

**Заключение.** В статье представлена процедура дискретизации для получения модели колебаний вращающегося стержня и исследованы линейные и нелинейные свободные колебания. В статье установлено, что первая и четвертая скелетные кривые являются жесткими, а вторая и третья мягкими.

**Список литературы:** 1. *Friedmann P.P.* 2004, «Rotary-wind aeroelasticity: current status and future trends» // *AIAA Journal* 42, 1953-1972. 2. *А.П.Филиппов.* Колебания деформируемых систем. – М.: «Машиностроение», 1970. – 376 с. 3. *Воробьев Ю.С.* Уточненные уравнения свободных колебаний вращающихся стержней. Рабочие процессы в турбомашинах и прочность их элементов. – Киев: Наукова думка, 1965. – С. 11-27. 4. *Hodges D.H., Dowell E.H.* Nonlinear equations of motion for the elastic bending and torsion of twisted nonuniform rotor blades. – NASA TN D-7818, Washington, D.C., 1974. – 60 p. 5. *Crespo da Silva M.R.M.* A comprehensive analysis of the dynamics of a helicopter rotor blade // *Int. J. Solids Structures.* – 1998. – Vol. 35, No 7-8. – P. 619-635. 6. *Crespo da Silva M.R.M.* Nonlinear flexural-flexural-torsional-extensional dynamics of beams. – I. Formulation // *Int. J. Solids Structures,* 1988. – Vol. 24, No. 12. – P. 1225-1234. 7. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В., Ицук Ю.В., Розова Л. В., Воробьев Ю.С.* Модели нелинейной механики в прикладных задачах энергетического машиностроения / Учебно-методическое пособие. – Харьков, 2006. – 142 с. 8. *Аврамов К.В., Ицук Ю.А., Розова Л.В.* методы исследования нелинейных процессов в энергетическом оборудовании / Учебно-методическое пособие. – Харьков, 2006. – 64 с.

*Поступила в редколлегию 17.04.2006*

УДК 621.01

**Ю.М.АНДРЕЕВ**, канд.техн.наук; **Е.И.ДРУЖИНИН**, канд.техн.наук;  
**О.В.МИТИН**; НТУ «ХПИ»

## **КИНЕМАТИЧЕСКИЙ И ДИНАМИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КУЛАЧКОВОГО МЕХАНИЗМА ФОРМОВОЧНОГО СТАНКА**

Наводяться розрахунки, які ілюструють методику дослідження кінематики та динаміки пристроїв, що містять кулачкові механізми, на підставі використання комплексу кінематичних та динамічних досліджень (КИДИМ), який містить у собі систему аналітичних обчислювань.

It is resulted a technique of research of kinematics and dynamics of devices with Cam mechanisms, on the basis of use of a complex of kinematic and dynamic calculations (KIDYM), which comprises system of analytical calculations.

Вопросам проектирования кулачковых механизмов посвящена обширная литература, например, [1,2]. В настоящее время имеет смысл рассматривать только проблемы, связанные с реализацией разработанных методов в вычислительных алгоритмах. При проектировании кулачковых механизмов, входящих в состав машиностроительных конструкций, используются различные способы задания формы кулачка. В частности, форму кулачка можно определить набором точек, в подвижной системе координат, связанной с кулачком. Можно также воспользоваться набором дуг окружностей, для которых указаны координаты их центров (по отношению к указанной выше системе коор-

динат) и радиусы. В данной работе проведен сравнительный кинематический и динамический анализ работоспособности и эксплуатационной надежности формовочного станка для двух кулачков, формы контуров которых задавались различными способами, в том числе с использованием кубических сплайнов, при этом, последний способ по результатам исследований является более предпочтительным.

Рассмотрим схему формовочного станка, изображенную на рис.1. Здесь представлены пневмоцилиндры 1 и 2, ход которых приводит в движение весь механизм, кулачок 3, передающий движение через ролик 4 платформе 5.

