alpha_1) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_2}(\nu \cos \alpha_2) - \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(\omega \cos \alpha_1) = 0. \right. \quad (16)$$

При условии, когда выполняются требования гиперболичности в узком смысле, т.е. когда  $\xi_1 \neq \xi_2$ , выражение (15) трансформируется к виду

$$\nu\omega \neq 0. \quad (17)$$

Заметим, что для рассматриваемого класса систем уравнений, нашедших применение в теориях пластичности [2,5] и предельного равновесия ряда сред [3], условия гиперболичности в узком смысле — соблюдаются.

**Теорема.** *Применительно к системе квазилинейных гиперболических в узком смысле двух дифференциальных уравнений первого порядка (1), любое ненулевое решение  $\nu = \nu(\lambda)$  и  $\omega = \omega(\lambda)$  системы равенств смешанных производных (16) удовлетворяет требованию невырожденности преобразований независимых координат  $x = x(\lambda)$ ,  $y = y(\lambda)$ , выполняемых с использованием замены (14) в процессе перехода на сетку характеристик ( $\lambda$ ), т.е. к системе соотношений на характеристиках (5).*

*Доказательство.* Полагая, что решением системы (16) масштабирующие функции  $\nu$ ,  $\omega$  получены и они удовлетворяют требованию (17), из системы замены независимых переменных (14) заключаем

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda_1} = \nu \sin \alpha_2; \quad \frac{\partial y}{\partial \lambda_2} = \omega \sin \alpha_1; \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_1} = \nu \cos \alpha_2; \quad \frac{\partial x}{\partial \lambda_2} = \omega \cos \alpha_1. \quad (18)$$

Теперь, представив дифференциалы  $dx$ ,  $dy$  из (3) через частные производные (18), приходим к системе (4), а от нее, выполнив подстановку  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  в (2), непосредственно получаем соотношения на характеристиках (5).

Невырожденность таких преобразований непосредственно следует из прямой подстановки выражений частных производных (18) в условие (6). С учетом обязательного требования (17) условие (6) выполняется всегда

$$D(x, y)/D(\lambda_1, \lambda_2) = -\Delta \neq 0. \quad (19)$$

Теорема доказана.

Таким образом, используя предлагаемую замену переменных (14), применительно к системе (1), можно осуществить переход на сетку характеристик  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  (к системе (5)), не заботясь о поиске масштабирующих функций  $\nu$  и  $\omega$ . Сами же масштабирующие функции  $\nu$ ,  $\omega$  можно получить решением системы (16), что мы покажем на конкретном примере.

### 3. Пример реализации метода

Рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial x} - 2k \left( \sin(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} - \cos(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \gamma \sin \alpha, \\ \frac{\partial u_1}{\partial y} + 2k \left( \cos(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin(2u_2) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right) = \gamma \cos \alpha. \end{cases} \quad (20)$$

где  $k$ ,  $\alpha$  и  $\gamma$  — постоянные, а остальные обозначения совпадают с ранее принятыми. Она известна в теории предельного равновесия идеально-вязкой среды [3], имеет серьезное прикладное значение и обычно именуется системой уравнений предельного равновесия. К представлению системы (20) сводятся основные уравнения теории пластичности [2].

Путем формальных преобразований система (20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_1}{\partial x} + \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_1}{\partial y} \mp 2k \left[ \cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_2}{\partial x} + \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \frac{\partial u_2}{\partial y} \right] = \\ = \gamma \left[ \sin \alpha \cos\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) + \cos \alpha \sin\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (21)$$

и, с учетом следующих обозначений

$$\begin{aligned} b_1 &= \gamma \left\{ \sin \alpha + \frac{\cos \alpha}{2} \left[ \tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \right\}, \\ b_2 &= \gamma \frac{\cos \alpha}{4k} \left[ \tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right], \end{aligned} \quad (22)$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \left[ \tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] & k \left[ \tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \\ \frac{1}{4k} \left[ \tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) - \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] & \frac{1}{2} \left[ \tan\left(u_2 + \frac{\pi}{4}\right) + \tan\left(u_2 - \frac{\pi}{4}\right) \right] \end{pmatrix}, \quad (23)$$

к матричной форме (1). Собственные значения  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2$  и соответствующие левые собственные векторы  $l^i$  матрицы  $A$  (23) следующие:

$$\xi_i = \tan\left(u_2 \mp \frac{\pi}{4}\right), \quad l^i = \left\{ \mp (4k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}}, \quad 2k(4k^2 + 1)^{-\frac{1}{2}} \right\}, \quad i = 1, 2 \quad (24)$$

Система (20) квазилинейна и гиперболична в узком смысле во всей области определения, исключая геометрические места, где  $u_2 \mp \pi/4 = \pm\pi(n+1/2)$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Развернутые уравнения характеристик для нее получаем подстановкой собственных значений  $\xi_i$  (24) матрицы  $A$  (23) в уравнения (3)

$$\cos(u_2 \mp \pi/4) dy - \sin(u_2 \mp \pi/4) dx = 0, \quad (25)$$

т.е. известным способом [3], а приведение системы (20) к виду (5) выполним, применяя предлагаемую замену переменных (14). Частные производные старых координат  $x$ ,  $y$  по новым  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2$  получаем из выражений (18)



$$\begin{aligned} \partial y / \partial \lambda_1 &= \nu \sin(u_2 + \pi/4), & \partial y / \partial \lambda_2 &= \omega \sin(u_2 - \pi/4), \\ \partial x / \partial \lambda_1 &= \nu \cos(u_2 + \pi/4), & \partial x / \partial \lambda_2 &= \omega \cos(u_2 - \pi/4). \end{aligned} \quad (26)$$

Теперь, домножая уравнение (21) с верхними знаками на  $\omega$ , а уравнение с нижними знаками — на  $\nu$ , учитывая (26), получаем соотношения на характеристиках  $\lambda_i, i = 1, 2$  (форму (5)). После интегрирования они дают

$$u_1 \mp 2ku_2 = \gamma[x \sin \alpha + y \cos \alpha] + f_i(\lambda_i), \quad \text{при } \lambda_i = \text{const}, \quad i = 1, 2. \quad (27)$$

где  $f_i(\lambda_i)$  — постоянные интегрирования, представленные, как функции от параметров характеристик  $\lambda, i = 1, 2$ .  $f_i(\lambda_i)$  могут быть уточнены по граничным данным. Когда  $f_i = \lambda_i$  из (27) имеем

$$u_1 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} + \gamma[x \sin \alpha + y \cos \alpha], \quad u_2 = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{4k}. \quad (28)$$

Производные (26) с учетом (17) удовлетворяют требованию (6), а значит проведенные преобразования независимых переменных — невырожденные.

Система (16), в этом частном случае с применением (28) дает

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda_1} &= -\frac{\nu}{4k}, & \frac{\partial \nu}{\partial \lambda_2} &= -\frac{\omega}{4k}, \end{aligned} \right. \quad (29)$$

и в соответствии с конкретными граничными условиями может быть интегрирована [4], что, в конечном итоге, с учетом (28) позволяет полностью избавиться от опосредствованных зависимостей между старыми  $x, y$  и новыми  $\lambda_i, i = 1, 2$  координатами в выражениях частных производных (26).

### Заключение

Используя известную замену независимых переменных (7) с учетом предложенных ограничений (10) применительно к квазилинейным гиперболическим в узком смысле системам двух дифференциальных уравнений, можно выполнить невырожденную замену независимых переменных и перейти на сетку характеристик, не заботясь о поиске масштабирующих функций  $\nu$  и  $\omega$ . Сами же  $\nu(\lambda), \omega(\lambda)$  в ряде случаев удастся получить из системы равенств смешанных производных (16).

Предложенная выше замена переменных является частным вариантом известной, именуемой “преобразованием независимых переменных по решению” [1], а поэтому будет логичным называть её “преобразованием независимых переменных по характеристическому решению”, акцентируя внимание на том, что, во-первых, в предлагаемом варианте осуществляется переход на сетку характеристик, а, во-вторых, для получения преимуществ метода необходимо иметь интегралы соотношений на характеристиках (типа (27)).

## Литература

1. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1978. – 688 с.
2. Можаровский Н.С. Теория пластичности и ползучести в инженерном деле // Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения. – К.: Выща шк., 1991. – Ч. 1. – 264 с.
3. Соколовский В.В. Статика сыпучей среды. – М.: Наука, 1990. – 272 с.
4. Масленникова В.Н. Дифференциальные уравнения в частных производных: Учебник. – М.: Изд-во РУДН, 1997. – 447 с.
5. Курант Р. Уравнения с частными производными. – М.: Мир, 1964. – 830 с.
6. Христианович С.А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре // Мат. сб. – 1936. – Т. 1 (43). – Вып. 4. – С. 511 – 531.

Поступила в редколлегию 04.09.2001

УДК629.1.032:531.3

### **ОЦЕНКА НАГРУЖЕННОСТИ БАЛАНСИРОВ ПОДВЕСКИ ОПОРНЫХ КАТКОВ ГУСЕНИЧНОГО ТРАНСПОРТЕРА-ТЯГАЧА ЛЕГКОЙ ВЕСОВОЙ КАТЕГОРИИ.**

Писарев В.П.

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

Quantitative estimate of the loading beams of loader-trailer MT-L is considered by new method as compared with traditional approach

Гусеничный транспортер–тягач МТ-Л является базовой машиной семейства унифицированных быстроходных гусеничных машин легкой весовой категории (вес снаряженной машины  $\approx 85\text{кН}$ , вес машины с грузом при перевозке груза без прицепа  $\approx 130\text{кН}$ ). Ходовая часть тягача содержит шесть опорных катков на один борт. Опорные катки односкатные с наружной ошиновкой, гусеница двутребневая, подвеска опорных катков балансирная моноторсионная.

Традиционная методика расчета элементов ходовой части, (в частности методика изложенная в [1]), исходит из конфигурации (относительного положения катков и гусеницы), представленной на рис. 1а. Расчетная схема по этой методике вообще не учитывает боковых сил (в частности направляющих усилий в горизонтальной плоскости между опорными катками и гребнями гусеницы), а также смещение зоны приложения нагрузки в вертикальной плоскости.

Исследования, проведенные автором в процессе решения задачи об устойчивости гусеничного движителя [2], показали, что при переезде через единичную неровность (с опиранием гусеницы на неровность одним краем) происходит существенное изменение конфигурации опорной части гусеничного движителя (см. рис. 1в в сравнении с рис. 1а).

Исследования проведены численными методами посредством ЭЦВМ и подтверждены результатами эксперимента. Математическая модель объекта исследования учитывает все его основные параметры: жесткость гусеницы на кручение и изгиб в вертикальной и горизонтальной плоскости; размеры элементов ходовой части и их жесткостные и демпфирующие свойства (в частности конфигурацию гусеницы, опорных катков; кинематику направляющих устройств подвески опорных катков; жесткость элементов подвески: торсионов, балансиров, опорных катков, подшипниковых узлов; демпфирующие свойства амортизаторов); инерционные параметры машины в целом и ее элементов в частности; неудерживающий (односторонний) характер связей между гусеницей и опорной поверхностью, гусеницей и опорными катками; натяжение гусеницы, в том числе в зависимости от режима нагружения (разгон, торможение); свойства опорной поверхности (грунты, естественные и искусственные препятствия).

Исследования для режима прямолинейного переезда через единичную неровность показали, что в процессе перемещения опорного катка вдоль гусеницы (от гребня 1 в направлении к гребню 4, согласно рис. 1в) происходит при определенных условиях выход катка на вершину гребня 3 со взаимодействием катка с гребнем 3 в точке С.

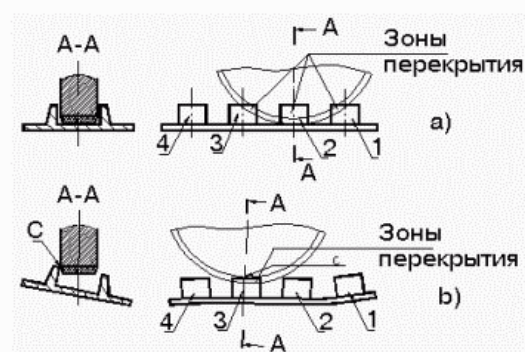


Рис. 1. Схема взаимодействия опорного катка и гусеницы.

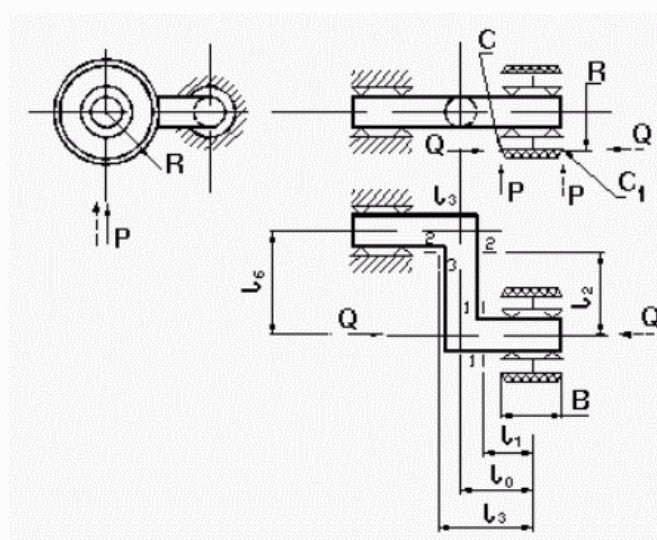


Рис. 2. Схема нагружения балансира подвески. —, - - обозначения направления сил для контактов в точках С, С<sub>1</sub>.

В этом состоянии в точке С реализуется взаимодействие катка с гусеницей не только в вертикальной плоскости, но и в горизонтальной (см. рис.2, соответственно усилия  $P$  и  $Q$ ).

Исходя из выше рассмотренного проведем сравнение нагруженности балансира по традиционной методике и по методике, учитывающей вклад в нагруженность балансира направляющего усилия  $Q$  и смещения зоны приложения усилия  $P$ . Опасными сечениями балансира традиционно считают сечения 1-1, 2-2, 3-3.

В качестве расчетных режимов примем режимы, когда гусеница опирается на неровность ближним или дальним, по отношению к корпусу машины, краем (на рис.2 в случае опирания дальним краем силы  $P$  и  $Q$  обозначены пунктирной линией, а в случае опирания ближним краем - сплошной).

В качестве расчетной нагрузки примем  $P = P_{пр} = (8...10)P_{кс}$ , как это принято в [1], исходя из режима "пробоя" подвески ( $P_{кс}$ -статическая нагрузка на опорный каток при расположении машины на ровной горизонтальной поверхности).

Для оценки напряженного состояния балансира исходим из того, что оно, в основном, определяется изгибом и кручением (в сечении 1-1-изгибом, в сечении 2-2-совместным действием изгиба с кручением, в сечении 3-3-изгибом). Воспользуемся четвертой теорией прочности для совместного действия изгиба с кручением, согласно которой [3]

$$\sigma_{схв} = \frac{M_{np}}{W} \leq [\sigma], \text{ где } M_{np} = \sqrt{0,75M_{кр}^2 + M_{изг(\epsilon)}^2 + M_{изг(\epsilon)}^2}$$

Для сечения 1-1:

$$\text{Контакт в точке С } M_{np.1} = M_{изг.1(\epsilon)} = P_{np}(l_0 - 0,5\epsilon) - Q \cdot R;$$

$$\text{Контакт в точке С}_1 \ M'_{np.1} = M'_{изг.1(\epsilon)} = P_{np}(l_0 + 0,5\epsilon) - Q \cdot R;$$

При отсутствии контакта в точках С, С<sub>1</sub> (см.рис. 1а)

$$M_{np.1}^0 = M_{изг.1(\epsilon)}^0 = P_{np} \cdot l_1.$$

Для сечения 2-2

Контакт в точке С

$$\begin{aligned} M_{np.2} &= \sqrt{0,75(M_{кр.P} + M_{кр.Q})^2 + M_{изг.2(\epsilon)}^2 + M_{изг.2(\epsilon)}^2} = \\ &= \sqrt{0,75[P_{np}(l_0 - 0,5\epsilon) + Q \cdot R]^2 + (P_{fm} \cdot l_2)^2 + (Q \cdot l_2)^2} \end{aligned}$$

Контакт в точке С<sub>1</sub>

$$\begin{aligned} M'_{np.2} &= \sqrt{0,75(M_{кр.P} - M_{кр.Q})^2 + M_{изг.2(\epsilon)}^2 + M_{изг.2(\epsilon)}^2} = \\ &= \sqrt{0,75[P(l_0 + 0,5\epsilon) - Q \cdot R]^2 + (P_{fm} \cdot l_2)^2 + (Q \cdot l_2)^2} \end{aligned}$$

При отсутствии контакта в точках С, С<sub>1</sub> (см. рис. 1а)

$$M_{np.2}^0 = \sqrt{0,75M_{кр.р}^2 + M_{изг.2(\epsilon)}^2} = \sqrt{0,75(P_{np} \cdot l_0)^2 + (P_{fm} \cdot l_2)^2}.$$

$P_{fm}$ -усилие на опорном катке при его максимальном ходе  $f_m$ , когда еще нет "пробоя" подвески.

