УДК 539.3

Э.А. СИМСОН, д-р. техн. наук***, С.А. НАЗАРЕНКО,*** канд. техн. наук***,***
А.Ю. ЗЮЗИН, В.Б. ЛЮБЕЦКАЯ, НТУ "ХПИ" (г. Харьков)

АНАЛИЗ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ДЛЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ МОДЕЛЕЙ КОНСТРУКЦИЙ

В статті пропонуються методи аналізу чутливості складних скінченноелементніх моделей з високим ступенем геометричної і фізичної інформативності; орієнтовані на великі розмірності векторів перемінних стану і проектування, мінімальну кількість звертань до процедури прямого розрахунку. Досліджено обчислювальні етапи одержання градієнтів функціоналів конструкцій. Розглянуто області застосування розробленого математичного апарату.

Complicated finite-element models with high geometric and physical self-descriptiveness sensitivity analysis methods are given in this article. The methods have been oriented on high dimensions of state and design variables and minimum referencing to the straight calculation procedure. Computation stages of construction gradients functional derivation are investigated. The developed mathematical apparatus application domains are examined.

Sensitivity analysis methods of high both geometric and physical informational content are suggested for complicated FEA models, especially with design variables vector of high dimension, to minimize numbers of straight calculation procedure activation. Computational stages to obtain gradients of constructional functionals are investigated. Application domain for developed mathematical apparatus is discussed.

Анализ чувствительности представляет собой получение производных от основных характеристик проектируемой системы (мощность, к.п.д., статические и динамические напряжения, вибрационные характеристики и др.) по всем варьируемым параметрам, описывающим пространственную геометрию конструкции, свойства материала ее элементов и др. Этот математический аппарат начал применяться в развитых странах при проектировании некоторых аэрокосмических и машиностроительных конструкций [1]. Однако неразвитость теории и численных методов анализа чувствительности для реальных задач проектирования, отличающихся необходимостью использования комплексных моделей функционирования изделия, сложной пространственной геометрией конструкции сдерживает создание и применение соответствующих программных средств.

Метод конечных элементов (МКЭ) является наиболее мощным и распространенным методом расчета конструкций [2,3]. Однако, например, специфика анализа чувствительности при использовании КЭ изопараметрического семейства, позволяющих описывать детали пространственной формы и трехмерного вибрационного, напряженно-деформированного и электрического полей, а, следовательно, наиболее эффективных и универсальных с точки зрения решения задач расчета [2], практически не исследована. В настоящее время на рынке стран СНГ практически отсутствуют программные комплексы, имеющие блоки анализа чувствительности [3,4]. В лучшем случае при конечноразностном приближении производных математическое обеспечение трудоемкой задачи анализа используется в качестве "черного ящика" для получения значений функционалов состояния в пробных точках пространства переменных проектирования. Применение этого подхода ограничено малой размерностью вектора проектных переменных.

Целью проведенных исследований была разработка методики анализа чувствительности сложных конечноэлементных моделей с высокой степенью геометрической и физической информативности (дискретизации), а значит и достоверности к исходному объекту; ориентированной на большие размерности векторов переменных состояния и проектирования и минимальное число обращений к процедуре прямого расчета.

Разработанная методика анализа чувствительности предполагает следующую последовательность вычислительных этапов: КЭ дискретизация задачи анализа; введение вектора сопряженных переменных; введение пространства проектных переменных; вычисление градиентов функционалов.

Рассмотрим технику дифференцирования функционалов для случая статического нагружения КЭ модели

$$Z(\vec{u},\vec{y})=K(\vec{u})\vec{y}-\vec{F}(\vec{u})=\vec{0} \qquad (1)$$

где $\vec{y},\vec{F}$ – векторы узловых перемещений (для метода перемещений) и нагрузок; $K(\vec{u})$ – матрица жесткости системы; $\vec{u}$ – вектор варьируемых конструктивных параметров системы.