Цель исследований состояла в проведении сравнительного кинематического и динамического анализа двух кулачков различной формы. Необходимо было решить задачи описания формы кулачка, составления кинематической и динамической моделей для проведения расчетов кинематики и динамики представленной на рис. 1 модели.

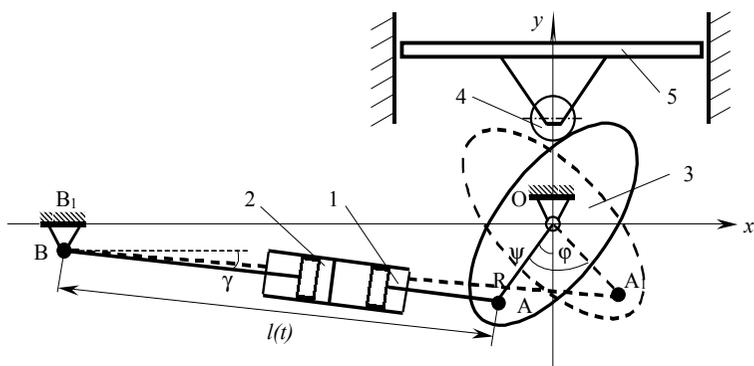


Рисунок 1

В процессе исследования были рассмотрены следующие представления формы кулачка: дискретным массивом точек и множеством дуг окружностей. Для первого кулачка использовались оба способа, для другого – только второй.

Для проведения всех расчетов кинематики и динамики указанных выше моделей использовался разработанный на кафедре программный комплекс КИДИМ, в основе которого лежит система аналитических вычислений. В связи с этим для определения скоростей и ускорений точек звеньев механизма необходимо иметь аналитическое описание формы кулачка. В первом из упомянутых способов требуется использовать один из методов интерполяции, во втором – уточнить координаты центров и радиусы дуг окружностей. Затем на основе полученного аналитического описания кулачка получить механические и математические модели и алгоритмы решения задач кинематики и динамики. При расчетах были использованы два метода интерполяции, встроенные в программный комплекс КИДИМ, – метод линейной интерполяции и метод интерполяции кубическими сплайнами.

Задание формы кулачка массивом дуг окружностей является простым и наглядным, широко используемым в конструкторской практике. Надлежащим выбором положений центров дуг и величин их радиусов можно обеспечить непрерывность линии формы кулачка и касательных в местах стыков. Кривизна же в точках сопряжения испытывает скачки первого рода. Это приводит к значительным погрешностям при расчетах ускорений точек звеньев станка, модель которого представлена на рис. 1. Более того, практическая неточность в формировании координат центров аппроксимирующих дуг и их радиусов приводит к скачкам формы линии кулачка и изломам касательных. В связи с этим более предпочтительным оказывается использование кубических сплайнов, которые проводятся через точки сопряжения дуг окружностей, что и было сделано при проведении расчетов по второму кулачку.

Несмотря на небольшое число точек, задающих форму кулачка, сплайн, проведенный через эти точки, достаточно гладкий, хорошо дифференцируется и дает приемлемые по точности результаты, о которых будет сказано ниже. Излишняя «густота» точек вместо улучшения описания формы кулачка может ухудшить его, так как сплайн, проведенный через такие близко расположенные точки, может оказаться весьма «извилистым» из-за погрешностей в задании координат точек. Такая ситуация встретилась при описании начального участка первого кулачка. Здесь для получения приемлемых результатов потребовалось «загрубить» точечное представление кулачка, уменьшив число точек.

Одним из критериев сравнения кулачков является величина угла, образованного вертикалью и нормалью к поверхности кулачка в точке контакта с роликом при его повороте на этапе подъема платформы [2]. На рис. 2 представлен график изменения этой величины для первого (сплошная линия) и второго (пунктир) кулачков в градусах.