Для сечения 3-3

$$\text{Контакт в точке С } M_{np.3} = M_{изг.3(\epsilon)} = P_{np} (l_3 - 0,5\epsilon) + Q \cdot l_6 ;$$

$$\text{Контакт в точке С}_1 \quad M'_{np.3} = M'_{изг.3(\epsilon)} = P_{np} (l_3 + 0,5\epsilon) - Q \cdot l_6 ;$$

При отсутствии контактов в точках С, С<sub>1</sub> (см. рис. 1а)

$$M_{np.3}^0 = M_{изг} = P_{np} \cdot l_3.$$

Определим уровень напряженного состояния балансира путем сравнения приведенных моментов  $M_{np}$ ,  $M'_{np}$  с  $M_{np}^0$  при следующих исходных данных:

$$\begin{aligned} P_{np} &= (8...10)P_{kc} \approx 9P_{kc} = 9 \cdot 10291 = \\ &= 92625H (P_{kc} \approx \frac{0,95G}{2n_k} \approx \frac{0,95 \cdot 130000}{2 \cdot 6} = 10291H) \end{aligned}$$

где G - вес машины с грузом,  $n_k$  - количество катков одного борта;  $P_{fm} \approx \kappa_T f_m = 519 \cdot 33,59 = 17433H$ ; ( $\kappa_T = 519H/см$  - жесткость подвески,  $f_m = 33,59$  см [4]);  $Q = P_{np} = 92625$  Н (вар. 1),  $Q = P_{fm} = 17433$  Н (вар. 2);  $l_0 = 14,5$  см,  $l_1 = 9,0$  см,  $l_2 = 30$  см,  $l_3 = 22,5$  см,  $l_6 = 36$  см,  $R = 27$  см,  $\epsilon = 13,6$  см.

В исходных данных для расчета заложены два значения усилия  $Q$  ( $Q = P_{np} = 92625$  Н (вар.1) и  $Q = P_{fm} = 17433$  Н (вар.2)).

Это сделано с целью определиться с диапазоном расчетных значений приведенных моментов, представляющих интерес с позиций нагруженности балансира.

Нижняя граница относится к варианту, когда величина усилия  $Q$  равна усилию  $P_{fm}$ , связанного с величиной максимально возможного хода  $f_m$  по прочности торсиона, верхняя- к варианту, когда усилие  $Q$  достигает величины  $P_{np}$  при "пробое" подвески.

По результатам, приведенных в табл., можно сделать выводы, что в рассматриваемом диапазоне значений  $P$  и  $Q$  перегруженность имеет место для всех опасных сечений в той или иной степени (наибольший перегруз –3,246 и 1,12 раза для сечения 1–1; 3,11 и 1,176 раза для сечения 2–2; 2,297 и 1,0 раза для сечения 3–3).



Перегруженность (недогруженность) балансира по сравнению с традиционной методикой.

Параметр сравнения	Q = Pпр = 92625 Н (вар. 1)			Q = Pfm = 17433 Н (вар. 2)		
	сечение			сечение		
	1-1	2-2	3-3	1-1	2-2	3-3
$\frac{M_{пр}}{M_{пр}^0}$	3,246	3,11	2,297	(0,807)	1,0	1,0
$\frac{M'_{пр}}{M_{пр}^0}$	1,244	2,55	(0,297)	1,12	1,176	1,0

В связи с этим традиционную методику определения расчетной нагруженности балансира нельзя признать удовлетворительной при существенном изменении конфигурации ходовой части гусеничного движителя.

### Литература

1. Буров С.С. Конструкция и расчет танков. – М., Издание академии БТВ, 1973, - 601с. 2. Писарев В.П. Устойчивость гусеничного движителя быстроходного транспортного средства.–Харьков: ХГПУ, 1997,- 174с. 3. Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В. Справочник по сопротивлению материалов. – 2-е изд., перераб. и доп. – Киев: Наук. думка, 1988,- 736 с. 4. Платонов В.Ф., Белоусов А.Ф., Олейников Н.Г., Карцев Г.И. Гусеничные транспортные транспортеры–тягачи. – М., Машиностроение, 1978, - 351 с.

Поступила в редколлегию 15.09.2001

УДК 629.7.02-192:629:8.015.11

## ИСПЫТАНИЯ НА ДОЛГОВЕЧНОСТЬ ИЗДЕЛИЙ АВИАЦИОННОЙ ТЕХНИКИ

В.О.Повгородний

*Национальный аэрокосмический университет "ХАИ", Харьков, Украина*

All the results of the durability obtained are in conformity with normative-technical documents (the performance and technical specifications) and verified experimentally with cyclic durability (operational safety) tests by the sequential method following a sequence diagram, including disturbing factors, such as knocks, vibration, effect of cyclical summer and winter temperatures and normal conditions.

Designers have a chance of obtaining the information concerning operational durability (fail-safety). Then, the designers will decide on the further

steps: whether use shock absorbers, dampers, change geometrical dimensions or input the data in a computer-aided design system in order to find an optimal solution. The main results of the work have been implemented in industrial production in developing new aircraft instrumentation in Ukraine.

Цель испытаний:

— определение возможности установления требуемого ресурса и возможности его дальнейшего увеличения; определение количественных показателей надежности блока воздушных параметров (БВП) (рис.1);

— выявление деталей, ограничивающих надежность и технический ресурс БВП.

Условия проведения испытаний:

— испытания БВП проводятся в лабораторных условиях, имитирующих ускоренное воспроизведение эксплуатационных факторов;

— условия наработки и количество эксплуатационных факторов выбираются из опыта эксплуатации БВП на объектах;

— состав цикла испытаний, очередность воздействия механических и климатических факторов и длительность наработки в каждом цикле приведены на циклограмме (рис.2);

— лабораторные испытания блока выполняются в объеме срока службы, эквивалентного 5 годам эксплуатации блока на объекте [1].

### **Перечень и количественное обоснование воспроизводимых эксплуатационных факторов**

Наиболее вероятное время наработки блока в реальном году (среднегодовая наработка) и средняя продолжительность испытаний, определенная исходя из статистических данных эксплуатации, составляют соответственно 1000 часов и 5 часов.

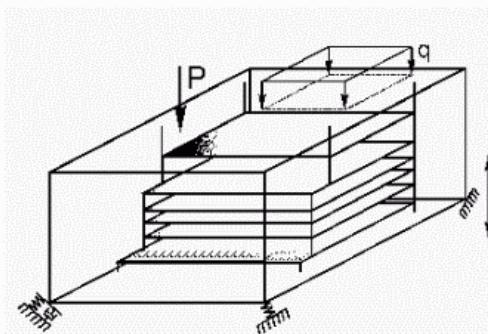


Рис. 1. Конструкция БВП.

Для удобства учета наработки и эксплуатационных мероприятий весь комплекс лабораторных испытаний разбит на условные года, соответствующие реальному году эксплуатации блока на объектах. В связи с этим воз-

можно сокращение времени испытаний блока. Условный год эксплуатации комплекса блока применительно к объектам делится на периоды зимней и летней эксплуатации и соответствует работе блока в специальных лабораторных условиях в течение 1800 часов, воспроизводящих эксплуатацию на объекте при следующей последовательности:

— воспроизведение вибронгрузок, характерных при полете объекта, в местах установки блока [2];

— воспроизведение сезонных циклических изменений температур, характерных для условий эксплуатации (взлет, полет, посадка);

— воспроизведение условий хранения (переход температуры через ноль в осенне-весенний период во время стоянки объекта в полевых условиях);

— воспроизведение воздействия влажности среды, эквивалентной условиям среднегодового климата.

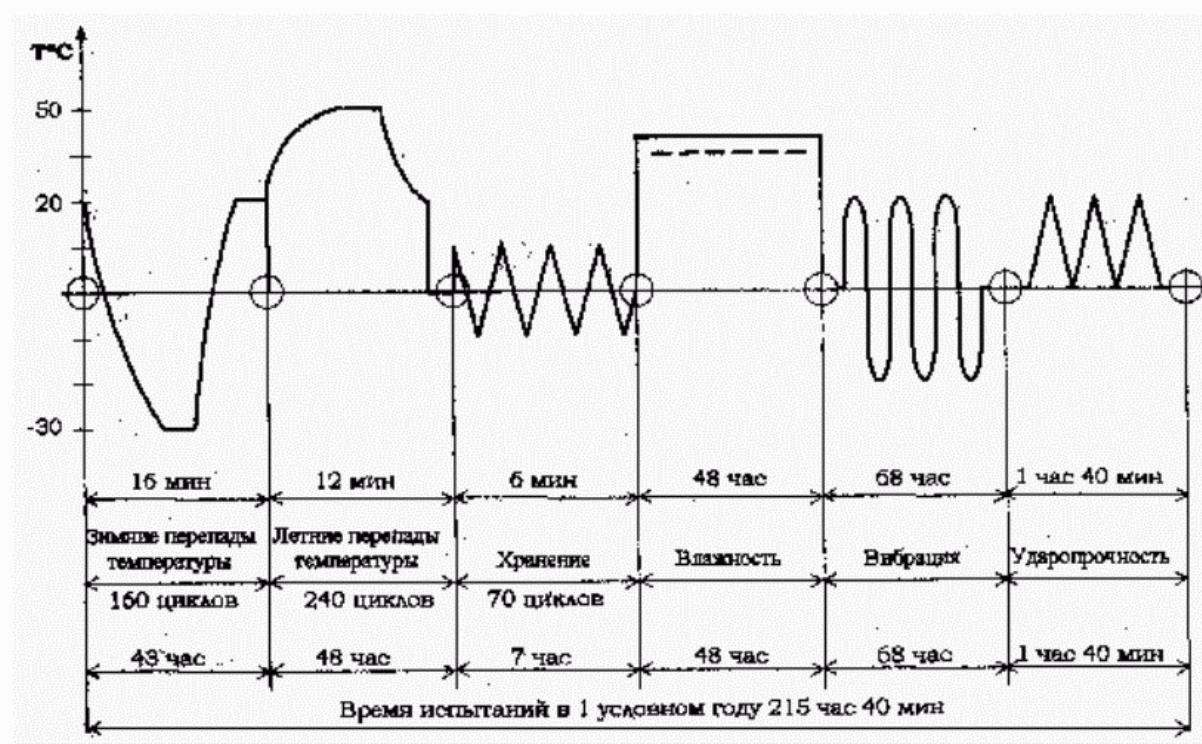


Рис. 2. Циклограмма испытаний на долговечность БВП.

При определении условного года эксплуатации использовались следующие данные:

- среднегодовой налет объекта – 1800 часов;
- летний период 60% налета – 1080 часов;
- зимний период 40% налета – 720 часов;
- средняя продолжительность полета – 4 ч 30 мин;
- среднее количество полетов за год – 400.

### Воспроизведение режимов ударных нагрузок

Блок соединяют с источниками питания, контрольно-поверочной аппаратурой согласно схеме проверки и закрепляют на ударном стенде 12МУ50/1470-1 и подвергают ударным нагрузкам, режимы которых указаны в п. соответствующих технических условий [3].

### Воспроизведение воздействия вибрационных нагрузок

Блок соединяют с источниками электрического питания, контрольно-поверочной аппаратурой согласно схеме проверки и закрепляют на вибростенде ВЭДС-0,4.

Синусоидальное виброускорение  $a_{zi}^\eta$ , эквивалентное максимальному значению спектральной плотности  $S_{\max}^\eta$  для  $i$ -ой частоты и  $\eta$ -го режима применения, определяется по формуле (1):

$$a_{zi}^\eta = \sqrt{2S_{\max}^\eta \Delta f}, \quad (1)$$

где  $\Delta f$  - ширина частот в зависимости от диапазона частот  $\delta f$ , определяемая по табл. 1.

По рассчитанным значениям  $a_{zi}^\eta$  строится спектр синусоидальных виброускорений  $a_j^\eta(f)$ , эквивалентный спектру  $S_{\max}^\eta$ , по которому разработчик бортового оборудования (БО) формирует базовый спектр  $a_0^\eta(f)$  (рис.3.).

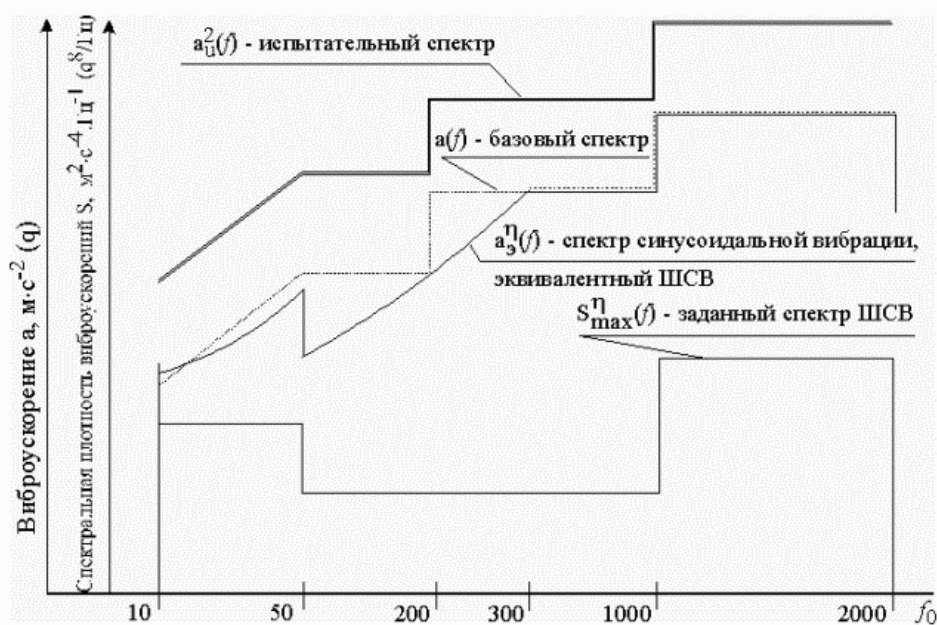


Рис.3. Спектр синусоидальных ускорений

Под базовым спектром  $a_{0j}^\eta(f)$  понимается спектр, сформированный по максимальным значениям синусоидальных виброускорений (вибросмещений)  $a_{0j}^\eta$  в  $j$ -х диапазонах частот, устанавливаемых разработчиком БО (2):

Таблица 1. Зависимость диапазона частот от ширины полосы частот

Диапазон частот $\delta f$ , Гц	Ширина полосы частот $\Delta f$ , Гц
10 – 20	3,5
20 – 40	7,0
40 – 80	14,0
80 – 160	25,0
160 – 300	40,0
300 – 500	50,0
800 – 1000	50,0
1000 - 2000	50,0

$$a_{\delta f}^{\eta}(f) = \max\{a_{\delta f}^{\eta}\}_j. \quad (2)$$

Значения частотных диапазонов с постоянным уровнем виброускорений (вибросмещений) устанавливается с учетом возможностей их реализации на испытательном оборудовании. Максимальное число частотных диапазонов должно быть не более 4.

Испытательный уровень виброускорения в  $j$ -м диапазоне, соответствующий  $\eta$ -му режиму применения,  $a_u^{\eta}(f)$  определяется по формуле (3):

$$a_u^{\eta}(f) = a_6^{\eta}(f)K_{ж}, \quad (3)$$

где  $K_{ж}$  – коэффициент жесткости, назначаемый разработчиком исходя из конструктивно-технологических особенностей БО (при  $a_u^{\eta}(f) = a_6^{\eta}(f)K_{ж} = 1$ ).

Продолжительность воздействия синусоидальной вибрации в одном испытательном цикле  $t_{1c}^{\eta}$ , эквивалентная средней наработке в  $\eta$ -ом режиме за год эксплуатации, определяется по формуле (4):

$$t_{1c}^{\eta} = t_{г}^{\eta} / K_{yc}^{\eta}, \quad (4)$$

где  $K_{yc}^{\eta}$  – коэффициент ускорения продолжительности испытаний при синусоидальной вибрации.

Продолжительность испытания на синусоидальную вибрацию по трем координатным осям:

$$t_{ul}^B = 3 \cdot t_{1c}^{\eta} = 3 \cdot 8,5 = 25,5 \text{ ч.}$$

Испытание модуля блока на устойчивость к циклическим изменениям температуры

Блок подвергают воздействию 400 годовым полетным температурным циклам, следующих непрерывно друг за другом и соответствующих в умеренно климатической зоне: зимнему перепаду температур от минус 30°C до 20°C (160 термоциклов) и летнему перепаду температур от 20°C до 50°C (240 термоциклов).