В большинстве практических задач количество проектных переменных значительно превышает число исследуемых функционалов. Для таких задач метод, основанный на введении сопряженной задачи более эффективен, чем метод, построенный на прямом дифференцировании. Для отыскания градиента функционала качества $J = J(\vec{u},\vec{y})$ в рассмотрение введем сопряженную задачу. С учетом симметрии матрицы жесткости она принимает вид $K^T(\vec{u})\vec{\psi} = K(\vec{u})\vec{\psi} = \vec{g} = \vec{\nabla}_y J$. Это уравнение описывает ту же конечноэлементную модель механической системы, но нагруженную фиктивной системой сил g, определяемой видом функционала качества. После ввода дискретного гамильтониана и учета матричного уравнения, полученного в результате дифференцирования задачи анализа (1), градиент функционала принимает вид

$$\begin{gathered} H = \vec{\psi}^T\left(K(\vec{u})\vec{y}-\vec{F}(\vec{u})\right)-J(\vec{u},\vec{y}), \\ \vec{\nabla}_u J = \left\{-\frac{\partial H^я}{\partial u_i} = -\vec{\psi}^T\left(K'_{u_i}\vec{y}-\vec{F}'_{u_i}\right)+\frac{\partial J}{\partial u_i}\right\}_{i=\overline{1,n}} \end{gathered} \qquad (2)$$

где производную от гамильтониана берем лишь по явно входящему $\vec{u}$.

Как показано в работе [5], градиент собственного значения (собственной частоты, критической нагрузки) имеет вид

$$\lambda'_{u_i} = \vec{y}^T [K' - \lambda M'] \vec{y} / \vec{y}^T M \vec{y} \qquad (3)$$

Принципиальной проблемой анализа чувствительности и последующей оптимизации конструкции является характер введения варьируемых параметров. Переменные проектирования можно разделить на глобальные параметры, описывающие конструкцию в целом (например, характерные размеры в плане, радиусы главных кривизн и т.д.), и локальные, описывающие геометрические и физические параметры части конструкции (например, распределение толщины). Как видно из соотношений (2) и (3) в первом случае нужно брать производные от характерных матриц всей конструкции, а во втором – от матриц гораздо меньшей размерности

$$K = \sum_i k_i \qquad\qquad K'_u = k'_u .$$

При выборе того или иного варианта введения варьируемых параметров необходимо учитывать: требование взаимной независимости, преимущества аддитивного и локального характера зависимости гамильтониана от проектных переменных; согласование КЭ-дискретизации конструкции со схемой варьирования ее формы при анализе чувствительности; проблему учета конструктивных ограничений при оптимизации; сохранение в пространстве допустимых конструктивных форм справедливости принятых математических моделей; технологическую реализуемость допустимых вариантов и др. Этот комплекс требований в реальных задачах проектирования ставит решение проблемы введения варьируемых параметров в ряд трудно формализуемых атрибутов инженерного и конструкторского искусства.

Общей и основной частью проблемы анализа чувствительности является вывод производных от конечноэлементных матриц по “естественным" варьируемым параметрам КЭ. Наиболее сложной и важной является разработка схем анализа чувствительности для изопараметрических КЭ. Наиболее естественное для изопараметрической концепции введение варьируемых параметров – в узлах КЭ связано с определенными проблемами и недостатками: гамильтониан КЭ не аддитивен по отношению к узловым параметрам; гамильтонианы нескольких КЭ зависят от одной проектной переменной; возможно существенное нарушение явных двусторонних ограничений внутри КЭ при соблюдении их в узлах, вычислительная трудоемкость. Распределение функциональных производных по узловым параметрам носит нерегулярный парадоксальный характер в силу особенностей возмущений геометрии КЭ, пропорциональных функциям формы (рис. 1) и плохо пригодно для решения практических задач (рис. 2). На рис.3 приведена более «физичная» картина градиентов. Пример приведен для стальной цилиндрической панели, имеющей следующие геометрические параметры: длина – 0,3 м, радиус кривизны – 0,3 м, толщина – 0,02 м. При исследованиях использовались изопараметрические КЭ, построенные на теории оболочек средней толщины.

