

*А.А. ТЕСЛЕНКО*, канд. физ.-мат. наук, доц., УГЗУ, Харьков

## **РАЗМЕРНОСТЬ ЗАДАЧИ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ФОТОУПРУГИХ ЭЛЕМЕНТОВ.**

Пропонується метод зниження розмірності плоскої задачі методу кінцевих елементів, застосовуваних разом з методом фотопружності. Результати вимірювання методу фотопружності в цьому підході передбачаються абсолютно точними. Оцінено погрішність, пов'язана з таким припущенням.

The method of dimensionality reduction of plain problem of finite element method, with photoelasticity method is offered. The results of photoelasticity measurement in this approach are considered to be exact. The inaccuracy of the method is evaluated.

**Введение.** В работах [1-5] развивалась методология решения плоских и объемных задач метода конечных фотоупругих элементов. Эта методология направлена на решение проблемы, которая в теории метода фотоупругости имеет название проблемы «разделения нормальных напряжений». Дело в том, что относительно легко в методе фотоупругости определяются сдвиговые напряжения и разность нормальных напряжений. Задача решения проблемы «разделения нормальных напряжений» является неустойчивой. Нормальные значения напряжений при классическом методе решения находятся с неопределенной точностью (погрешность значительно превосходит размеры самих напряжений [6,7]). Для разделения нормальных напряжений используются либо предположения о напряженном состоянии, либо дополнительные экспериментальные данные, либо дополнительные сведения о напряженном состоянии, получаемые из уравнений динамики твердого деформируемого тела (граничных условий, условий равновесия). В рамках данного цикла работ [1-5] в качестве дополнительной информации используются граничные условия и условия равновесия. Учет этих условий привел к совместному использованию метода фотоупругости и метода конечных элементов (МКЭ). Этот метод автором для краткости называется МКФЭ.

**1. Актуальность рассматриваемой проблемы.** В работах [1-5] обсуждаются различные аспекты применения метода фотоупругости к исследованию напряжений в прозрачных пьезооптически активных телах. В этих работах обсуждались вопросы, связанные с совместным решением соотношений фотоупругости и уравнений динамики твердого деформируемого тела. В работах [1-3,5] методология метода фотоупругости рассматривалась совместно с методом конечных элементов (МКФЭ). В [4] метод фотоупругости рассматривается совместно с методом конечных разностей. В обоих случаях предлагаются новые методы, в которых уравнения фотоупругости и динамики

твердого деформируемого тела решаются в едином алгоритме, как правило, относительно большого количества неизвестных. Большое число неизвестных представляет известные трудности для решения задач. Уменьшить количество неизвестных (понижить размерность задачи) является темой данной статьи.

**2. Постановка задачи.** Рассмотрим методологию МКФЭ, предложенную в [8,9] как метод МКЭ, дополненный уравнениями метода фотоупругости, применительно к плоской задаче. В этом случае естественно попробовать решить уравнения метода фотоупругости до применения методологии МКЭ. Методом фотоупругости с относительно хорошей точностью определяются сдвиговые компоненты напряжений и разность нормальных. Раздельное определение нормальных напряжений представляет собой неустойчивую задачу [1-5]. Если в МКЭ предполагать сдвиговые напряжения заранее определенными в узлах (методом фотоупругости), то размерность задачи падает на одну треть. Если дополнительно предположить известными разности нормальных, то размерность задачи падает на две трети. В настоящей статье предлагается и обсуждается именно этот подход к понижению размерности задачи фотоупругости.

**3. Метод решения.** Уравнения МКФЭ подробно описаны в [1,2 и др.]. Для плоского случая и треугольного элемента получаются следующие соотношения относительно узловых значений (вывод уравнение смотрите, например, в [1,8])

$$\sum_{\ell=1}^3 (\sigma_{i1}^{\ell} b_{\ell} + \sigma_{i2}^{\ell} c_{\ell}) = 0, \quad (1)$$

где  $\sigma_{ij}^{\ell}$  – искомые величины напряжений в узлах конечных элементов,  $a_{\ell}$ ,  $b_{\ell}$ ,  $c_{\ell}$  – коэффициенты линейного разложения функции формы,  $\ell$  – номер узла в элементе. Уравнения (1) при известных сдвиговых компонентах и  $i = 1$  преобразуются к виду

$$\sum_{\ell=1}^3 \sigma_{11}^{\ell} b_{\ell} = B, \quad (2)$$

где  $B = -\sum_{\ell=1}^3 \sigma_{12}^{\ell} c_{\ell}$ ,  $\sigma_{12}^{\ell}$  – определены методом фотоупругости.

Аналогично, уравнения (1) преобразуются для  $i = 2$  и случая известных разностей нормальных напряжений.

**4. Численный эксперимент.** Были проделаны численные эксперименты на имитационной модели по определению точности определения всех компонент напряжений. В связи с тем, что их методология полностью совпадает с [1-5], в этой статье они обсуждаться не будут. Эксперименты проделывались для всех случаев, которые были рассмотрены в [1-3,5].

**5. Обсуждение результатов.** В ходе численных экспериментов не выявлено существенного увеличения или уменьшения точности определения напряжений.

**Выводы.** В рамках плоской задачи МКЭ единственными следствиями понижения размерности решения есть ускорение вычислительного процесса и экономия оперативной памяти компьютера.

**Список литературы:** 1. *Тесленко А.А.* Методы конечных элементов и фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 22. – С. 143-148. 2. *Тесленко А.А.* Некоторые подробности применения метода конечных элементов в фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 21. – С. 183-186. 3. *Тесленко А.А.* Автоматизация пьезооптических измерений // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2006. – № 32. – С. 153-156. 4. *Тесленко А.А.* Фильтрация пьезооптических измерений в методе фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2007. – № 32. – С. 169-171. 5. *Тесленко А.А.* Определение точности метода фотоупругости // Вестник национального технического университета «ХПИ»: Тематический выпуск «Динамика и прочность машин». – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2008. – № 36. – С. 167-170. 6. *Тесленко А.А., Каплан М.С., Тиман Б.Л.* и др. / Заводская лаборатория. – 1993. – Т. 59, № 2. – С. 64-66. 7. *Тесленко А.А.* Развитие метода фотоупругости и его применение к исследованию остаточных напряжений в монокристаллах. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. – Харьков. 1991. – 22 с. 8. *Тесленко А.А.* / Заводская лаборатория 2. – 1998. – Т. 64, № 8. – С. 42-44. 9. *Гаверлюк В.П., Гринев Б.В., Каплан М.С., Тесленко А.А., Тихонова Е.В.* / Функциональные материалы 2. – 1995. – № 4. – С. 543.

*Поступила в редколлегию 11.09.2009*