Для решения задач кинематики механизма подъема платформы были сформулированы и решены следующие задачи: сглаживание формы кулачка, полученной при конструировании; получение алгоритма вычисления вертикальной координаты центра ролика  $y_C$  и угла наклона нормали в точке касания кулачка и ролика с вертикалью  $\alpha$  от угла поворота кулачка  $\varphi$  для заданной формы кулачка; подбор законов движения пневмоцилиндров с учетом релейного характера наброса и сброса давления в них; построение функции  $\varphi = f(l)$  - угла поворота кулачка  $\varphi$  в зависимости от длины шатуна  $AB$  (см. рис. 1), которая меняется из-за движения поршней пневмоцилиндров; расчет кинематических характеристик движения конструкции для двух видов проектируемых кулачков.

Для дискретно заданной формы кулачка надо получить аналитический алгоритм зависимости от угла поворота кулачка  $\varphi$  вертикальной координаты центра ролика  $y_C$  и угла  $\alpha$  между вертикалью и общей нормалью в точке касания кулачка с роликом. Решение этой задачи на основе использования набора дуг окружностей дало неприемлемые результаты. Получим решение задачи, предполагая, что форма кулачка задана аналитической зависимостью  $y = f(x)$  (см. рис. 3).

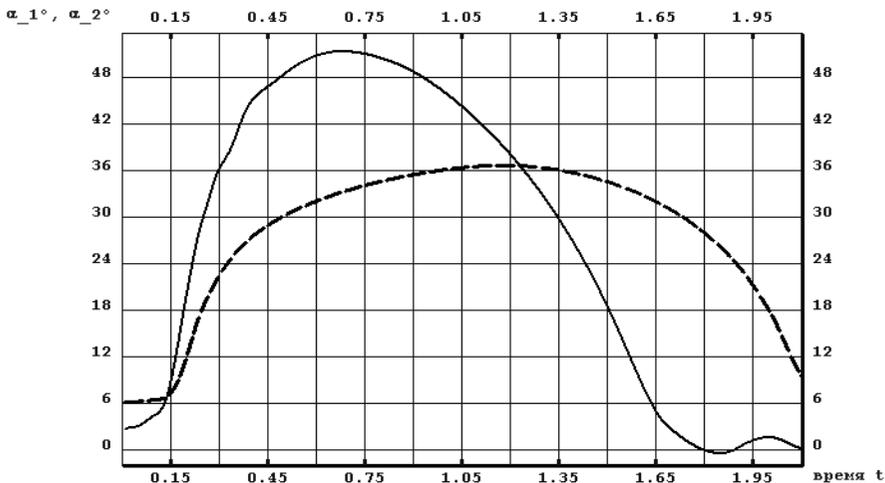


Рисунок 2

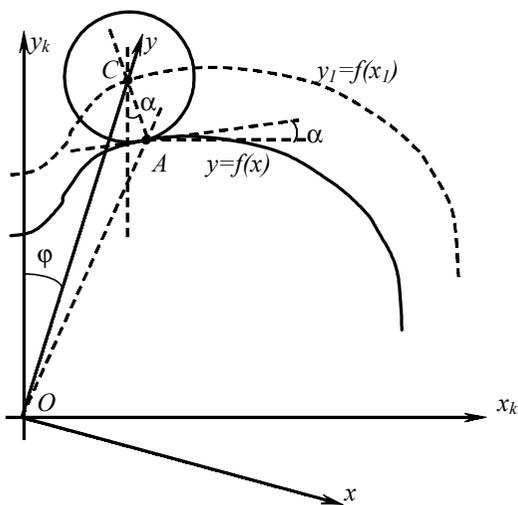


Рисунок 3

Здесь показано: сплошной кривой линией – контур кулачка, т.  $O$  – ось кулачка, т.  $A$  – точка касания ролика и кулачка, т.  $C$  – центр ролика, система координат  $Ox_k y_k$  – «кулачковая» – жестко связана с кулачком, а система координат  $Oxy$  – неподвижная,  $\varphi$  – угол поворота кулачка (он повернут против часовой стрелки).

Для любой точки  $A$  контура кулачка наступит момент, когда с ней соприкоснется катящийся по кулачку ролик.