По реальной температурной константе блока возможно значительное



сокращение времени испытаний относительно реальных условий эксплуатации. Ускорение испытаний по температурным факторам достигается за счет исключения периода нахождения блока в установившихся температурных режимах с сохранением среднегодового количества перепадов.

### **Воспроизведение воздействия климатических факторов при хранении**

При лабораторных испытаниях влияние температуры окружающей среды на надежность блока при хранении в составе объекта учитывается количеством циклов перехода температуры окружающей среды от минусовых к плюсовым температурам. Для выбранной климатической зоны эксплуатации, с умеренно-холодным климатом, количество таких переходов принято равным 70 при переходе температур от 10°C до минус 10°C.

### **Воспроизведение режимов влажности**

Влияние влажности на работоспособность блока происходит за счет: образования конденсата на деталях, возникающего при переносе блока из минусовой камеры в нормальные условия, в начале каждого рабочего цикла полета, выдержки во влагокамере при температуре 40°C с относительной влажностью 95%.

Блок в течение реального года эксплуатации подвергается воздействию относительной влажности более 90% в течение времени  $t_{\text{в}}=960$  часов. Время испытания блока на влажность при температуре 40°C определяется по формуле (5):

Таблица 2. Сравнение расчетных и экспериментальных значений Н, Т, R для БВП

Методы	Надежность, Н	Наработка на отказ Т, ч	Ресурс R, ч	Ошибка эксперимента на долговечность, %
Техническое задание	0,9976	5000	60000	-
Модифицированный метод	0,9996	4635	79110	0,88
Эксперимент (данные плана испытаний на безотказность)	0,9984	7692	-	-
Эксперимент (время испытаний на вибрацию)	0,9364	177	-	6,1
Экспериментальные результаты на безотказность	0,9919	744	-	0,57
Эксперимент (данные плана испытаний на долговечность 1800 ч/год на 5 лет)	-	-	9000	-

$$t_{\text{вн}} = t_{\text{в}} \cdot e^{v \left( \frac{1}{T_{\text{ис}}} - \frac{1}{T_{\text{э}}} \right)}, \quad (5)$$

где  $T_{\text{ис}}$  и  $T_{\text{э}}$  – температура испытаний и окружающей среды выражается в °К;  $v = 10^4$  – коэффициент, характеризующий восприимчивость материала к коррозионной среде;  $T_{\text{э}} = 283$  °К – среднестатистическое значение эксплуатационной температуры в °К при относительной влажности более 90%;  $T_{\text{э}} = 304$  °К – температуры в °К при которой проводятся испытания.

Подставив исходные данные в формулу, получим  $t_{\text{вн}} = 48$  часов.

### Оценка результатов испытаний

Оценка количественных показателей надежности осуществляется по методу доверительных интервалов и представлена в табл.2.

### Литература

1. Дзиркал Э.В. Задание и проверка требований к надежности сложных изделий.– М.: Радио и связь, 1981.– 176 с. 2. The status of the reliability technology //RAC Journal. –1995. –Vol.3, № 1. 3. Программа и методика лабораторных испытаний на технический ресурс и надежность, Харьков, ХПКБ “Авиаконтроль”, 1979, С.11.

Поступила в редколлегию 15.09.2001

УДК 539.3

## ТЕРМОУПРУГОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ МНОГОСЛОЙНЫХ ПЛАСТИН

Н.В. Сметанкина, Е.В. Свет, А.Н. Шушиков

*Институт проблем машиностроения НАН Украины, Харьков, Украина*

A method for analysis of the strain-stressed state of multilayer plates within the framework of the first order refined theory is offered. Temperature distribution through the thickness of each layer is obtained by using orthonormal Legendre polynomials. The resolving set of equations and boundary conditions for multilayer simply supported plates is obtained.

Как показано в ряде работ, посвященных термоупругости многослойных конструкций, для описания распределения температур по толщине пластины применяется гипотеза о кусочно-линейном распределении температуры по толщине пакета [1-5]. В статье [6] распределение температуры получено из решения задачи нестационарной теплопроводности, что позволило учесть различие физико-механических характеристик материалов слоев. В настоя-

щей статье на основе предложенного ранее алгоритма решения температурной задачи и уточненной теории первого порядка сформирована система уравнений равновесия и граничные условия стационарной задачи термоупругости и предложен метод их решения.

Рассмотрим прямоугольную шарнирно опертую многослойную пластину, собранную из  $I$  слоев постоянной толщины и отнесенную к декартовой системе координат, которая связана с наружной поверхностью первого слоя.

Решение уравнения теплопроводности  $\Delta T = 0$  для  $i$ -го слоя будем искать в виде

$$T_i(x, y, z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{r=1}^{\infty} [\tau_{rkl}^i f_r(\bar{z}_i)] \sin \alpha_k x \sin \beta_l y, \quad (1)$$

где

$$0 \leq x \leq A, \quad 0 \leq y \leq B, \quad \alpha_k = \pi k / A, \quad \beta_l = \pi l / B,$$

$$\bar{z}_i = (z - \delta_{i-1}) / h_i, \quad \delta_i = \sum_{j=1}^i h_j, \quad \delta_{i-1} \leq z \leq \delta_i, \quad i = \overline{1, I},$$

$h_i$  – толщина  $i$ -го слоя,  $A$  и  $B$  – размеры пластины в плане.

В качестве функций  $f_r, r = \overline{1, R}$ , выбираем ортонормированные полиномы Лежандра  $(r-1)$ -й степени для интервала  $0 \leq \bar{z} \leq 1$

$$f_1 = 1, \quad f_2 = \sqrt{3}(2\bar{z} - 1), \quad \dots, \quad (2)$$

$$\int_0^1 f_k f_l d\bar{z} = \delta_{kl}. \quad (3)$$

Проецирование уравнения теплопроводности на функции  $f_r$  (2) с учетом условия ортонормированности функций (3) приводит к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\alpha_k^2 + \beta_l^2) \tau_{1kl}^i - \sum_{r=3}^R \tau_{rkl}^i \xi_{r,1}^i &= 0, \quad (\alpha_k^2 + \beta_l^2) \tau_{2kl}^i - \sum_{r=4}^R \tau_{rkl}^i \xi_{r,2}^i = 0, \quad \dots \\ (\alpha_k^2 + \beta_l^2) \tau_{(R-2)kl}^i - \tau_{Rkl}^i \xi_{R,R-2}^i &= 0, \\ (\alpha_k^2 + \beta_l^2) \tau_{(R-1)kl}^i &= 0, \quad (\alpha_k^2 + \beta_l^2) \tau_{Rkl}^i = 0, \end{aligned} \quad (4)$$

где  $\xi_{r,j}^i = \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} \frac{d^2 f_r}{dz^2} f_j dz$ .

На наружной и внутренней поверхностях пластины происходит конвективный теплообмен с внешней средой. Запишем краевые условия и условия теплового сопряжения слоев

$$-\lambda_1 \nabla T_i \Big|_{z_1=0} = a_n (T_n - T_1 \Big|_{z_1=0}), \quad \lambda_I \nabla T_I \Big|_{z_I=\delta_I} = a_s (T_s - T_I \Big|_{z_I=\delta_I}),$$

$$-\lambda_i \nabla T_i \Big|_{z_i=\delta_i} + \lambda_{i+1} \nabla T_{i+1} \Big|_{z_i=\delta_i} = 0, \quad T_i \Big|_{z_i=\delta_i} - T_{i+1} \Big|_{z_i=\delta_i} = 0, \quad i = \overline{1, I},$$

где  $\lambda_i$  – коэффициент теплопроводности,  $a_n$  и  $a_e$  – коэффициенты конвективной теплопередачи на наружной и внутренней поверхностях,  $T_n$  и  $T_e$  – температура внешней и внутренней сред.

Краевые условия, условия равенства потоков тепла и температур на стыках слоев и соотношения (4) составляют разрешающую систему алгебраических уравнений, решение которой можно найти стандартными методами.

Следующий этап решения задачи состоит в определении напряженно-деформированного состояния многослойной пластины под действием известных тепловых и силовых нагрузок. Рассмотрим случай малых упругих перемещений. Деформации слоев описываются в рамках уточненной теории пластин [7]. Контакт между слоями исключает их расслаивание и взаимное проскальзывание. Для пакета слоев справедлива гипотеза ломаной линии. Согласно принятой гипотезе перемещения точки  $i$ -го слоя имеют вид

$$u^i = u + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_x^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_x^i, \quad v^i = v + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_y^j + (z - \delta_{i-1}) \psi_y^i, \\ w^i = w, \quad i = \overline{1, I}, \quad (5)$$

где  $u = u(x, y, t)$ ,  $v = v(x, y, t)$ ,  $w = w(x, y, t)$  – перемещения точки координатной плоскости в направлении координатных осей;  $\psi_x^i = \psi_x^i(x, y, t)$ ,  $\psi_y^i = \psi_y^i(x, y, t)$  – углы поворота нормального элемента в  $i$ -м слое вокруг осей  $0x$  и  $0y$ . Деформации слоев определяются согласно формулам Коши.

Напряжения и деформации в  $i$ -м слое связаны законом Гука:

$$\sigma_x^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_x^i + \nu_i \varepsilon_y^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i^t T_i, \quad \sigma_y^i = \frac{E_i}{1-\nu_i^2} (\varepsilon_y^i + \nu_i \varepsilon_x^i) - \frac{E_i}{1-\nu_i} \alpha_i^t T_i, \\ \tau_{xy}^i = \tau_{yx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{xy}^i, \quad \tau_{xz}^i = \tau_{zx}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{xz}^i, \\ \tau_{yz}^i = \tau_{zy}^i = \frac{E_i}{2(1+\nu_i)} \gamma_{yz}^i, \quad i = \overline{1, I}, \quad (6)$$

где  $E_i$  – модуль Юнга,  $\nu_i$  – коэффициент Пуассона,  $\alpha_i^t$  – коэффициент линейного температурного расширения материала  $i$ -го слоя. В формулах (6)  $T_i = T_i(x, y, z)$  – распределение температуры (1), полученное из решения задачи теплопроводности.

Принимая во внимание (6) и известные соотношения для усилий и моментов [7], запишем

$$\begin{aligned}
\hat{N}_x^i &= N_x^i - N_T^i, & \hat{N}_y^i &= N_y^i - N_T^i, & \hat{M}_x^i &= M_x^i - M_T^i, & \hat{M}_y^i &= M_y^i - M_T^i, \\
N_x^i &= \alpha_1^i \left( u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\beta_1^i}{2} \psi_{x,x}^i + \alpha_2^i \left( v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\beta_2^i}{2} \psi_{y,y}^i, \\
N_y^i &= \alpha_1^i \left( v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\beta_1^i}{2} \psi_{y,y}^i + \alpha_2^i \left( u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\beta_2^i}{2} \psi_{x,x}^i, \\
N_{xy}^i &= N_{yx}^i = \alpha_3^i \left[ u_{,y} + v_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j (\psi_{x,y}^j + \psi_{y,x}^j) \right] + \frac{\beta_3^i}{2} (\psi_{x,y}^i + \psi_{y,x}^i), \\
M_x^i &= \frac{\beta_1^i}{2} \left( u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\gamma_1^i}{3} \psi_{x,x}^i + \frac{\beta_2^i}{2} \left( v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\gamma_2^i}{3} \psi_{y,y}^i, \\
M_y^i &= \frac{\beta_1^i}{2} \left( v_{,y} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{y,y}^j \right) + \frac{\gamma_1^i}{3} \psi_{y,y}^i + \frac{\beta_2^i}{2} \left( u_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j \psi_{x,x}^j \right) + \frac{\gamma_2^i}{3} \psi_{x,x}^i, \\
M_{xy}^i &= M_{yx}^i = \frac{\beta_3^i}{2} \left[ u_{,y} + v_{,x} + \sum_{j=1}^{i-1} h_j (\psi_{x,y}^j + \psi_{y,x}^j) \right] + \frac{\gamma_3^i}{2} (\psi_{x,y}^i + \psi_{y,x}^i). \quad (7)
\end{aligned}$$

Здесь  $\alpha_1^i = \frac{E_i h_i}{1 - \nu_i^2}$ ,  $\alpha_2^i = \alpha_1^i \nu_i$ ,  $\alpha_3^i = \alpha_1^i \frac{1 - \nu_i}{2}$ ,  $\beta_k^i = \alpha_k^i h_i$ ,  $\gamma_k^i = \beta_k^i h_i$ ,

$k = 1, 2, 3$ ;  $N_T^i$ ,  $M_T^i$  – интегральные характеристики температурного поля,

$$N_T^i = \frac{E_i \alpha_i^t}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i dz, \quad M_T^i = \frac{E_i \alpha_i^t}{1 - \nu_i} \int_{\delta_{i-1}}^{\delta_i} T_i (z - \delta_{i-1}) dz.$$

Уравнения равновесия многослойной пластины, а также соответствующие граничные условия выводятся на основе вариационного принципа виртуальной работы:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^I (N_{x,x}^i + N_{yx,y}^i - N_{T,x}^i) + p_1^s &= 0, & \sum_{i=1}^I (N_{xy,x}^i + N_{y,y}^i - N_{T,y}^i) + p_2^s &= 0, \\
\sum_{i=1}^I (Q_{x,x}^i + Q_{y,y}^i) + p_3^s &= 0, \\
h_i \sum_{j=i}^{I-1} (N_{x,x}^{j+1} + N_{yx,y}^{j+1} - N_{T,x}^{j+1}) + M_{x,x}^i + M_{yx,y}^i - Q_x^i - M_{T,x}^i + p_{3+i}^s &= 0, \\
h_i \sum_{j=i}^{I-1} (N_{xy,x}^{j+1} + N_{y,y}^{j+1} - N_{T,y}^{j+1}) + M_{xy,x}^i + M_{y,y}^i - Q_y^i - M_{T,y}^i + p_{3+I+i}^s &= 0. \quad (8)
\end{aligned}$$



Граничные условия для шарнирно опертой пластины имеют вид

$$\sum_{i=1}^I (N_x^i - N_T^i) = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \quad h_i \sum_{j=i}^{I-1} (N_x^{j+1} - N_T^{j+1}) + M_x^i - M_T^i = 0,$$

$$\psi_y^i = 0 \quad (x = 0, x = A);$$

$$u = 0, \quad \sum_{i=1}^I (N_y^i - N_T^i) = 0, \quad w = 0, \quad \psi_x^i = 0,$$

$$h_i \sum_{j=i}^{I-1} (N_y^{j+1} - N_T^{j+1}) + M_y^i - M_T^i = 0 \quad (y = 0, y = B), \quad i = \overline{1, I}.$$

В уравнениях равновесия (8)  $p_j^s(x, y)$  ( $j = \overline{1, 2I+3}$ ) – компоненты вектора силовых нагрузок  $\mathbf{P}^s$ .

