

Н.А.ТКАЧУК, канд.техн.наук; *Ю.В.ВЕРЕТЕЛЬНИК*; НТУ «ХПИ»

К ВОПРОСУ АНАЛИЗА И СИНТЕЗА ЭЛЕМЕНТОВ БИОМЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Запропоновано методи для об'ємного моделювання операцій ендопротезування опорно-рухового апарата та хребта, розрахунків міцності та жорсткості протезованих елементів та наслідків операції для вибору оптимальної схеми операції та параметрів протезів.

The development of methods for the volumetric modelling of endoprosthesis operations on the locomotorium and spine, postoperative complications is proposed, for determination of prosthetic elements strength and rigidity and for choosing of optimum operative scheme and prosthetic parameters taking into account postoperative complications.

1. Состояние вопроса.

В настоящее время повышения эффективности оперативного вмешательства для протезирования опорно-двигательного аппарата сдерживается отсутствием средств предоперационного моделирования самой операции, расчетов прочности и жесткости элементов, а также прогнозирования поведения опорно-двигательного аппарата после операции в реальных условиях жизнедеятельности человека. В то же время растет потребность в таких операциях во всем мире. Это приводит к необходимости разрабатывать принципиально новые схемы операций. Параметры протезов и схема оперативного вмешательства при этом отрабатываются на протяжении продолжительного времени [1]. В то же время при этом достаточно сложно производить учет индивидуальных особенностей пациента.

Все эти проблемы может устранить компьютерное объемное параметрическое моделирование, которое использует методы, алгоритмы и программное обеспечение моделирования элементов механических систем [3]. Подходы, которые используются для проектирования и расчетов напряженно-деформированного состояния элементов сложных механических систем, позволяют оперировать с объектами сложной формы, материал которых существенно неоднородный, анизотропный и имеет нелинейности физико-механических характеристик.

Таким образом, приобретенный опыт моделирования и расчетов дает возможность создать методы, алгоритмы и программное обеспечение для глубокого и индивидуализированного моделирования, анализа последствий и синтеза щадящих схем оперативного вмешательства. В то же время исследуемые элементы биомеханических систем (ЭБМС) обладают специфическими характеристиками формы, свойств материала, условий нагружения и сопряжения. Все это требует новых подходов к их моделированию и исследованию, создания математических моделей физико-механических процессов, геометрических пространственных моделей, а также определенного семейства численных моделей исследуемых объектов.

2. Постановка и формализация задачи.

Рассмотрим элементы сложных биомеханических систем как систему взаимодействующих тел, поведение которой (математическая модель) описывается в общем виде в операторной форме

$$L(u, P, f, t) = 0, \quad (1)$$

где L – некоторый оператор, структура и параметры которого зависят от типа исследуемого явления, состава биомеханической системы, граничных условий, нагрузки и условий сопряжения;

u – массив переменных состояния, относительно которых сформулирована задача, образующих пространство решений U ;

P_M – массив параметров (характеристики физико-механических свойств, геометрические размеры, величины присоединенных масс, жесткости), составляющих параметрическое пространство P_M ;

f_M – массив, характеризующий действующие на систему внешние нагрузки (поверхностные, объемные, сосредоточенные нагрузки), составляющие пространство нагрузок F_M ;

t – время или иной параметр, характеризующий исследуемое явление как процесс.

В частности, для большинства случаев удобно сформулировать напряженно-деформированное состояние в перемещениях. В этом случае $U_M = \bigcup_s u_{M_i}^{(s)}$, где

$u_{M_i}^{(s)} = u_{M_i}^{(s)}(r_i, t)$ – массив перемещений точек элемента s исследуемой системы функций с радиус-вектором r с компонентами $r_i (i = 1, 2, 3)$, соответствующих моменту времени t . Соответственно $P_M = \bigcup_s p_M^{(s)}$, $F_M = \bigcup_s f_M^{(s)}$. Например, для не-

которого элемента исследуемой системы (массивное тело) общее уравнение (1) расписывается в виде системы уравнений (индексы $*$, $^{(s)}$ опущены) в области Ω , занимаемой телом [4-6]:

$$2\varepsilon_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i}; \quad \sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}; \quad \sigma_{ij,j} + \bar{f}_i = 0, \quad (2)$$

где σ_{ij} , ε_{ij} – компоненты тензоров напряжений и деформаций, связь между которыми задается тензором упругих постоянных C_{ijkl} ;

\bar{f}_i – составляющая объемной нагрузки.

Соотношения (2) дополняются граничными условиями

$$u_i|_{S_u} = g_i(\mathbf{r}), \quad \sigma_i|_{S_\sigma} = \bar{f}_i(\mathbf{r}), \quad (3)$$

где S_u , S_σ – части поверхности тела, на которых заданы геометрические и силовые граничные условия;

g_i , \bar{f}_i – заданные вектор-функции перемещений и поверхностных нагрузок.

В случае контактного взаимодействия тел p , q с гладкими поверхностями на части поверхности S_c каждого тела добавляются условия непроникновения:

$$(u_v^p + u_v^q) \Big|_{S_c} \leq \delta(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где u_v – составляющая перемещения по нормали v к поверхности;

δ – начальный зазор в сопряжении тел.

Как известно [4-6], исходная задача (1)-(4) приводится к вариационной задаче

$$(\bar{L}_M u_M, v_M) = (f_M, v_M), \quad \forall v_M, \quad (5)$$

где \bar{L}_M – оператор краевой задачи внутри области Ω ;

(*,***) – соответствующая билинейная форма, или вариационному неравенству

$$(\bar{L}_M u_M, v_M - u_M) \geq (f_M, v_M - u_M), \quad \forall v_M \in G, \quad (6)$$

где G – множество, задаваемое ограничениями (4).