Обозначим  $r = CA$  – радиус ролика,  $\alpha$  – угол наклона радиуса ролика, проведенного в точку касания  $A$ , с вертикалью. Касательная к кулачку в т.  $A$  также составляет угол  $\alpha$  с горизонталью. Но тогда  $\operatorname{tg} \alpha = y'_x$ , а координаты центра ролика найдутся из соотношений  $x - x_1 = r \sin \alpha$ ,  $y_1 - y = r \cos \alpha$ .

При этом ордината центра ролика в неподвижной системе координат будет  $y_c = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ , а угол поворота кулачка  $\varphi = \operatorname{arctg}(x_1/y_1)$ .

Алгоритм вычисления зависимости ординаты центра ролика (высоты подъема платформы) от угла поворота кулачка  $\varphi$  состоит в следующем: для выбранной точки контура кулачка (т. А) –  $\{x, y\}$  вычисляем

$$\alpha = \arctg(y'_x), \quad (1)$$

определяем координаты центра ролика в подвижной «кулачковой» системе координат  $x_1 = x - r \sin \alpha$ ;  $y_1 = y + r \cos \alpha$ ; (2)

получаем полярные координаты центра ролика в этой системе координат – они же будут ординатой центра ролика в неподвижной системе координат и углом поворота кулачка, отвечающем точке контакта ролика и кулачка в выбранной т. А  $y_C = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$ ;  $\varphi = \arctg(x_1/y_1)$ . (3)

Полученные значения угла поворота кулачка  $\varphi$  и ординаты центра ролика  $y_C$  (3), а также значения угла поворота кулачка  $\varphi$  и значения угла  $\alpha$  (1), дают возможность построить кубические сплайны и иметь, таким образом, аналитические дважды дифференцируемые зависимости  $y_C(\varphi)$  и  $\alpha(\varphi)$ .

Для приведенной на рис. 1 кинематической схемы механизма подъема платформы получим зависимость угла поворота кулачка от перемещения поршней пневмоцилиндров. Приравнивая значения координат точки А, выраженные через геометрические параметры деталей слева и справа от нее, получим 2 уравнения

$$\begin{aligned} BB_1 + AB \sin \gamma &= R \cos \psi \\ OB_1 - AB \cos \gamma &= R \sin \psi, \end{aligned} \quad (4)$$

из которых можно определить зависимость угла поворота кулачка  $\psi$  (угол между линией  $OA$  и вертикалью) и длиной шатуна  $AB$ , определяемой постоянной частью и перемещением поршней пневмоцилиндров. Уравнения (4) трансцендентны, но для малого угла  $\gamma$  эти уравнения решаются в общем виде. Заменим в уравнениях (4)  $\sin \gamma \approx \gamma$ ,  $\cos \gamma \approx 1$ , получим

$$\gamma = \frac{R \cos \psi - BB_1}{AB}; \quad \psi = \arcsin\left(\frac{OB_1 - AB}{R}\right). \quad (5)$$

Запишем формулировку и алгоритм решения прямой задачи кинематики: при заданном законе перемещения поршня пневмоцилиндра 1 определить кинематические характеристики движения механизма подъема платформы: вертикальной координаты платформы -  $y_C$ , угла  $\alpha$  между вертикалью и нормалью к кулачку в точке касания его с роликом, скорость и ускорение при вертикальном подъеме платформы.

В начале считаем, что поршень пневмоцилиндра 1 движется равномерно, в дальнейшем после решения второй задачи динамики для указанного механизма этот закон можно уточнить. Так как нашей задачей является сравнение поведения двух кулачков, то выводы, сделанные в рамках указанной гипотезы, очевидно, могут мало измениться при уточнении закона движения поршня.