Метод решения полученной системы уравнений (8) аналогичен методу, изложенному в работе [7]. Компоненты вектора перемещений  $\mathbf{U} = \{u_j(x, y)\}$  и обобщенного вектора нагрузок  $\mathbf{Q} = \{q_j(x, y)\}$  ( $j = \overline{1, 2I+3}$ ), включающего температурные и силовые нагрузки, разлагаются в ряды Фурье по функциям, удовлетворяющим граничным условиям, соответствующим шарнирному опиранию по краю,

$$u_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_{jmn} B_{jmn}(x, y), \quad q_j(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{jmn} B_{jmn}(x, y), \quad (9)$$

$$\text{где } u_1 = u(x, y), \quad u_2 = v(x, y), \quad u_3 = w(x, y), \quad u_{3+i} = \psi_x^i(x, y),$$

$$u_{3+I+i} = \psi_y^i(x, y), \quad q_1 = p_1^s - \sum_{i=1}^I N_{T,x}^i, \quad q_2 = p_2^s - \sum_{i=1}^I N_{T,y}^i, \quad q_3 = p_3^s,$$

$$q_{3+i} = p_{3+i}^s - h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{T,x}^{j+1} - M_{T,x}^i, \quad q_{3+I+i} = p_{3+I+i}^s - h_i \sum_{j=i}^{I-1} N_{T,y}^{j+1} - M_{T,y}^i,$$

$$B_{1mn} = \cos \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad B_{2mn} = \sin \alpha_m x \cos \beta_n y,$$

$$B_{3mn} = \sin \alpha_m x \sin \beta_n y, \quad B_{3+i,mn} = B_{1mn}, \quad B_{3+I+i,mn} = B_{2mn},$$

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{A}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{B}, \quad i = \overline{1, I}.$$

В результате для каждой пары значений  $m$  и  $n$  решение (8) задачи сводится к решению системы линейных алгебраических уравнений

$$[\Lambda_{mn}] \mathbf{U}_{mn} = \mathbf{Q}_{mn},$$

где  $[\Lambda_{mn}]$  – квадратная матрица,

$$\lambda_{11}^{mn} = C_1^I \alpha_m^2 + C_3^I \beta_n^2, \quad \lambda_{12}^{mn} = \lambda_{21}^{mn} = (C_2^I + C_3^I) \alpha_m \beta_n, \quad \lambda_{13}^{mn} = \lambda_{31}^{mn} = 0,$$

$$\begin{aligned}
\lambda_{1,3+i}^{mn} &= \lambda_{3+i,1}^{mn} = D_1^i \alpha_m^2 + D_3^i \beta_n^2, & \lambda_{1,3+I+i}^{mn} &= \lambda_{3+I+i,1}^{mn} = (D_2^i + D_3^i) \alpha_m \beta_n, \\
\lambda_{22}^{mn} &= C_3^I \alpha_m^2 + C_1^I \beta_n^2, & \lambda_{23}^{mn} &= \lambda_{32}^{mn} = 0, & \lambda_{2,3+i}^{mn} &= \lambda_{3+i,2}^{mn} = (D_2^i + D_3^i) \alpha_m \beta_n, \\
\lambda_{2,3+I+i}^{mn} &= \lambda_{3+I+i,2}^{mn} = D_3^i \alpha_m^2 + D_1^i \beta_n^2, & \lambda_{33}^{mn} &= C_3^I (\alpha_m^2 + \beta_n^2) \\
\lambda_{3,3+i}^{mn} &= \lambda_{3+i,3}^{mn} = \alpha_3^i \alpha_m, & \lambda_{3,3+I+i}^{mn} &= \lambda_{3+I+i,3}^{mn} = \alpha_3^i \beta_n, \\
\lambda_{3+i,3+j}^{mn} &= \eta_{1ij} \alpha_m^2 + \eta_{3ij} \beta_n^2 + \alpha_3^i \delta_{ij}, \\
\lambda_{3+i,3+I+j}^{mn} &= \lambda_{3+I+j,3+i}^{mn} = (\eta_{2ij} + \eta_{3ij}) \alpha_m \beta_n, \\
\lambda_{3+I+i,3+I+j}^{mn} &= \eta_{3ij} \alpha_m^2 + \eta_{1ij} \beta_n^2 + \alpha_3^i \delta_{ij}, & i, j &= \overline{1, I},
\end{aligned}$$

$U_{mn}$  и  $Q_{mn}$  – коэффициенты разложения в ряды векторов перемещений и нагрузок (9). Коэффициенты  $C_k^i$ ,  $D_k^i$ ,  $K_k^i$ ,  $\eta_{kij}$  приведены в работе [7].

После вычисления значения коэффициентов перемещений, используя формулы (9), находим перемещения (5), напряжения (6), силы и моменты (7) в слоях пластины.

Представленный алгоритм позволяет исследовать термоупругое напряженное состояние многослойных пластин, собранных из произвольного числа слоев с различными упругими свойствами материалов слоев.

## Литература

1. Болотин В.В., Новичков Ю.Н. Механика многослойных конструкций, М., Машиностроение, 1980. - 375 с.
2. Reddy J.N., Hsu Y.S. Effects of shear deformation and anisotropy on the thermal bending of layered composite plates, Journal of Thermal Stresses, 1980, vol. 3, № 3, p. 475-493.
3. Пискунов В.Г., Сипетов В.С. Об одном подходе к решению задач термоупругости слоистых пластин, Строит. механика и расчет сооружений, 1986, 1, с. 28-31.
4. Khdeir A.A. On the thermal response of antisymmetric angle-ply laminated plates, Journal of Applied Mechanics, 1997, vol. 64, 1, p.229-233.
5. Verijenko V.E., Tauchert T.R., Tabakov P.Y. Refined theory of laminated anisotropic shells for the solution of thermal stress problems, Journal of Thermal Stresses, 1999, vol. 22, 1, p. 75-100.
6. Кантор Б.Я., Сметанкина Н.В., Шупиков А.Н. Нестационарная теплопроводность в слоистых пластинах, Вестник Харьк. гос. политех. ун-та, 2000, вып. 116, с. 73-77.
7. Shupikov A.N., Smetankina N.V. Non-stationary vibration of multilayer plates of an uncanonical form. The elastic immersion method. International Journal of Solids Structures, 2001, vol. 38, 14, p. 2271-2290.

Поступила в редколлегию 16.09.2001

УДК 539.3

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧИМЫХ ПАРАМЕТРОВ РАСЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ЭЛЕМЕНТОВ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ ПО РЕЗУЛЬТАТАМ ЭКСПЕРИМЕНТА**

Н.А. Ткачук

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

The experimental method for determination of significant parameters of numerical models of the mechanical systems elements is described. Determination of the main parameters set is carried out after experimental research by speckle-holography method.

При определении напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем одним из наиболее важных вопросов является получение их достоверных, полных и точных численных моделей. Основные аспекты данной проблемы состоят в получении описания моделируемого физического процесса в механической системе с заданной точностью, причем следующим уровнем проблемы является компромиссная задача ограничения уровня сложности полученной модели.

Естественно, что упрощение структуры модели отрицательно может сказаться на точности получаемых результатов. То же касается и количества параметров, описывающих модель, а также их величины. Однако, с другой стороны, чрезмерно усложненная модель тоже имеет отрицательные стороны: громоздкость, сложность вычленения зависимостей результатов от варьируемых параметров, а также неизбежные погрешности при численном решении и большие требования к вычислительным ресурсам.

Одним из направлений приемлемого решения проблемы – определение множества значимых параметров, оказывающих наиболее существенное влияние на реальный физический объект и его численную модель. Это может быть достигнуто в рамках расчетно-экспериментальных методов. В частности, одной из перспективных схем является применение метода, соединяющего преимущества метода конечных элементов (МКЭ) и метода спекл-голографической интерферометрии [1,2].

Задача определения значимых параметров тесно связана со сравнением физических процессов в реальном объекте и его численной модели. При этом при переходе от реального объекта к численной модели необходимо исходить из его математической модели. В частности, при определении напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем наиболее важными являются вопросы достоверного описания операторов начально-краевой задачи  $L$ , силовых  $l_f$  и кинематических  $l_u$  граничных условий:

$$L(x, t, p, u) = 0, \quad x \in \Omega, \quad (1)$$

где  $x$  - координаты точек исследуемого тела, занимающего в пространстве область  $\Omega$ ;

$t$  - время;

$u$  - массив параметров состояния объекта;

$p$  - массив характеристик свойств объекта;

$$l_f(x, u) = f, \quad x \in S_f, \quad (2)$$

где  $f$  - массив соответствующих нагрузок;

$S_f$  - часть поверхности тела, через которую осуществляется приложение нагрузок;

$$l_u(x, u) \geq \mu, \quad x \in S_u, \quad (3)$$

где  $\mu$  - некоторая задаваемая функция, характеризующая закон распределения и параметры граничных условий.

В частности, важными вопросами являются: определение типа оператора (1) (зависит от типа исследуемого объекта – пластина, пластинчато-стержневая конструкция, оболочка и т.д., а также условий его работы); определение характеристик оператора  $L$  (физико-механические характеристики материала и т.п.); уточнение величины и законов распределения в пространстве и времени усилий нагружения элементов исследуемой механической системы; определение характеристик граничных условий. При исследовании напряженно-деформированного состояния реальных машиностроительных конструкций все указанные характеристики и параметры, которые определяют вид численной модели, трансформируются во вполне конкретные физические детали и величины: усилия затяжки болтов, характер термообработки, распределение первоначального зазора, качество обработки поверхности и т.д. Таким образом, варьированию структуры и параметров операторов (1)-(3) соответствует изменение состава, взаиморасположения, формы и характеристик сопряжения различных деталей физического объекта.

Очень большое значение имеет также степень подробности, с которой описывается геометрическая форма исследуемого объекта.

В частности, при исследовании напряженно-деформированного состояния пресс-форм для оснащения термопластавтоматов существенными параметрами являются: усилие замыкания пресс-формы; внутреннее давление расплавленной пластмассы в формующей полости полуматриц пресс-формы, а также усилие затяжки наклонных винтов, поджимающих боковые грани полуматриц. Кроме того, определенное влияние на напряженно-деформированное состояние элементов пресс-форм может оказывать наличие, размеры, схема расстановки промежуточных опор под нижней полуматрицей и величина зазора (натяга) в сопряжении опоры-полуматрица.

Для определения влияния указанных параметров необходимо разработать схему проведения расчетно-экспериментальных исследований, дающую минимальный, достаточный или избыточный объем информации о поведении исследуемого объекта.

Для количественной оценки соответствия результатов численных и экспериментальных исследований необходимо: ввести в рассмотрение некоторый функционал  $I_s$  соответствия результатов, оценить зависимость последнего от параметров исследуемой системы и вычлнить набор наиболее значимых параметров.

Первичный этап проведения исследований напряженно-деформированного состояния элементов пресс-формы как сложной механической системы проиллюстрирован на рис. 1-5 фрагментами интерферограмм поверхностей пресс-формы при некоторых вариантах сочетаний параметров.

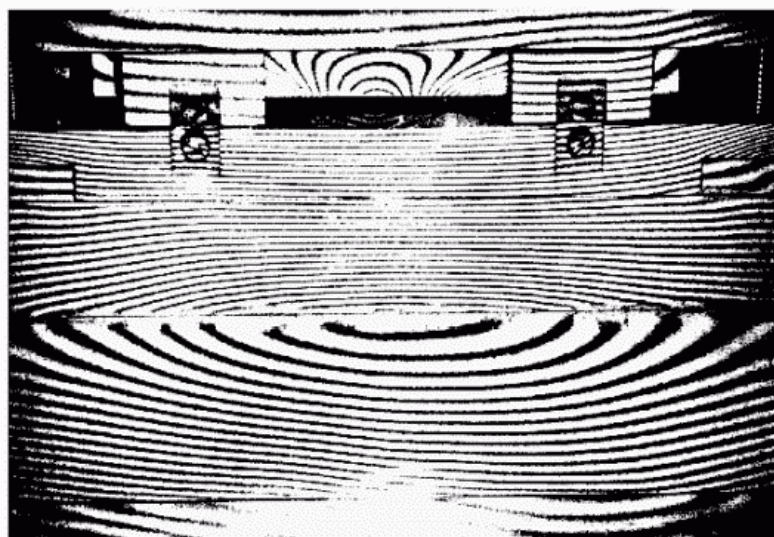


Рис. 1. Фрагмент спекл-интерферограммы блока пресс-формы

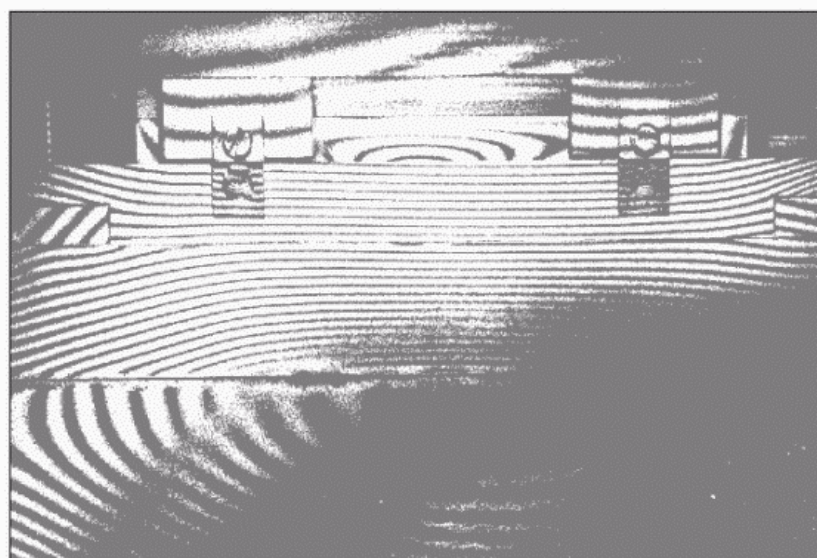


Рис. 2. Фрагмент спекл-интерферограммы блока пресс-формы



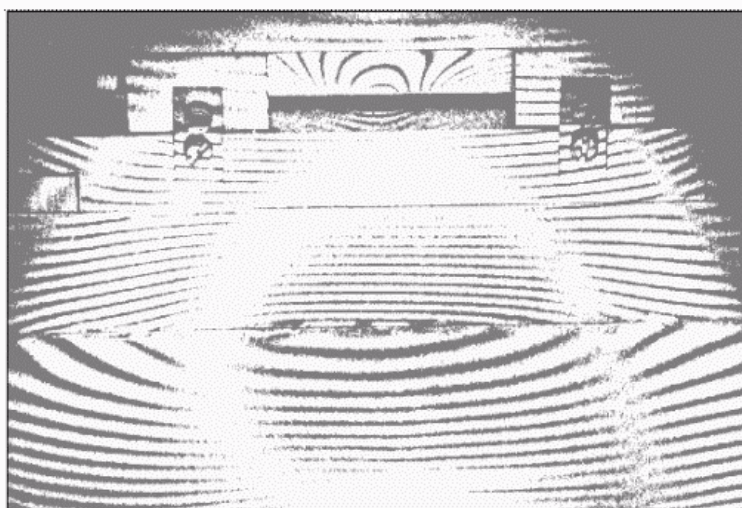


Рис. 3. Фрагмент спекл-интерферограммы блока пресс-формы

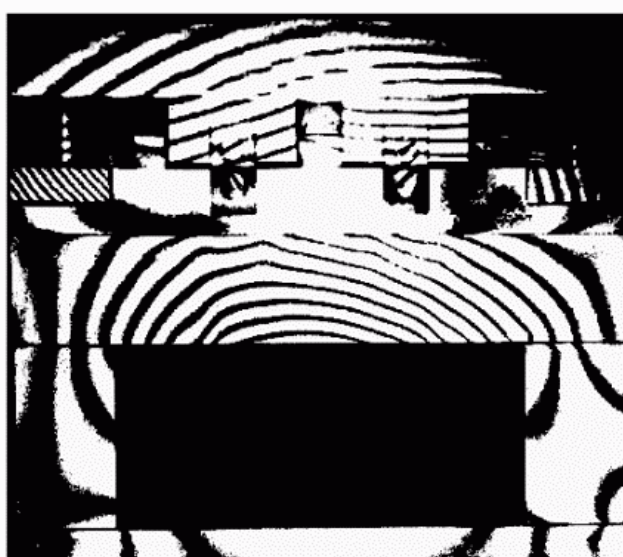


Рис. 4. Фрагмент спекл-интерферограммы пресс-формы



Рис. 5. Фрагмент спекл-интерферограммы блока пресс-формы

Приведенные на рис. 1-5 картины отвечают соответственно случаям: 1) перепад усилия смыкания 250-330 кН при внутреннем давлении в полости 2,5 МПа, винты касаются полуматрицы, опоры отсутствуют; 2) перепад усилия смыкания 250-330 кН при внутреннем давлении в полости 2,5 МПа, винты отсутствуют, опоры отсутствуют; 3,4) перепад усилия смыкания 250-330 кН при внутреннем давлении в полости 2,5 МПа, винты не касаются полуматрицы, опоры отсутствуют; 5) перепад усилия смыкания 1000-875 кН при внутреннем давлении в полости 9,8 МПа, винты затянуты, установлены 2 опоры с натягом 0,29 мм.

Дальнейшими шагами расчетно-экспериментального исследования являются: расшифровка спекл-интерферограмм, сравнение с численными результатами, корректировка модели, повторное сравнение, и т.д. с различным набором параметров. Окончательным результатом процедуры является достоверная численная модель с набором значимых параметров. Приведенная схема в каждом конкретном случае нуждается в конкретизации функционала соответствия результатов численных и экспериментальных результатов, что представляется отдельной сложной задачей.

## **Литература**

1. Ткачук Н.А. Интенсивная схема экспериментальных исследований элементов технологических систем, Динамика и прочность машин, 1998, вып. 56, с. 175-181. 2. Капустин А.А. Количественная оценка голографических интерферограмм с помощью спекл-интерферометрии в прочностных исследованиях. – В кн.: Оптико-когерентные информационно-измерительные системы. – Харьков: ХАИ, 1977, с. 149-154.

Поступила в редколлегию 16.09.2001

УДК 625.2.012.3

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКОГО НАГРЕВА ВАГОННОГО КОЛЕСА ПРИ СБОРКЕ КОЛЕСНОЙ ПАРЫ**

А.В.Щепкин

*Национальный технический университет "ХПИ", Харьков, Украина*

On the basis of the available experimental data the systematic numerical research of one piece rolled railroad car wheel were made using technological heating by induction-heating devices which allowed the establishment of the laws of the stress-strain state of the wheel set elements, during its thermal assembly.