Вариационная задача (5) или неравенство (6) приводятся к проблеме минимизации функционала $I(u_M)$:

$$I(u_M) = 1/2(\bar{L}u_M, u_M) - (f_M, u_M) \rightarrow \min. \quad (7)$$

Для случая (5) ищется безусловный минимум, а для случая (6) – минимум на множестве G в пространстве функций u_M . Данный квадратичный функционал состоит из квадратичной $a(u_M, u_M)$ и линейной $b(u_M)$ форм. При этом квадратичная форма в (7) представляет собой потенциальную энергию деформации исследуемой системы, а линейная – работу внешних сил. Например, для пространственной задачи теории упругости билинейная форма, порожающая квадратичную составляющую (7), имеет вид:

$$a(u_M, v_M) = (\bar{L}u_M, v_M) = \int_{(\Omega)} \sigma_{ij}(u_M) \varepsilon_{ij}(v_M) d\Omega, \quad (8)$$

а линейная –

$$b(u_M) = (f_M, u_M) = \int_{(S_u)} \bar{f}_i \cdot u_{M_i} dS + \int_{(\Omega)} \bar{f}_i \cdot u_{M_i} d\Omega. \quad (9)$$

Для определения напряженно-деформированного состояния тел исследуемой системы, т.е. решения некоторой текущей задачи анализа, необходимо или решить систему уравнений (2)-(3) (или неравенств (4) для случая контактного взаимодействия), или вариационное уравнение (5) (соответственно неравенство (6)), или произвести минимизацию функционала (7).

Соотношения (1-9) составляют математическую модель исследуемых процессов в ЭБМС. Ставится задача выбора параметров p_M^* этой системы, удовлетворяющих некоторой системе критериев. Поскольку специфика исследований элементов биомеханических систем состоит в том, что уже решение задачи анализа представляет собой большую проблему (например, определение формы области Ω , в пределах которой формулируется начально-краевая задача; задание граничных условий; задание свойств материалов и т.д.), то поставленная задача синтеза имеет на порядок большую степень сложности. В связи с этим был предложен путь исследу-

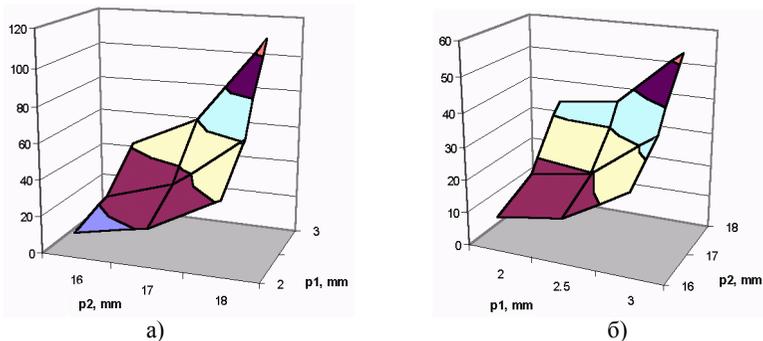


Рисунок 2 – Зависимости относительных максимальных осевых перемещений (а) и относительных максимальных эквивалентных напряжений от варьируемых параметров (б)

5. Заключение

Проведенный комплекс расчетных исследований позволяет переходить к исследованию костно-металлических блоков, сегментов позвоночного столба, биомеханических систем с керамическими компонентами, существенно сократив подпространство варьируемых параметров, определяющих свойства эндопротеза как составного элемента исследуемой системы. Это существенно уменьшает объем вычислительных работ при исследовании всей системы.

В то же время остаются открытыми вопросы автоматизированного анализа и синтеза биологических компонент исследуемых биомеханических систем. Вместе с решением этого вопроса необходимо создать специализированный программный комплекс для генерирования моделей ЭБМС, их параметрического анализа и решения задач для конкретных случаев эндопротезирования, что составляет предмет дальнейших исследований по данной проблеме.

Список литературы: 1. Paul A. Glazer, Olivier Colliou, Stephen M. Klisch, David S. Bradford, H. Ulrich Bueff, Jeffrey C. Lotz. Biomechanical Analysis of Multilevel Fixation Methods in the Lumbar Spine. – Spine 1997 Volume 22, Number 2. – PP. 171-182. 2. Гриценко Г.Д., Малакей А.Н., Мургородский Ю.Я., Ткачук А.В., Ткачук Н.А. Интегрированные методы исследования прочностных, жесткостных и динамических характеристик элементов сложных механических систем // Механіка та машинобудування. – 2002. – №1. – С. 6-13. 3. Ткачук Н.А. Специализированные системы автоматизированного исследования прочностных и жесткостных характеристик элементов технологической оснастки // Вісник Національного технічного університету “ХПІ”. Тематичний випуск: “Динаміка і міцність машин”. Збірник наукових праць НТУ “ХПІ”. – Харків: НТУ “ХПІ”, 2003. – № 12. т.1. – С.166-171. 4. Лурье А.И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с. 5. Работнов Ю.Н. Механика деформированного твердого тела. – М.: Наука, 1988. – 712 с. 6. Васильов К. Вариационные методы в теории упругости и пластичности. – М.: Мир, 1987. – 542 с.

Поступила в редколлегию 29.04.04