Согласно выбранному закону движения ведущего звена (поршня пнев-

моцилиндра 1) запишем,  $L_1(t) = v_1 t$ , где  $L_1$  – закон движения поршня,  $v_1$  – его скорость;  $v_1 = H_1/T_1$ , где  $H_1, T_1$  – ход и время перемещения;

$$AB = AB_0 + L_1 + L_2, \quad (6)$$

где  $AB_0$  – начальная длина шатуна  $AB$ , когда поршни пневмоцилиндров еще не перемещались,  $L_2$  – перемещение поршня пневмоцилиндра 2 (на первом этапе движения оно равно нулю);

$$\psi = \arcsin\left(\frac{OB_1 - AB}{R}\right), \quad (7)$$

где угол между вертикалью и радиусом  $R$  (см. рис. 1)  $-90^\circ < \psi < 90^\circ$ , поэтому функция  $\arcsin$  его однозначно определяет;

$$\varphi = \psi - \psi_0, \quad (8)$$

где угол поворота кулачка отсчитывается от начального значения угла  $\psi = \psi_0$ ; наконец, имея зависимости  $y_C(\varphi)$  и  $\alpha(\varphi)$ , вычислим  $y_C$  и  $\alpha$ , а также ско-

$$\text{рость и ускорение платформы} \quad v_C = \frac{dy_C}{dt}, \quad a_C = \frac{dv_C}{dt}.$$

В соответствии с этим алгоритмом были получены кинематические характеристики для обоих кулачков.

Решение задачи по определению зависимости вертикального перемещения платформы от угла поворота кулачка, который, в свою очередь, определяется перемещением поршня пневмоцилиндра 1, полученное выше, позволяет поставить и решить задачу о вычислении законов движения звеньев механизма подъема с учетом инерционности параметров модели и действующих сил. Программный комплекс КИДИМ позволяет легко справиться с такой задачей. За обобщенную координату можно взять перемещение поршня пневмоцилиндра 1. Учтем силу давления воздуха на доньшко поршня пневмоцилиндра 1, силу тяжести кулачка и платформы, силы инерции при вращении кулачка в поступательном движении платформы. Угол поворота кулачка определится по формулам (6)-(8), вертикальное перемещение платформы – по формулам (1)-(3).

Для заданных параметров динамической модели: масса второго кулачка –  $10,8 \text{ кг}$ ; его момент инерции относительно оси вращения –  $0,18 \text{ кгм}^2$ ; масса платформы –  $180 \text{ кг}$ , сила давления на доньшко поршня пневмоцилиндра 1 –  $7017 \text{ Н}$  ( $716 \text{ кГ}$ ), были получены значения горизонтальной (сплошная линия) и вертикальной (пунктир) составляющих силы, действующей со стороны кулачка на ролик, которые приведены на рис. 4.

Представленные материалы работы позволяют сделать следующие выводы.

1. Проведено исследование кинематического и динамического поведения механизма подъема штамповочной платформы станка.
2. Выявлены недостатки в традиционном представлении формы кулачков совокупностью дуг окружностей, связанные с недостаточной сглаженностью линии формы кулачка, которая требуется для проведения указанных расчетов.