Тепловой метод формирования колесных пар рельсового транспорта обладает рядом преимуществ по сравнению с прессовым [1]: обеспечивает большую

прочность соединений; исключает повреждение сопрягаемых поверхностей в процессе сборки; повышает усталостную прочность осей в процессе эксплуатации; снижает количество брака при формировании колесных пар; обеспечивает возможность автоматизации процесса сборки; допускает возможность разборки без повреждения сопрягаемых поверхностей. Индукционно-нагревательные устройства (ИНУ) для формирования и расформирования колесных пар, работающие на токах промышленной частоты, нагревают колеса за короткое время, просты в изготовлении и надежны в эксплуатации.

В связи с использованием теплового метода сборки колесных пар существенным оказывается вопрос о температурных напряжениях, поскольку колесо (рис. 1) подвергается значительным тепловым воздействиям.

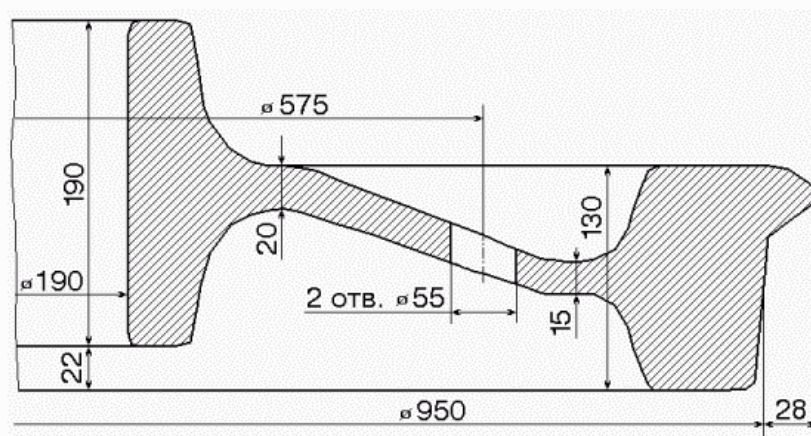


Рис. 1. Вагонное колесо.

Для расчета напряженно-деформированного состояния колеса был применен МКЭ [2], исследуемая деталь аппроксимируется тороидальными КЭ треугольного поперечного сечения с тремя узлами. Минимальный размер элемента в зонах с большими градиентами напряжений составил 0,01 м по радиусу, число КЭ по толщине в дисковой части колеса равно 12 (рис. 2). При учете пластичности была использована теория малых упругопластических деформаций, с использованием метода дополнительных нагрузок [3]. Материал предполагается упругим с линейным упрочнением вплоть до предела прочности.

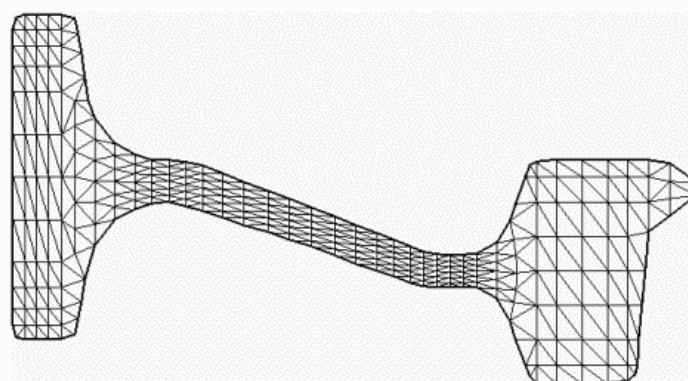


Рис. 2. Схема разбиения детали на конечные элементы.

Для исследования напряженно-деформированного состояния вагонного колеса при технологическом нагреве было использовано распределение температур, полученное экспериментально [4]. Время нагрева ступицы колеса под посадку на ось составляет 2 мин. На рис. 3 приведено распределение температур в колесе в 2 мин. (момент окончания нагрева) и в 2,5 мин. с момента начала нагрева, построенное на основе экспериментальных данных. В 2 мин. расширение ступицы  $u \geq 117 \cdot 10^{-6}$  м, уровень напряжений (расчет упругого деформирования)  $\sigma_e \leq 500$  МПа; в 2,5 мин.  $u \geq 174 \cdot 10^{-6}$  м.

Характеристики материала детали: предел текучести  $\sigma_T = 350$  МПа; модуль упругости  $E = 0,21 \cdot 10^6$  МПа; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,33$ ; предел прочности  $\sigma_B = 600$  МПа; коэффициент линейного расширения  $\alpha = 11,9 \cdot 10^{-6} \text{ град}^{-1}$ ; плотность  $\rho = 7800 \text{ кг/м}^3$ ; удельная теплоемкость  $c = 460 \text{ Дж/кг} \cdot \text{град.}$ ; коэффициент теплопроводности  $K = 80 \text{ Вт/м} \cdot \text{град.}$

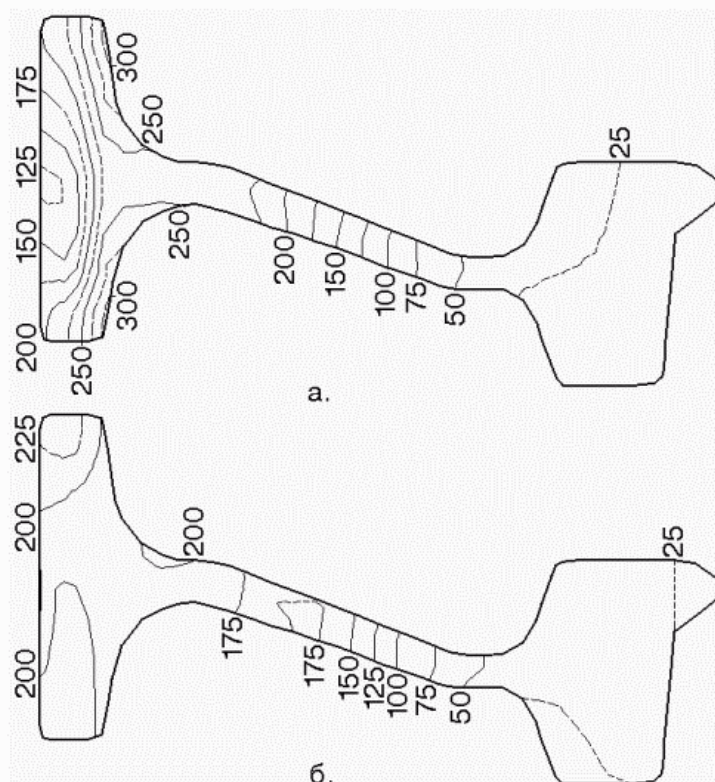


Рис. 3. Распределения температуры в колесе при его нагреве в 2 мин. (а) и 2,5 мин. (б).

На рис. 4 показано распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в поперечном сечении колеса в 2 и в 2,5 мин. с момента начала нагрева, рассчитанное на основе экспериментально полученных температур.

Вагонное колесо имеет ярко выраженную ступицу, что дает возможность, в случае применения для сборки нагрева, снизить энергозатраты. В зависимости от типа нагревателя температурное поле вдоль радиуса



нагреваемой детали может изменяться в широких пределах. Поэтому целесообразно определить такое распределение температуры, которое, обеспечивая технологически заданное расширение отверстия ступицы  $u_{CT} \leq 0,2 \cdot 10^{-3}$  м, минимизирует количество тепла  $W$ , сообщенное детали при ограничении уровня напряжений  $\sigma_e$  и температурного диапазона:  $20^{\circ} \leq T \leq 320^{\circ}$ . Для решения поставленной задачи использовался метод прямого поиска, не требующий вычисления производных исследуемой функции - метод комплексов [5]. При поиске оптимальных температурных полей производится расчет упругого деформирования.

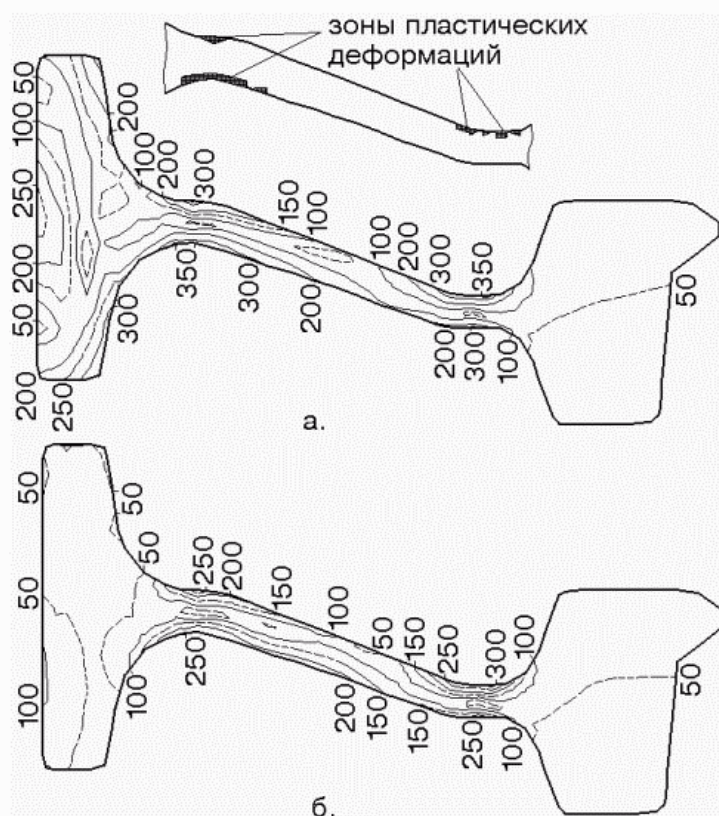


Рис. 4. Распределения напряжений  $\sigma_e$  в колесе при его нагреве в 2 мин. (а) и 2,5 мин. (б).

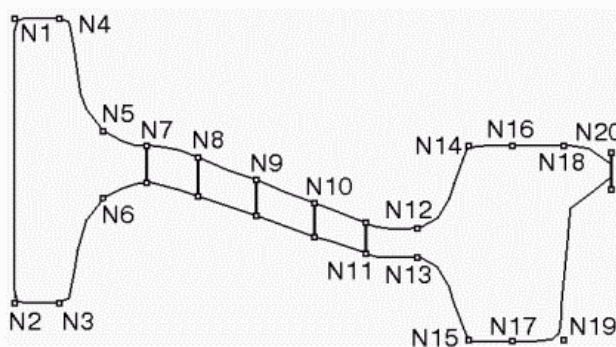


Рис. 5. Схема расположения точек задания температуры в колесе при оптимизации температурного поля



Проводился поиск оптимальных режимов нагрева при задании функции  $T(r,z)$  в 20 точках поперечного сечения колеса и изменении ее в промежуточных точках по линейному закону (рис. 5). На рис. 6 представлены оптимальные температурные поля в колесе при нагреве под посадку на ось в зависимости от принятого ограничения по напряжениям. На рис. 7 показаны эквивалентные напряжения  $\sigma_e$  в поперечном сечении колеса, пересчитанные с учетом пластического деформирования после нахождения оптимального температурного поля.

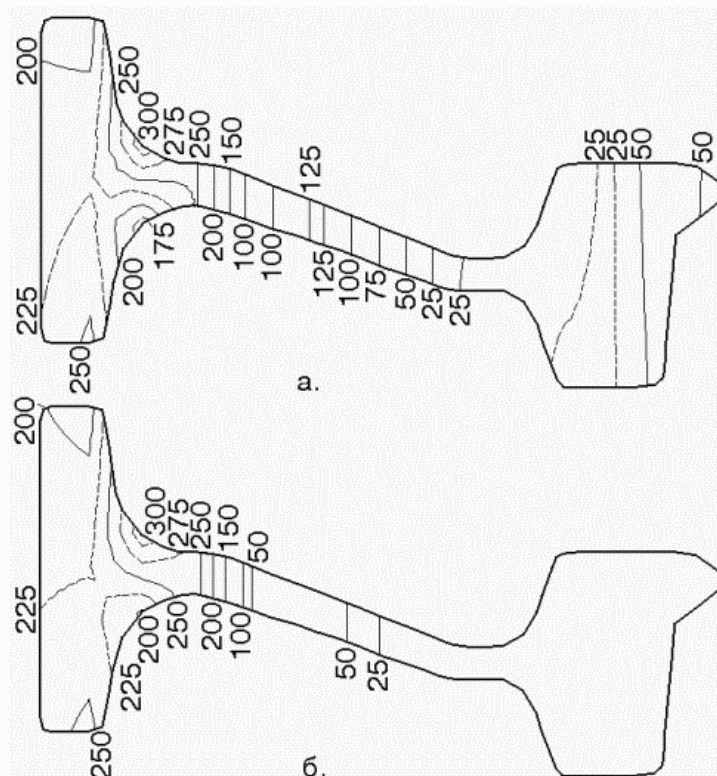


Рис. 6. Оптимальные температурные поля в зависимости от принятого ограничения по напряжениям:  $\sigma_e \leq 350$  МПа (а) и  $\sigma_e \leq 450$  МПа (б), град.

Таблица 1. Расход энергии на технологический нагрев детали, W [кДж]

Режим нагрева	W [кДж]
Равномерный нагрев	29541
Экспериментальные данные, t = 2 мин.	9143
Оптимальное температурное поле, $\sigma_e \leq 350$ МПа	9668
$\sigma_e \leq 450$ МПа	7128
Оптимизация мощности теплового потока:	
$t_{\text{НАГР}} = 2$ мин.; $\sigma_e \leq 350$ МПа	9055
$t_{\text{НАГР}} = 2$ мин.; $\sigma_e \leq 450$ МПа	6746
$t_{\text{НАГР}} = 3$ мин.; $\sigma_e \leq 350$ МПа	9774
$t_{\text{НАГР}} = 3$ мин.; $\sigma_e \leq 450$ МПа	6936

Использование теплового метода нагрева деталей с помощью ИНУ вносит определенные ограничения на форму температурного поля: тепло подается в поверхностный слой боковых поверхностей деталей. На рис. 9 представлены оптимальные схемы распределения мощности тепловых потоков на боковых поверхностях колеса, которые обеспечивают оптимизацию расхода энергии  $W$  при выполнении ограничений по расширению отверстия ступицы, температурам и напряжениям. Время нагрева детали  $t_{\text{НАГР}}$  принято 2-3 мин.; ограничения по напряжениям:  $\sigma_e \leq 350$  МПа или  $\sigma_e \leq 450$  МПа, число параметров оптимизации 27. При поиске оптимальных температурных полей предполагается упругое деформирование.

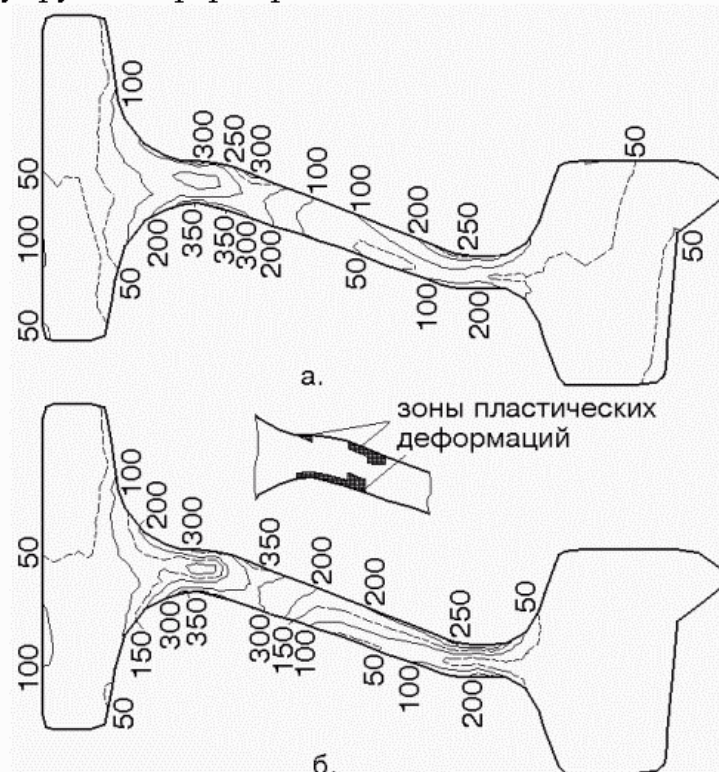


Рис. 7. Эквивалентные напряжения  $\sigma_e$ , обусловленные оптимальным температурным полем в колесе при ограничениях при оптимизации  $\sigma_e \leq 350$  МПа (а) и  $\sigma_e \leq 450$  МПа (б), МПа

На рис. 8 представлены температурные поля в колесе в зависимости от принятых ограничений. Распределение эквивалентных напряжений  $\sigma_e$  в колесе близко к показанным на рис. 6. В табл. 1 приведены данные о расходе энергии на технологический нагрев детали для рассмотренных режимов нагрева.