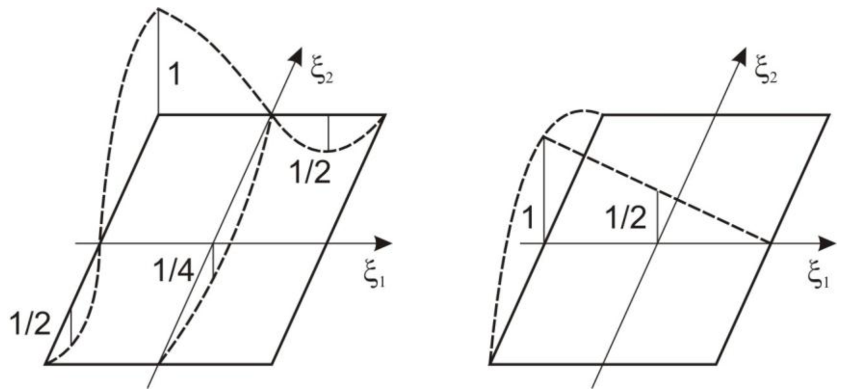

Рис.1. Функции формы серендипова семейства.

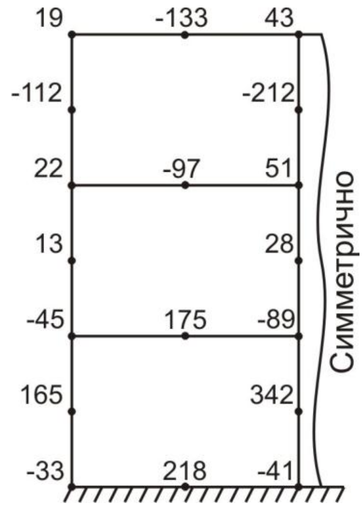

Рис.2. Распределение производных основной собственной частоты по узловым параметрам толщины для цилиндрической панели. 1ед. = 10 Гц/м.

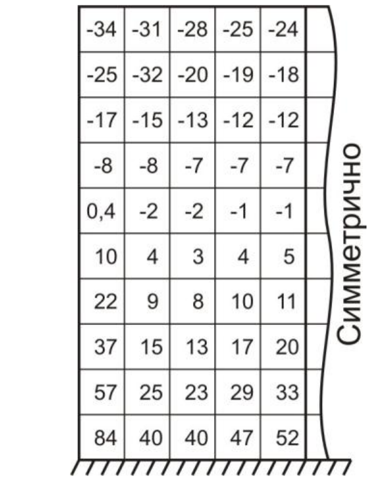

Рис.3. Распределение производных основной собственной частоты по параметрам толщин подобластей КЭ (подэлементов). 1ед. = 10 Гц/м.

Будем использовать подход, в рамках которого на первом этапе после решения исходной и сопряженных КЭ задач выполняется анализ чувствительности функционалов к возмущению естественных варьируемых параметров КЭ-дискретизации конструкции, а на втором этапе (там, где этого требует решение перечисленных выше проблем) осуществляется переход к анализу чувствительности в специальном пространстве форм, определяемом конструктивными и технологическими особенностями, в котором и решается реальная задача оптимального проектирования. После дискретизации геометрии системы и введения набора варьируемых параметров производится пересчет функциональных производных в материальные.

При определении функциональных производных возникает проблема дифференцирования характерных матриц, которая вызывает затруднения при неявном задании матриц конечных элементов. В этом случае могут быть применены конечноразностные схемы или неявные процедуры, повторяющие алгоритм построения характерных матриц КЭ. При этом, как видно из соотношений (2) и (3), производные локальных матриц по проектным переменным рационально использовать в «связке» с соответствующими компонентами векторов сопряженных переменных и переменных состояния. Такой подход решает многие из перечисленных проблем, а главное, позволяет унифицировать математический аппарат анализа чувствительности.

На рис. 4 приведена первая собственная форма колебаний и напряжений конструкции криволинейного “толстого” стержня переменного сечения, защемленного по одной стороне. На рис. 5 приведен полученный график чувствительности основной собственной частоты к изменению радиуса стержня. Отметим, что, как правило, в нижней части спектра зоны экстремальных коэффициентов чувствительности собственных частот к добавлению материала совпадают с областями максимальных динамических напряжений (положительные) и перемещений (отрицательные).