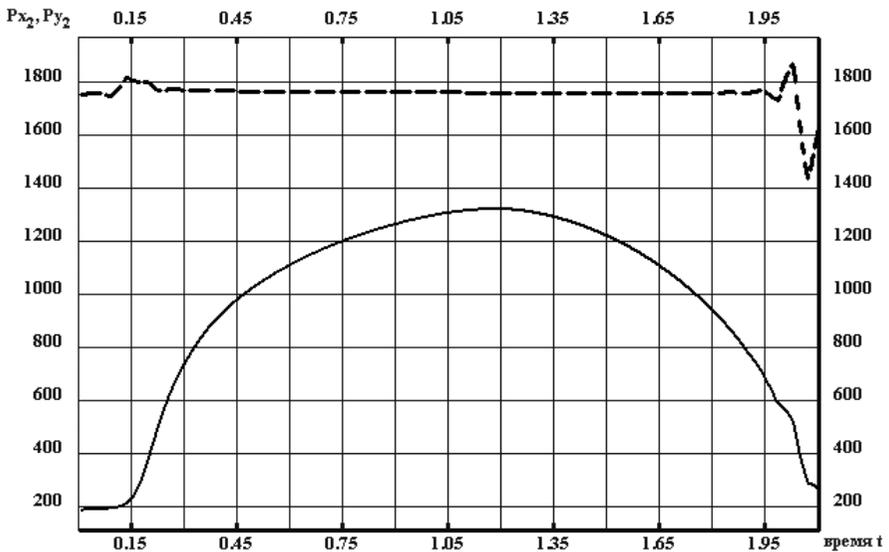


Рисунок 4

3. Предложен способ описания формы кулачка, основанный на сплайновом представлении его формы, удовлетворяющий требованиям задач кинематики и динамики.
4. Получены кинематические модели механизма подъема для двух кулачков. При этом в общем виде решена задача формирования аналитических зависимостей:
  - вертикального перемещения платформы от угла поворота кулачка;
  - угла между вертикалью и силой взаимодействия кулачка и ролика от угла поворота кулачка;
  - угла поворота кулачка от перемещения поршней первого и второго пневмоцилиндров.
5. Проведены кинематические расчеты перемещений, скоростей и ускорений платформы, углов между вертикалью и нормалью к кулачку в точке касания с роликом для двух кулачков при различных законах движения ведущего звена (поршня пневмоцилиндра 1), в том числе для закона движения, отвечающего решению задачи динамики.
6. Получены динамические модели механизма подъема для двух кулачков, для чего использованы результаты решения кинематических задач. Величина силы давления в пневмоцилиндре 1 считалась постоянной.
7. Проведены динамические расчеты механизма для второго кулачка, получены законы движения основных узлов механизма.
8. Проведена настройка используемого программного обеспечения для решения указанного круга задач.

**Список литературы:** 1. Артоболевский И.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. – М.: Гос. изд-во Физ. мат. лит-ры, 1959. – 1084 с. 2. Шаумян Г.А. Основы теории проектирования станков-автоматов и автоматических линий. – М.: Машгиз, 1949.

Поступила в редколлегию 03.05.2006

УДК 539.3

**И.Д.БРЕСЛАВСКИЙ**, ХНУ им. В.Н.Каразина;  
**К.В.АВРАМОВ** докт. техн. наук, НТУ «ХПИ»

## **УСТОЙЧИВОСТЬ НЕЛИНЕЙНЫХ ФОРМ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В ДИСКРЕТНОЙ СИСТЕМЕ С КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ**

У статті знайдено нормальні форми системи з кубічною нелінійністю. Для дослідження їхньої стійкості використовуються рівняння у варіаціях.

The nonlinear normal modes of the system with cubic nonlinearity are studied. The variation equations are used to study stability.

**1. Введение.** Нелинейная динамика механических систем с несколькими степенями свободы до сих пор остается не решенным вопросом прикладной механики. С помощью теории нелинейных нормальных форм колебаний часто удается аналитически исследовать существенно нелинейные механические системы с несколькими степенями свободы. Эта теория развивалась в работах Розенберга, Маневича, Михлина, Вакакиса [1-3].

Новизна этой статьи заключается в том, что для исследования устойчивости используется модель, полученная после подстановки нулевого приближения по малому параметру в уравнения движения, то есть так называемая псевдоавтономная динамическая система.

**2. Формулировка задачи.** Рассмотрим механическую систему с двумя степенями свободы, представленную на рис. 1. Движение системы описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\ddot{x}_1 + x_1 + x_1^3 + K_1(x_1 - x_2) + K_3(x_1 - x_2)^3 = \varepsilon p(t); \quad (1)$$

$$\ddot{x}_2 + x_2 + x_2^3 + K_1(x_2 - x_1) + K_3(x_2 - x_1)^3 = 0,$$

где  $p(t) = P \cos(\omega t)$ . Динамическая система (1) при  $\varepsilon = 0$  содержит две нелинейные формы колебаний:

$$x_2(x_1) = cx_1, \quad (2)$$

где  $c = \pm 1$ . Исследуются нелинейные формы при  $\varepsilon \neq 0$ . Они соответствуют вынужденным колебаниям системы. Для определения вынужденных колебаний