Была выполнена оптимизация температурного поля в колесе при его нагреве для посадки на ось. Наибольший расход энергии необходим при равномерном нагреве всей детали. Существующий режим нагрева не обеспечивает выполнение ограничений по расширению отверстия ступицы и по напряжениям. Оптимальный нагрев при  $\sigma_e \leq 350$  МПа обеспечивает

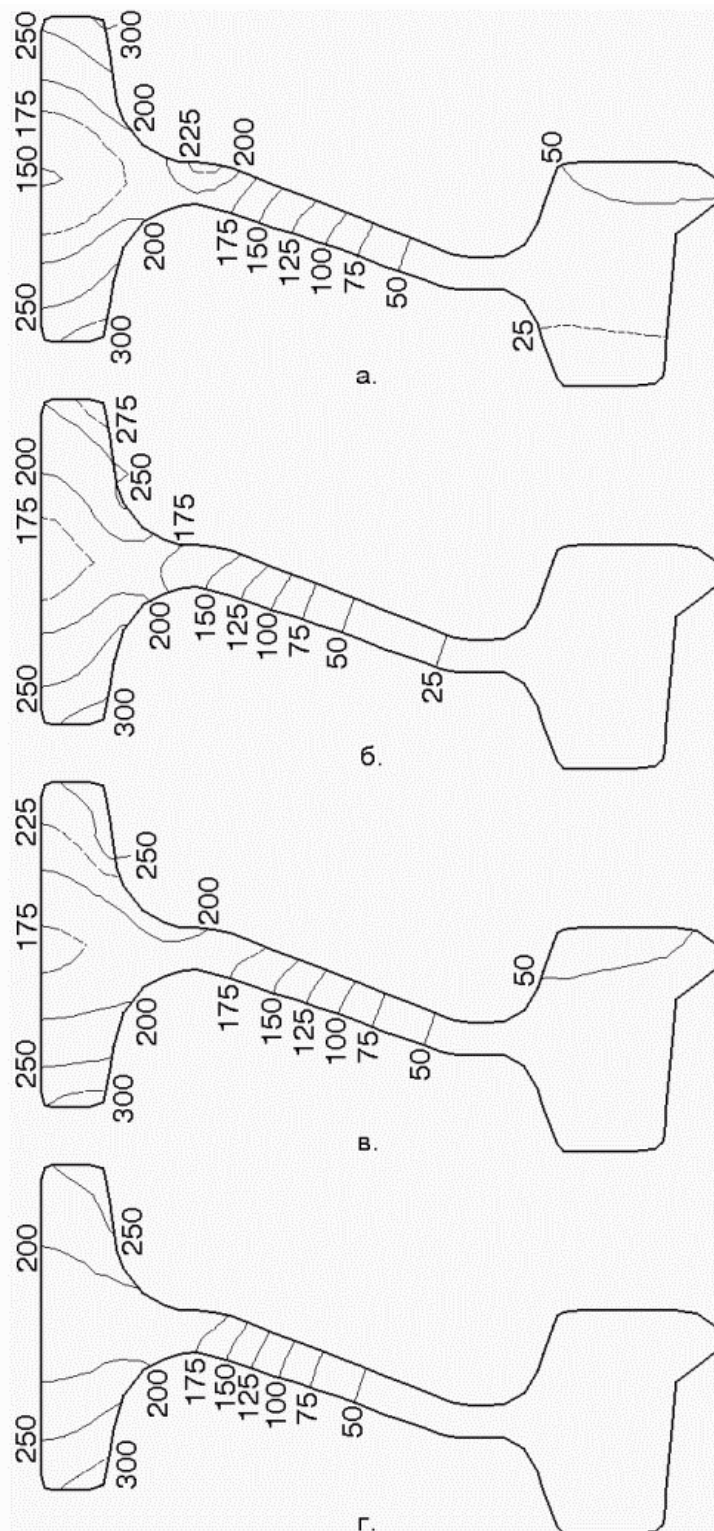


Рис. 8. Оптимальные температурные поля полученные варьированием мощности тепловых потоков в зависимости от ограничений по времени нагрева (а, б - 2 мин.; в, г - 3 мин.) и напряжениям (а, в -  $\sigma_e \leq 350$  МПа; б, г -  $\sigma_e \leq 450$  МПа).

примерно такой же расход энергии, как и существующий режим нагрева, при выполнении всех ограничений и отсутствии пластических деформаций.



Нагрев при  $\sigma_e \leq 450$  Мпа дает экономию в 14-16 % и прочность соединения с осью аналогичную существующему режиму нагрева. Во всех оптимальных режимах необходим асимметричный нагрев ступицы колеса.

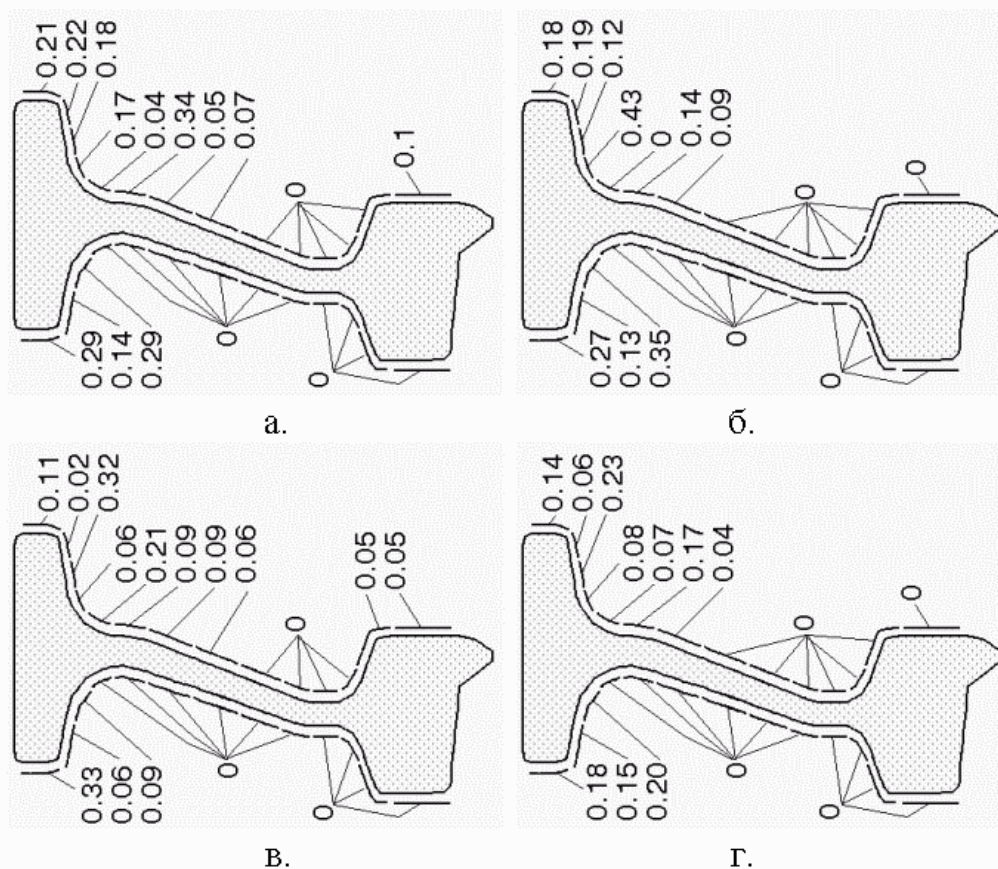


Рис. 9. Распределение мощности тепловых потоков  $q$  [МВт/м<sup>2</sup>] на боковых поверхностях колеса в зависимости от принятых ограничений по времени нагрева (а, б - 2 мин.; в, г - 3 мин.) и напряжениям(а, в -  $\sigma_e \leq 350$  Мпа; б, г -  $\sigma_e \leq 450$  Мпа).

## Литература

1. Андреев Г.Я. Тепловая сборка колесных пар. - Харьков, Издательство Харьковского университета, 1965. - 227 с.
2. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. - М., Высшая школа, 1985. - 392 с.
3. Andreev A.G., Scepkin A.W., Laugwitz F. Untersuchung von Spannungen und Deformationen in Eisenbahnradern infolge induktiver Erwärmung bei der Montage. - Technische Mechanik, Вп. 15, Н. 4 1995, S. 271-280.
4. Приложение методов теории пластичности и ползучести к решению инженерных задач машиностроения: В. 2 ч. Ч. 2. Можаровский Н.С. Качаловская Н.Е. Методы и алгоритмы решения краевых задач. - Киев, Вища школа, 1991. - 287 с.
5. Реклейтис Г., Рейвиндран А., Рэгсдел К. Оптимизация в технике: в 2-кн. Кн. 2. - М.: Мир, 1986. - 320 с.

Поступила в редколлегию 08.09.2001

**СВОБОДНОЕ ДВИЖЕНИЕ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В СПОКОЙНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ГАЗООБРАЗНОЙ СРЕДЕ**

П.М. Заика, В.И. Мельник, А.И. Аникеев

*Харьковский государственный технический университет сельского хозяйства, Украина*

Розглядається вільний рух матеріальної частки, що має власну вагу і займає об'єм, в спокійному газоподібному ізотропному середовищі. Сила опору середовища прийнята пропорційною квадратові лінійної швидкості. Одержано рівняння довжини шляху частки та затрат енергії на подолання сил опору середовища. Інтегральні вирази для поточних декартових координат приведені до компактної форми у вигляді визначених інтегралів.

Актуальность задачи о свободном движении материальной точки в спокойной газообразной среде вытекает из широкого круга ее практических приложений. К такой задаче сводятся математические модели, описывающие движение частиц сельскохозяйственных материалов в различных сепарирующих устройствах, в устройствах для разбросного посева семян зерновых культур, внесения минеральных и органических удобрений, частично задачи почвообработки и т.д.

Рассмотрим свободное движение материальной частицы  $M$ , которая имеет конечные малые размеры и массу  $m$  и перемещается в спокойной изотропной газообразной среде, характеризующейся плотностью  $\rho$ . Ограничимся случаем, когда модуль  $R_c$  силы сопротивления газообразной среды  $\vec{R}_c$ , которую испытывает частица  $M$ , пропорционален квадрату модуля  $\mathcal{G}$  ее линейной скорости  $\vec{g}$ . Для этого случая известны два метода определения силы сопротивления среды  $\vec{R}_c$ . В соответствии с первым, используется коэффициент сопротивления  $\varepsilon = \varepsilon(R_e)$ , зависящий от значения числа Рейнольдса  $R_e$  [1], но не связанный с линейной скоростью  $\mathcal{G}$

$$R_c = \varepsilon \rho F \frac{\mathcal{G}^2}{2}, \quad (1)$$

где  $F$  — площадь проекции материальной частицы  $M$  на плоскость, перпендикулярную к вектору  $\vec{g}$ . Во втором случае силу

$$R_c = k_n m \mathcal{G}^2 \quad (2)$$

определяют через коэффициент парусности  $k_n$  [2]

$$k_n = \frac{k \rho F}{mg}, \quad (3)$$



где  $k$  — коэффициент сопротивления среды [2], окружающей частицу  $M$ . В работе [3] трактовка коэффициентов  $k_n$  и  $k$ , несколько иная  $k_n = k\rho F/m$ , но в любом случае сила сопротивления среды  $R_c$  рассматривается как функция только одной переменной величины — линейной скорости  $\mathcal{G}$ . Отсюда следует, что выбор выражения для  $R_c$  — вопрос не принципиальный. В каждом случае предполагается использование экспериментально определяемых коэффициентов  $\varepsilon$  или  $k_n$  и  $k$ . Далее покажем, что на рассматриваемую задачу это обстоятельство дополнительных ограничений не накладывает и проявляется лишь в определении коэффициента пропорциональности между квадратом линейной скорости  $\mathcal{G}$  и силой  $R_c$ .

Если вектор линейной скорости  $\vec{\mathcal{G}}$  частицы  $M$  понимать как функцию времени  $t$  ( $\vec{\mathcal{G}} = \vec{\mathcal{G}}(t)$ ), то вектор  $\vec{\omega}$  ее полного линейного ускорения можно представить в виде производной  $\vec{\omega} = \frac{d}{dt}\vec{\mathcal{G}}$ . Напомним, что первая производная от модуля линейной скорости  $\mathcal{G}$  по времени  $t$  дает касательную компоненту линейного ускорения [4].

*Силовой баланс.* Обозначив  $\vec{g}$  — вектор ускорения свободного падения и  $m\vec{g}$  — сила веса частицы  $M$ , запишем для этой частицы уравнение ее силового баланса

$$m\vec{\omega} = m\vec{g} + \vec{R}_c, \quad (4)$$

которое путем использования замены (в зависимости от выбранного варианта формулы для силы сопротивления среды  $R_c$  (1) или (2))

$$\gamma = \frac{1}{2mg}\varepsilon\rho F \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{k_n}{g} \quad (5)$$

и, соответствующего ей (5), нового представления вектора силы сопротивления  $\vec{R}_c$

$$\vec{R}_c = -\gamma mg \mathcal{G} \vec{\mathcal{G}}, \quad (6)$$

приводится к виду

$$m\vec{\omega} = m\vec{g} - m\gamma g \mathcal{G} \vec{\mathcal{G}}. \quad (7)$$

Знак “минус” в “новом” выражении для  $\vec{R}_c$  (6) указывает на противоположную ориентацию совпадающих по линии действия векторов  $\vec{R}_c$  и  $\vec{\mathcal{G}}$ .

С учетом малости объема и сферичности формы частицы  $M$ , а также требований на отсутствие внешних возмущающих факторов и на изотропность как материала частицы так и газообразной среды, в которой частица движется в состоянии свободного полета, можно однозначно утверждать, что такое движение всегда остается плоским, а сама плоскость перемещения определяется векторами: начальной скорости  $\vec{\mathcal{G}}_0$  и ускорения

свободного падения  $\vec{g}$ . В таком случае для описания траектории движения частицы  $M$  удобно воспользоваться декартовой системой координат  $OXY$ . Ее точка приложения совпадает с началом вектора  $\vec{g}_0$ , ось ординат ( $OY$ ) — параллельна вектору  $\vec{g}$  ускорения свободного падения, а ось абсцисс ( $OX$ ) и вектор начальной скорости  $\vec{g}_0$  — лежат в одной плоскости и ориентированы в одну сторону. Если под  $x$  и  $y$  понимать координаты (абсциссу и ординату) точки текущего положения частицы  $M$ , а в качестве параметра выбрать время  $t \in [0, \infty]$ , то уравнение траектории движения частицы  $M$  можно представить в параметрическом виде [5, 6]

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (8)$$

когда координаты  $x$  и  $y$  рассматриваются как функции времени  $t$ .

Рассмотрим другую подвижную систему координат, базисный репер которой  $(0, \vec{\tau}, \vec{n})$  совмещен с центром тяжести частицы  $M$  и перемещается относительно исходной системы координат  $OXY$  вместе с частицей  $M$ , а орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  соответственно совпадают с касательной и нормалью к траектории полета частицы  $M$  в точке ее текущего положения, причем  $\vec{\tau} = \vec{g} / g$ , т.е. ориентирован в сторону положительного направления  $\vec{g}$ , а  $\vec{n}$  — к центру кривизны траектории полета частицы  $M$  (параметрической кривой (8)). Теперь представим векторы  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{g}$  и  $\vec{g}$  из уравнения силового баланса (7) в виде разложения на орты  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$

$$\vec{\omega} = \left( \vec{\tau} \frac{d\vartheta}{dt}, \vec{n} \frac{\vartheta^2}{r} \right), \quad \vec{g} = (-\vec{\tau}g \sin \beta, \vec{n}g \cos \beta), \quad \vec{g} = (\vec{\tau}\vartheta, \vec{n}0), \quad (9)$$

где  $\frac{d}{dt}\vartheta$  и  $\vartheta^2/r$  — касательная и нормальная компоненты линейного ускорения частицы  $M$ ;  $r$  — радиус кривизны ее траектории полета (положительная величина), а

$$\beta = \beta(t) = \arctan \left( \frac{\frac{d}{dt}y(t)}{\frac{d}{dt}x(t)} \right) = \arctan \left( \frac{dy}{dx} \right) \quad (10)$$

— угол между касательной к траектории и осью абсцисс ( $OX$ ) в точке текущего положения частицы  $M$ . Исходя из физической сути рассматриваемой задачи и оговоренной привязки системы координат  $OXY$  к вектору  $\vec{g}$ , заключаем, что угол  $\beta$  с течением времени  $t \in [t_0, \infty]$  монотонно убывает ( $\beta_0 \geq \beta(t) \geq -\frac{1}{2}\pi$ ). Тут  $t_0$  — время на момент начала движения, а  $\beta_0 = \beta(t_0)$ . Интервал возможных значений  $\beta_0$  следующий —  $\beta_0 \in [+\frac{1}{2}\pi, -\frac{1}{2}\pi]$ . Поскольку  $\beta$  — угол между осью абсцисс  $OX$  и вектором линейной скорости  $\vec{g}$ , то  $\beta_0$  — это угол между осью  $OX$  и  $\vec{g}_0 = \vec{g}(t_0)$ .