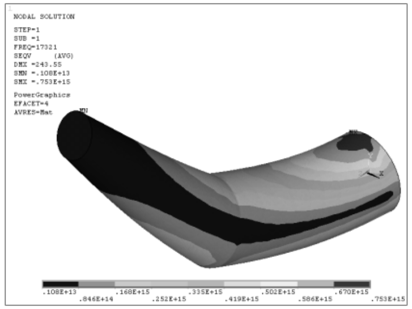

Рис.4. Форма интенсивности динамических напряжений на первой собственной форме колебаний.

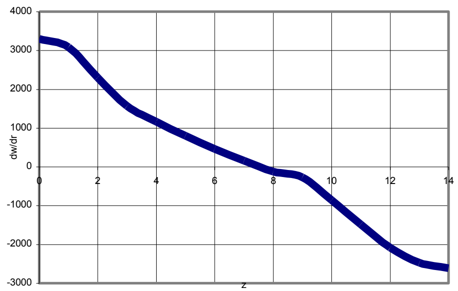

Рис. 5. Анализ чувствительности первой собственной частоты.

На рис. 6 и 7 приведены для примера картины функциональных производных к добавлению материала на различных поверхностях конструкций лопаточных машин. При исследованиях использовались трехмерные изопараметрические КЭ.

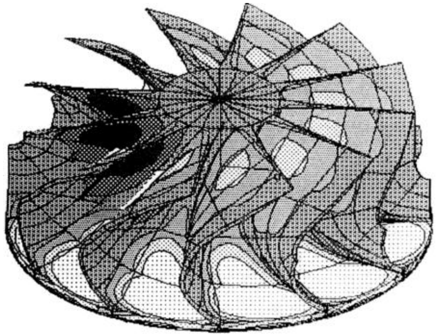

Рис.6. Анализ чувствительности функционала максимальных эквивалентных напряжений от центробежной нагрузки к нормальным перемещениям точек поверхности рабочего колеса турбины ТКР-8.5-ТВ.

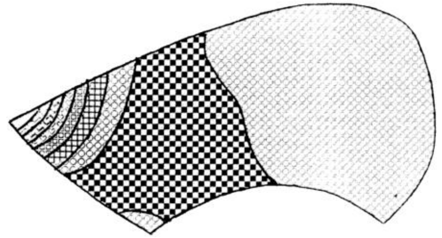

Рис. 7. Анализ чувствительности второй собственной частоты к изменению распределения толщин лопасти гидротурбины ПЛ 20-811(ГЭС Варцихе).

Помимо основного использования в системах оптимального автоматизированного и интерактивного проектирования коэффициенты чувствительности также могут применяться при вибродиагностике и неразрушающем контроле, стохастическом анализе характеристик конструкций в поле случайных отклонений свойств материала и геометрических параметров, назначении полей допусков на изготовление, а также корректировке или идентификации математической модели конструкции. Для приближенной оценки характеристик конструкций с малыми изменениями $\Delta\vec{u}$ от базового варианта $\vec{u}_0$, может использоваться быстрый пересчет $J \approx J_0 + \vec{\nabla}_u^T J_0 \Delta\vec{u}$.

Анализ чувствительности можно использовать для защиты элементов "know-how" в новых конструкциях путем патентования (или введения в режим конфиденциальности) геометрических размеров и соотношений, которые в наибольшей степени определяют показатели качества новой конструкции (а значит, целевой функционал имеет к ним максимальную чувствительность).

Список литературы: 1. *Хог Э., Чой К., Комков В*. Анализ чувствительности при проектировании конструкций. М.: Мир, 1988. 428 с. **2.** *Зенкевич О.К*. Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1978. 519 с. **3**. *Жеков К.С*. Современные аналитические возможности ANSYS. // САПР и графика. 1998. №9. С. 50–52. **4**. http://www.ansys.com/services/documentation/manuals70.htm – Welcome to ANSYS 7.0 Documentation. **5**. *Богомолов С.И., Назаренко С.А., Симсон Э.А.* Расчет и оптимизация оболочек общей формы на базе смешанного подхода МКЭ // Динамика и прочность тяжелых машин.– 1986.– С.– 91-97.

Поступила в редколлегию 05.04.03