С учетом разложения векторов  $\vec{\omega}$ ,  $\vec{g}$  и  $\vec{g}$  на компоненты (9), уравнение силового баланса (7) дает систему скалярных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{G}}{dt} = -g \sin \beta - \gamma g \mathcal{G}^2, \\ \mathcal{G}^2 = rg \cos \beta. \end{cases} \quad (11)$$

Последняя содержит три неизвестные функции от параметра  $t$  (от времени):  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t)$ ,  $\beta = \beta(t)$ ,  $r = r(t)$  и не является определенной. Добиться ее определенности можно, применив развернутое представление радиуса кривизны траектории  $r$

$$r = -\frac{dS}{d\beta} = -\frac{\mathcal{G}dt}{d\beta}, \quad (12)$$

где  $S$  — длина дуги траектории от начала до текущей точки. Тут предполагается, что  $S = S(t)$  и  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(t)$  рассматриваются как сложные функции  $S = S(\beta(t))$  и  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\beta(t))$ , в которых связь со временем  $t$  опосредствована через угол  $\beta = \beta(t)$ . Знак “минус” обусловлен тем, что в рассматриваемой задаче радиус — величина положительная, а знаки  $d\beta$  и  $dt$  в пределах оговоренных выше физически осмысленных интервалов всегда разные. Этим из равенства (12) корректно исключается знак модуля. Подстановка  $r$  (12) во второе уравнение системы (11) дает

$$dt = -\frac{\mathcal{G}d\beta}{g \cos \beta}. \quad (13)$$

Теперь, выполнив подстановку дифференциала  $dt$  (13) в первое уравнение системы (11), приходим к дифференциальному уравнению Бернулли [5]

$$\frac{d\mathcal{G}}{d\beta} - \mathcal{G} \tan \beta = \frac{\gamma}{\cos \beta} \mathcal{G}^3. \quad (14)$$

Решение уравнения (14) дает выражение для скорости  $\mathcal{G}(\beta)$  как функции  $\beta$

$$\mathcal{G}(\beta) = \left\{ -2\gamma \cos^2 \beta \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right] \right\}^{-\frac{1}{2}}. \quad (15)$$

Тут  $C_g$  — постоянная интегрирования, которую находим из этого же уравнения (15), имея в виду начальные значения  $\beta_0 = \beta(t_0)$ ,  $\mathcal{G}_0 = \mathcal{G}(t_0)$

$$C_g = \frac{1}{2\gamma \cos^2 \beta_0 \mathcal{G}_0^2} + \frac{\sin \beta_0}{2 \cos^2 \beta_0} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta_0}{1 - \sin \beta_0} \right). \quad (16)$$

Из анализа выражения для линейной скорости (15) видно (рис. 1), что функция  $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\beta)$  в случае большого значения начальной скорости  $\mathcal{G}_0$  в физически осмысленном интервале изменения угла  $\beta \in [-\frac{1}{2}\pi, +\frac{1}{2}\pi]$  может

иметь только ниспадающую ветвь (участок замедления). В случае малого значения начальной скорости  $\mathcal{G}_0$  и положительного начального угла  $\beta_0 > 0$ , наблюдается два участка: первый — замедление (подъем), второй — разгон, до определенного предельного значения  $\mathcal{G}_{кр}$  — именуемого критической скоростью [2, 3]. Если же  $\beta_0 < 0$ , то кривая  $\mathcal{G}(\beta)$  очевидно будет иметь опять только один участок, но или разгонный (при малом  $\mathcal{G}_0 < \mathcal{G}_{кр}$ ), или участок замедления (при  $\mathcal{G}_0 > \mathcal{G}_{кр}$ ). Изучим это обстоятельство, для чего возвратимся к определению силы сопротивления среды  $R_c$ . В случае если  $R_c$  (2) выражается через коэффициент парусности  $k_n$ , то автоматически подразумевается существование критической скорости [2, 3]

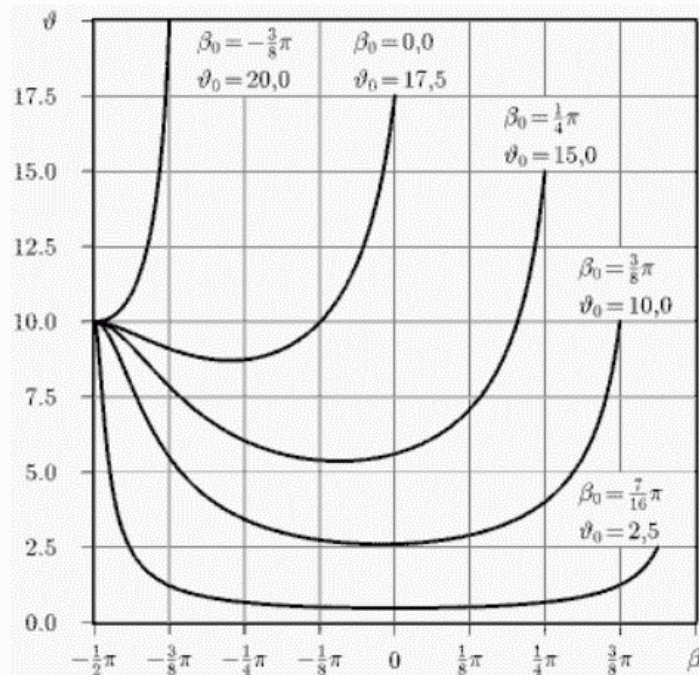


Рис. 1. Связь модуля линейной скорости  $\mathcal{G}$  частицы  $M$  с величиной угла  $\beta$  для различных начальных условий.

$$\mathcal{G}_{кр}^2 = \frac{g}{k_n}, \quad (17)$$

а значит должен существовать предел  $\lim_{\beta \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \mathcal{G}(\beta) = \mathcal{G}_{кр}$ . Раскрыв скобки в (15)

и памятуя о том, что  $\lim_{\beta \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \cos^2(\beta) = 0$ , получаем  $\lim_{\beta \rightarrow \frac{1}{2}\pi} \mathcal{G}(\beta) = \gamma^{-\frac{1}{2}}$ .

Подстановка сюда  $\gamma$  из замены (5) дает (17). Так подтверждается правильность предложенных выше выкладок.

Функциональную связь  $t = t(\beta)$  (времени с углом) (13) иллюстрирует рис. 2. Чем больше способность среды оказывать сопротивление движению

частицы  $M$  (чем больше  $\gamma$ ), тем быстрее  $\beta$  стремится к своему пределу  $-\pi/2$  ( $\beta \rightarrow -\pi/2$ ) или, что то же самое, тем быстрее искривляется траектория.

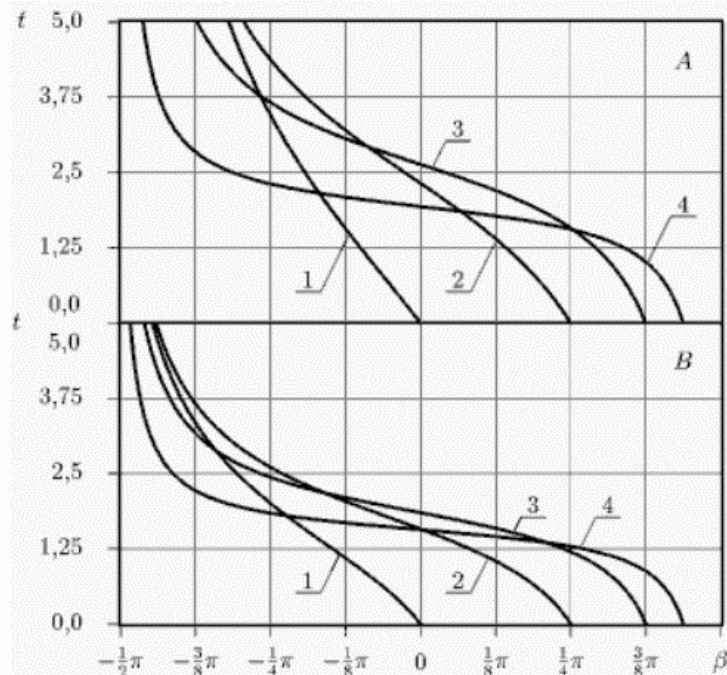


Рис. 2. Продолжительность движения  $t = t(\beta)$ . Графикам  $A$  и  $B$  соответствуют два значения коэффициента  $\gamma$  (0.001 и 0.01), а кривым 1, 2, 3 и 4 — разные значения начального угла  $\beta_0$  ( $0, \frac{1}{4}\pi, \frac{3}{8}\pi, \frac{7}{16}\pi$ ) и начальной скорости  $\mathcal{G}_0$  (20.0, 17.5, 15.0, 10.0).

Понимая декартовы координаты (8) как сложные функции, у которых связь с параметром  $t$  опосредствована через угол  $\beta(t)$ , т.е. что

$$y = y(\beta(t)), \quad x = x(\beta(t)), \quad (18)$$

исключив из (18) параметр (время)  $t$ , гипотетически можно получить непосредственную связь типа  $y = y(\beta)$  и  $x = x(\beta)$ . Выполним эту задачу.

Исходя из физической сути, запишем

$$dy = \mathcal{G} \sin \beta dt, \quad dx = \mathcal{G} \cos \beta dt. \quad (19)$$

Теперь, выполнив подстановку дифференциала  $dt$  из (13), получим

$$y = -\frac{1}{g} \int \mathcal{G}^2 \operatorname{tg} \beta d\beta, \quad x = -\frac{1}{g} \int \mathcal{G}^2 d\beta. \quad (20)$$

Рассмотрим первый интеграл (для  $y(\beta)$ ) из выражений (20). Выполнив подстановку в него развернутого выражения скорости  $\mathcal{G}(\beta)$  из (15), имеем

$$y = \frac{1}{2\gamma g} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right]^{-1} \frac{\sin \beta}{\cos^3 \beta} d\beta. \quad (21)$$



Применим замену переменных

$$u = \ln\left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right). \quad (22)$$

Из (22) следует:

$$du = \frac{2}{\cos \beta} d\beta; \quad \sin \beta = \frac{e^u - 1}{e^u + 1}; \quad \cos^2 \beta = 1 - \left(\frac{e^u - 1}{e^u + 1}\right)^2; \quad \frac{\sin \beta}{\cos^2 \beta} = \frac{1}{2} \operatorname{sh}(u). \quad (23)$$

С применением выражений (22), (23) интеграл (21) записывается так

$$y = \frac{1}{2\gamma g} \int \frac{\operatorname{sh}(u)}{\operatorname{sh}(u) + u - 4C_g} du. \quad (24)$$

Рассмотрим второй из интегралов (20) (для  $x(\beta)$ ). Подставляя в него выражение скорости  $\mathcal{G}(\beta)$  из (15), имеем

$$x = \frac{1}{2\gamma g} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right) - C_g \right]^{-1} \frac{1}{\cos^2 \beta} d\beta. \quad (25)$$

Теперь, используя уже известную замену переменных (22), (23), получим окончательное интегральное выражение для  $x(u(\beta))$

$$x = \frac{1}{\gamma g} \int \frac{\operatorname{ch}\left(\frac{1}{2}u\right)}{\operatorname{sh}(u) + u - 4C_g} du. \quad (26)$$

Длину пути  $S = S(\beta)$ , пройденного частицей  $M$  от начала движения до точки ее текущего положения, можно найти, воспользовавшись вторым уравнением системы (11) и уравнением для определения радиуса  $r$  кривизны траектории (12)

$$S = -\frac{1}{g} \int \frac{\mathcal{G}^2}{\cos \beta} d\beta. \quad (27)$$

После подстановки в (27)  $\mathcal{G}$  из (15)

$$S = \frac{1}{2\gamma g} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right) - C_g \right]^{-1} \frac{1}{\cos^3 \beta} d\beta, \quad (28)$$

и использования замены

$$v = \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right) - C_g, \quad dv = \frac{1}{\cos^3 \beta} d\beta, \quad (29)$$

получаем интеграл вида

$$S = \frac{1}{2\gamma g} \int \frac{1}{v} dv. \quad (30)$$

Его интегрирование и затем подстановка  $v$  в соответствии с (29) дает

$$S = \frac{1}{2\gamma g} \ln \left| \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln\left(\frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta}\right) - C_g \right| - C_s, \quad (31)$$

где постоянная интегрирования  $C_s$  определяется исходя из  $S(\beta(t_0)) = S(\beta_0) = 0$

$$C_s = \frac{1}{2\gamma g} \ln \left| \frac{\sin \beta_0}{2 \cos^2 \beta_0} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta_0}{1 - \sin \beta_0} \right) - C_g \right|. \quad (32)$$

Опираясь на известный опыт [7, 8], со значительной вероятностью можно утверждать, что для неопределенных интегралов (24) и (26) путем конечного числа преобразований подынтегральной функции получить аналитические выражения первообразных невозможно. Поэтому взамен (24) и (26) для практических целей следует рекомендовать определенные интегралы как функции верхнего предела [6]

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} g^2 \tan \beta d\beta, \quad x = -\frac{1}{g} \int_{\beta_0}^{\beta} g^2 d\beta, \quad (33)$$

или

$$y = \frac{1}{2\gamma\beta} \int_{u(\beta_0)}^{u(\beta)} \frac{\text{sh}(u)}{\text{sh}(u) + u - 4C_g} du, \quad x = \frac{1}{\gamma\beta} \int_{u(\beta_0)}^{u(\beta)} \frac{\text{ch}(\frac{1}{2}u)}{\text{sh}(u) + u - 4C_g} du. \quad (34)$$

Результаты численного интегрирования выражений (34) методом парабол Симпсона [9], а также расчетов длины пути  $S$  по (31) представлены на рис. 3. Расчеты тут также проводились только для физически осмысленного интервала изменения угла  $\beta_0 \geq \beta \geq -\frac{1}{2}\pi$  при  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{2}\pi[$ . Значение высоты (ординаты  $y$ ) текущего положения частицы  $M$  в процессе ее движения сначала достигает своего максимального значения  $y_{\max} = y|_{\beta=0}$ , а затем монотонно убывает до  $-\infty$ . Горизонтальное удаление (абсцисса  $x$ ) частицы  $M$  от начальной точки в пределах всего обозначенного интервала изменения угла  $\beta$  монотонно возрастает до предельного значения  $x_{kp} = x|_{\beta=-\frac{1}{2}\pi}$ . Принятый тут индекс соответствует критической скорости  $g_{kp}$ , поскольку и то ( $x_{kp}$ ) и другое ( $g_{kp}$ ) наступает одновременно (при  $\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi$ ). Функция  $S(\beta)$  (путь) монотонно возрастает во всем интервале вплоть до бесконечности  $\lim_{\beta \rightarrow -\frac{1}{2}\pi} S(\beta) = +\infty$ .

Интегралы (34) можно рассматривать как параметрическое уравнение траектории полета частицы (в качестве параметра выступает функция  $u(\beta)$  (22)) и, выполнив численное интегрирование [9], построить их графики (рис. 4).

Наибольший интерес представляют расчеты максимальной дальности  $x_{\max}$  полета частицы и максимальной высоты  $y_{\max}$  ее подъема (рис. 5). Тут под максимальной дальностью  $x_{\max}$  условимся понимать расстояние от начальной точки до точки на траектории полета частицы  $M$ , расположенной на высоте

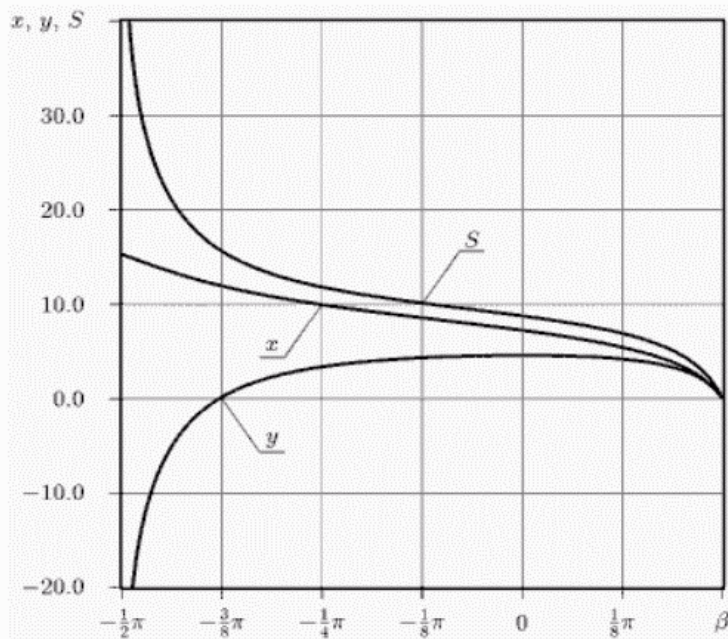


Рис. 3. Связь координат  $x$ ,  $y$  и длины дуги (пути)  $S$ , пройденного частицей  $M$  с величиной угла  $\beta$  между касательной к траектории полета и осью абсцисс.

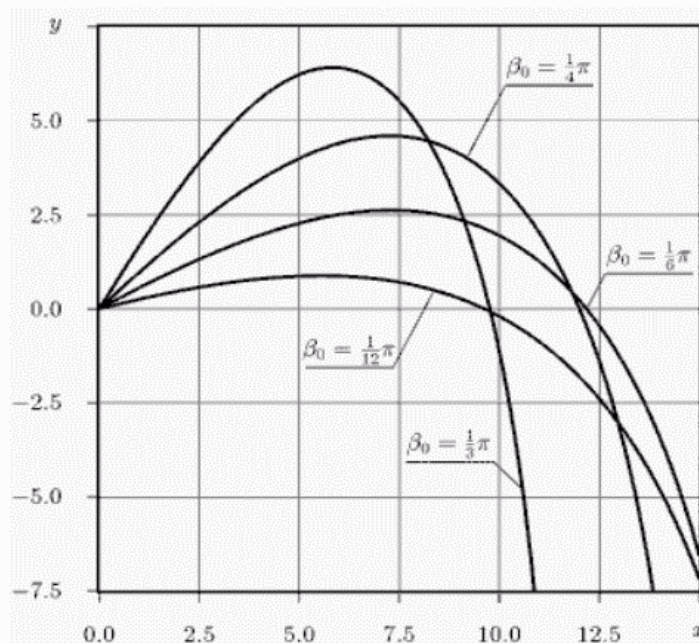


Рис. 4. Траектория полета частицы для различных значений угла  $\beta_0$ .

начала движения  $y_0$  ( $x_{\max} = x|_{y(\beta \neq \beta_0) = y_0}$ ). На рис. 5 в качестве аргумента рассматривается начальный угол  $\beta_0$ . Естественно, наибольшая высота подъема достигается в случае изначально вертикального движения. Экстремум функциональной связи  $x_{\max}(\beta_0)$  лежит в интервале  $\beta_0 \in ]0, \frac{1}{4}\pi[$ . Причем смещается влево ( $\beta_0 \rightarrow 0$ ) пропорционально росту коэффициента  $\gamma$  из выражения силы сопротивления  $R_c(5)$ , т.е. сопротивляемости среды.

Увеличение  $\gamma$  приводит также к снижению максимальной высоты подъема  $y_{\max}$  и максимальной дальности полета  $x_{\max}$  частицы.

*Энергетический баланс.* Кинетическая энергия  $E_k$  частицы  $M$  в момент отрыва равна  $m g_0^2 / 2$ . В процессе свободного полета эта энергия расходуется, во-первых, на изменение потенциальной энергии  $E_p = mgy$  (в начале движения  $y = y_0 = 0$ ) и, во-вторых, на преодоление (работу) сил сопротивления газообразной среды

$$A_c = \int R_c dS. \quad (35)$$

Текущий остаток кинетической энергии  $E_k = m g^2 / 2$ . С учетом сказанного, уравнение энергетического баланса частицы  $M$  можно записать так

$$\frac{m g_0^2}{2} = mgy + A_c + \frac{m g^2}{2}. \quad (36)$$

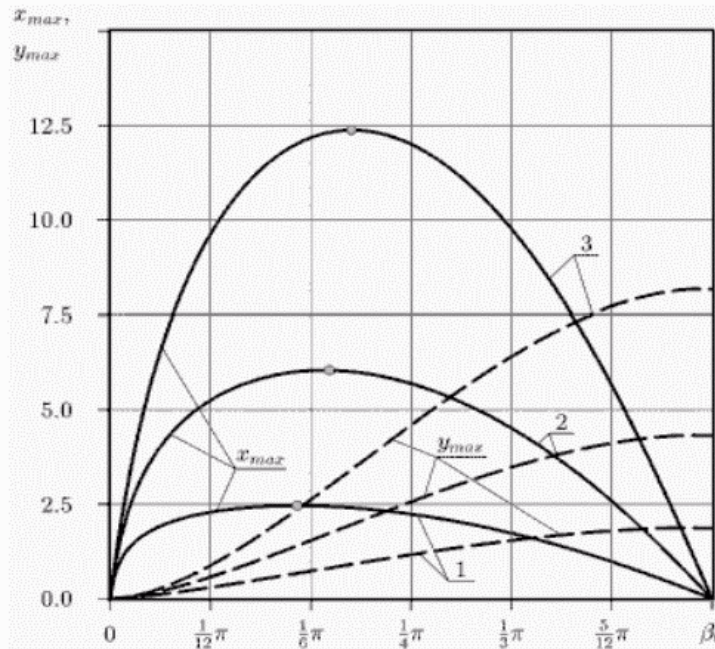


Рис. 5. Связь максимальной высоты подъема  $y_{\max}$  и дальности пролета  $x_{\max}$  частицы  $M$  с величиной угла  $\beta_0$ . “●” отмечены экстремумы  $x_{\max} = x_{\max}(\beta_0)$ .

Кривые 1, 2 и 3 соответствуют значениям  $\gamma$  — 0.1, 0.03 и 0.01.

Запишем интеграл  $A_c$  (35) в развернутом виде, используя  $R_c$  (1),  $\gamma$  (5) и дифференциал  $dS$  в соответствии с подынтегральной функцией (27)

$$A_c = -\gamma m \int \frac{g^4}{\cos \beta} d\beta. \quad (37)$$

После подстановки в (37)  $g$  из (15) имеем

$$A_c = -\frac{m}{4\gamma} \int \left[ \frac{\sin \beta}{2 \cos^2 \beta} + \frac{1}{4} \ln \left( \frac{1 + \sin \beta}{1 - \sin \beta} \right) - C_g \right]^2 \frac{1}{\cos^5 \beta} d\beta. \quad (38)$$

Теперь, применив замену (22), (23), получаем

$$A_c = -\frac{m}{2\gamma} \int \frac{(\operatorname{ch}(u)+1)^2}{(\operatorname{sh}(u)+u-4C_g)^2} du. \quad (39)$$

Умножив интегральное выражение  $A_c$  (39) на  $2\gamma/m$ , а выражение для  $y$  (24) — на  $2\gamma g$ , и, затем, сложив результаты имеем

$$2\gamma gy + \frac{2\gamma A_c}{m} = \int \frac{\operatorname{sh}(u)(\operatorname{sh}(u)+u-4C_g) - (\operatorname{ch}(u)+1)^2}{(\operatorname{sh}(u)+u-4C_g)^2} du. \quad (40)$$

Под знаком интеграла (40) производная от дроби, поэтому записываем

$$2\gamma gy + \frac{2\gamma A_c}{m} = \frac{\operatorname{ch}(u)+1}{\operatorname{sh}(u)+u-4C_g} + C_a, \quad (41)$$

где

$$C_a = \frac{\operatorname{ch}(u_0)+1}{4C_g - \operatorname{sh}(u_0) - u_0}, \quad (42)$$

— постоянная интегрирования. Тут принято, что  $u_0 = u(\beta_0)$  в соответствии с (22). Решаем уравнение (41) относительно  $A_c$  работы силы сопротивления среды

$$A_c = \frac{m}{2\gamma} \left[ \frac{\operatorname{ch}(u)+1}{\operatorname{sh}(u)+u-4C_g} - 2\gamma gy + C_a \right], \quad (43)$$

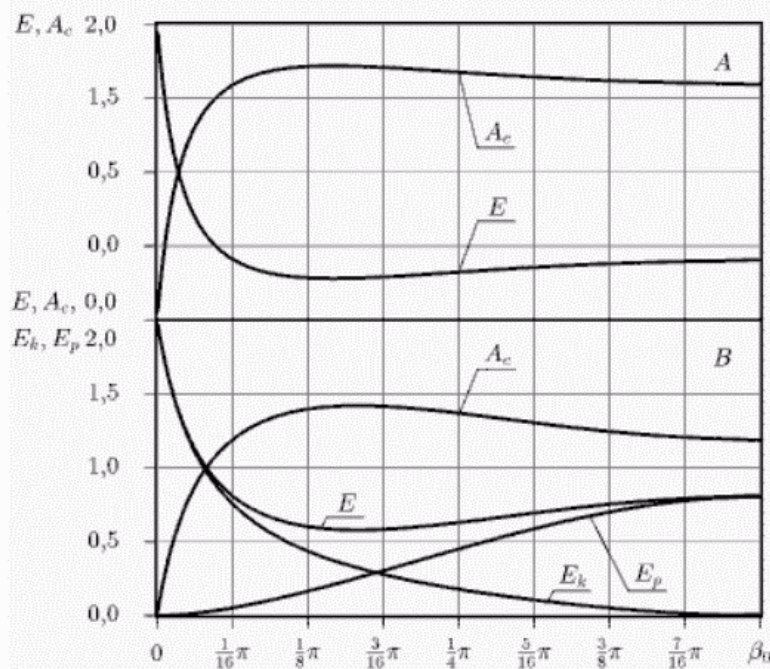


Рис. 6. Энергетический баланс летящей частицы  $M$ , как функция начального угла  $\beta_0$ :  $A$  — в момент пересечения уровня начальной высоты ( $y = y_0 = 0$ );  $B$  — в момент максимального подъема ( $\beta = 0$ ).



и получаем выражение для оценки энергетических потерь летящей частицы  $M$ , обусловленных сопротивлением окружающей среды.

Энергетический баланс (36) иллюстрирует рис. 6. На нем представлены два момента движения частицы: первый (рис. 6А) — соответствует достижению частицей высоты начала движения  $y = y_0 = 0$ ; а второй (рис. 6В) — максимальной высоты подъема  $y = y_{\max}$ . В качестве переменного аргумента взят угол  $\beta_0 \in [0, \frac{1}{2}\pi]$ . В первом случае (рис. 6А) потенциальная энергия  $E_p$  равна нулю, а графики полной  $E$  и кинетической  $E_k$  энергий совпадают. Во втором случае (рис. 6В) на высоте максимального подъема  $y = y_{\max}$  потенциальная энергия  $E_p$  достигает своего максимума, а кинетическая  $E_k$  — минимума. Если движение изначально вертикальное ( $\beta_0 = \frac{1}{2}\pi$ ), то кинетическая  $E_k$  энергия полностью переходит в потенциальную  $E_p$ . В ином случае всегда присутствуют оба вида энергий.

**ВЫВОДЫ.** В настоящей работе для случая, когда сила сопротивления среды пропорциональна квадрату линейной скорости, впервые получены интеграл (31) длины пути  $S(\beta)$ , пройденного частицей от начала движения до текущей точки, и уравнение (43) работы  $A_c$  сил сопротивления  $R_c$ . Определенные интегралы (33) текущих координат  $x(\beta)$ ,  $y(\beta)$  путем предложенной замены независимой переменной (22) приведены к компактной форме (34).

## Литература

1. Кузьминов В.Е. Законы и формулы физики. — К.: Наукова думка, 1989. — 864 с.
2. Воронов И.Г., Кожуховский И.Е., Колышев П.П., Павловский Г.Т. Очистка и сортирование семян. — М.: Гос. изд. с.-х. литературы, 1959. — 581 с.
3. Кленин Н.И., Сакун В.А. Сельскохозяйственные и мелиоративные машины. — М.: Колос, 1980. — 671 с.
4. Гернет М.М., Курс теоретической механики: Учеб. для вузов. — 3-е изд., перераб. и доп. — М.: “Вища школа”, 1973. — 464 с.
5. Пискунов Н.С., Дифференциальное и интегральное исчисления для вузов: Учеб. пособие для вузов. — 13-е изд. В двух томах. Т. 2. — М.: Наука, 1985. — 560 с.
6. Фихтенгольц Г.М., Курс дифференциального и интегрального исчисления. В трех томах. Т. 2. — СПб.: “Лань”, 1997. — 800 с.
7. Брычков Ю.А., Марычев О.И., Прудников А.П. Таблицы неопределенных интегралов. — М.: Наука, 1986. — 192 с.
8. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. 4-е изд., перераб. и доп. — М.: Гос. изд. физ.-мат. литературы, 1963. — 1100 с.
9. Фурманов Р.И., Фурунжиев Р.И., Бабушкин Ф.М., Варава В.В. Применение математических методов и ЭВМ: Практикум. Учеб. пособие для вузов. — Минск: “Высшая школа”, 1988. — 191 с.

Поступила в редколлегию 20.09.2001.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Аврамов К.В.</b> Анализ бифуркаций удвоения периода кусочно-нелинейной системы с помощью метода амплитудных поверхностей	3
<b>Автономова Л.В., Хавин В.Л.</b> Напряженно-деформированное состояние дисков силового каркаса магнитной системы электрофизической установки	12
<b>Андреев А.Г., Иванова В.Н., Оборский И.Л., Щепкин А.В.</b> Исследование напряжений и деформаций в составном колесе электровагона при сборке с использованием комбинированного термического способа	16
<b>Белоцерковский А.Б., Жовдак В.А., Левашов В.А., Трубаев А.И.</b> Расчет колебаний и ресурса трубопровода маслосистемы газоперекачивающего агрегата	25
<b>Бибиц Д.В., Богарсуков С.И.</b> Исследование статической прочности ведущего колеса гусеничной машины	33
<b>Бизюк А.В., Чернобрышко М.В., Ярещенко В.Г.</b> Оценка достоверности математических моделей в задачах высокоскоростного термокинетического деформирования элементов конструкций цилиндрической формы	39
<b>Бондарь С.В., Лавинский В.И., Степук А.В.</b> Напряженное состояние модели составной бандажированной матрицы для полугорячего выдавливания	42
<b>Бортовой В.В., Лавинский Д.В.</b> Контактное взаимодействие цилиндрических ортогональных оболочек	48
<b>Бохонский А.И., Хромов Е.В.</b> Колебания катушек канатавьющих машин	53
<b>Говорущенко Н.Я., Мигаль В.Д.</b> Графоаналитические методы вибрационного диагностирования трактора	57
<b>Гонтаровский П.П., Гармаш Н.Г.</b> К решению контактных задач МКЭ с учетом фрикционного нагрева	67
<b>Долгополова Н.В., Угримов С.В., Шупиков А.Н.</b> Нестационарное деформирование многослойных пластин и цилиндрических оболочек на упругом основании	74
<b>Жовдак В.А., Смирнова Л.М.</b> Статический анализ и собственные колебания рабочего колеса турбокомпрессора с учетом технологических погрешностей	81
<b>Зайцев Б.Ф., Шульженко Н.Г.</b> Управление напряженным состоянием плоской многослойной катушки тороидального магнитного поля	86
<b>Конохова О.В., Ворончагин П.Ф., Конохов В.И.</b> Определение видов ремонта магистральных трубопроводов в зависимости от размеров дефектных участков	91

<b>Кухтов В.Г., Щербак О.В., Лесь А.Н.</b> Комплексная оценка долговечности колесных тормозов тракторов типа Т-150К	97
<b>Левченко Е.В., Гришин Е.В.</b> Особенности напряженно-деформированного состояния сварных роторов	103
<b>Львов Г.И., Лысенко С.В.</b> Комбинированное автофретирование толстостенных цилиндров	107
<b>Маслиев В.Г.</b> О влиянии характеристик связей тележки с кузовом на динамические и эксплуатационные показатели тепловоза	116
<b>Мельник В.И.</b> Преобразование независимых переменных по характеристическому решению гиперболических квазилинейных систем двух уравнений	118
<b>Писарев В.П.</b> Оценка нагруженности балансиров подвески опорных катков гусеничного транспортера-тягача легкой весовой категории	125
<b>Повгородний В.О.</b> Испытания на долговечность изделий авиационной техники	129
<b>Сметанкина Н.В., Свет Н.В., Шупиков Н.В.</b> Термоупругое деформирование многослойных пластин	135
<b>Ткачук Н.А.</b> Определение значимых параметров расчетных моделей элементов механических систем по результатам эксперимента	141
<b>Щепкин А.В.</b> Оптимизация нагрева вагонного колеса при сборке колесной пары	145
<b>Зайка П.М., Мельник В.И., Аникеев А.И.</b> Свободное движение материальной точки в спокойной изотропной газообразной среде	153

НАУКОВЕ ВИДАННЯ  
ВІСНИК НАЦІОНАЛЬНОГО ТЕХНІЧНОГО УНІВЕРСИТЕТУ  
"ХПІ"

Тематичний випуск  
Динамика і міцність машин  
Збірник наукових праць № 25  
Технічний редактор Щепкін О.В.

Обл.вид. № 133-01

Підп.до друку 10.12.2001 р. Формат 60x84 1/16. Папір Copy Paper.  
Друк-ризографія. Гарнітура Таймс. Умов.друк.арк. 9,0.  
Облік.вид. арк. 10,2. Наклад 100 прим. Зам. № 1. Ціна договірна.

---

НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---

Видавничий центр НТУ "ХПІ". Свідоцтво ДК № 116 від 10.07.2000 р.  
Друкарня НТУ "ХПІ", 61002, Харків, вул. Фрунзе, 21

---