

К.В.АВРАМОВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.В.БОРИСЮК, аспирант, НТУ «ХПИ»

БИСТАБИЛЬНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ НЕСИММЕТРИЧНОГО ОДНОДИСКОВОГО УПРУГОГО РОТОРА В ПОДШИПНИКАХ СКОЛЬЖЕНИЯ

Отримано математичну модель коливань несимметричного одно дискового ротору на нелінійних підшипниках ковзання. Для моделювання масляного шару використовується аналітичний розв'язок рівняння Рейнольдса для коротких підшипників. Автоколивання у роторі виникають не при кутовій швидкості, коли спостерігається біфуркація Хопфа, а при значно менших кутових швидкостях. Такі режими автоколивання виникають внаслідок сідло-вузлових біфуркацій в системі. Розв'язки, що отримані методом гармонічного аналізу, добре збігаються з результатами чисельного моделювання.

The model of nonlinear vibrations of one disk rotor supported by two journal bearing is obtained. The fluid film in journal bearing is described by the Reynolds' equation. Self vibrations of the rotor are occurred not with angular velocity, when there is Hopf bifurcation, but at much lower angular velocities. These self vibrations modes arise as the result of saddle-node bifurcations. Solutions obtained by harmonic balance method are in good agreement with numerical simulation of the system.

Введение. Автоколебания в роторных системах могут возникать вследствие взаимодействия масляной пленки подшипника скольжения с цапфой ротора. Такие колебания привели к разрушению ряда роторных систем [1]. В настоящее время для исследования колебаний роторов применяются современные аналитические и численные методы нелинейной динамики [2]. Много предпринято усилий для исследования автоколебаний роторных систем, что объясняется важностью этой задачи в инженерном деле. Позняк [3] получил аналитически давления в масляной пленки подшипников скольжения. Используя вариационный подход, Олимпиев [4] получил асимптотическое решение уравнения Рейнольдса. Устойчивость цапфы в подшипнике скольжения рассматривается в монографии [5]. Каринцев, Шульженко [6] получили модель давлений в масляном слое коротких подшипников скольжения. Они исследовали влияние инерции масляного слоя на величины давлений. Филиппов, Шульженко [7] применяют асимптотические методы для исследования автоколебаний в роторах. Овчарова, Голоскоков [8] анализируют вынужденные колебания ротора с учетом масляного слоя в коротких подшипниках скольжения. Они описали динамику ротора расчетной схемой, состоящей из упругого вала с тремя дискретными массами.

В этой статье выводятся уравнения нелинейных колебаний однодисковых роторов в коротких подшипниках скольжения. В усилиях, действующих на цапфы ротора со стороны масляного слоя, учитываются нелинейные члены вплоть до кубических слагаемых относительно обобщенных координат и

их скоростей. Для исследования автоколебаний в полученной системе применяется метод гармонического баланса.

Уравнения движения системы. Рассматривается динамика жесткого диска, который крепится к вращающемуся упругому валу. Края вала закреплены в коротких подшипниках скольжения. Цапфы вала А и В в процессе движения так же колеблются. Обобщенные координаты (x_1, y_1) и (x_2, y_2) описывают движение цапф. В подшипнике возникают силы, действующие на цапфы вала. Проекции этих сил на оси x и y обозначим через $F_x(x_i, y_i)$, $F_y(x_i, y_i)$, $i = \overline{1, 2}$, соответственно. Расчетная схема однодискового ротора представлена на рис. 1.

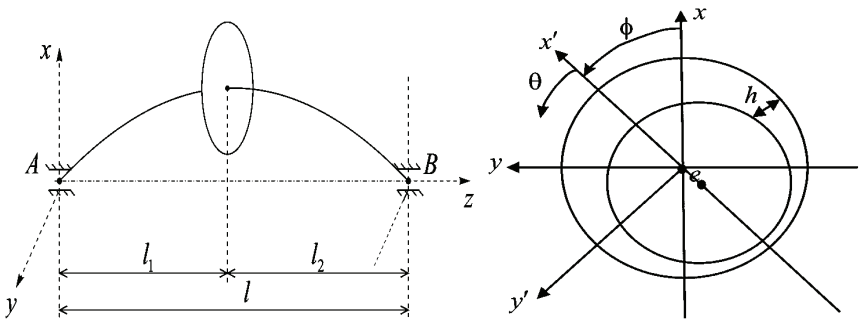


Рисунок 1 – Расчетная схема однодискового ротора

Ротор вращается с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси z ; угловую скорость диска запишем в следующем виде:

$$\vec{\omega} = \omega_1 \vec{e}_1 + \omega_2 \vec{e}_2 + \omega_3 \vec{e}_3; \quad \omega_1 = \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \cos \theta_3 + \dot{\theta}_2 \sin \theta_3; \\ \omega_2 = \dot{\theta}_2 \cos \theta_3 - \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 \sin \theta_3; \quad \omega_3 = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2. \quad (1)$$

Угловую скорость Ω представим так: $\Omega = \dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2$. Тогда кинетическую энергию системы представим так:

$$T = \frac{I_e}{2} (\dot{\theta}_2^2 + \dot{\theta}_1^2 \cos^2 \theta_2) + \frac{I_p}{2} (\dot{\theta}_3 + \dot{\theta}_1 \sin \theta_2)^2 + \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2), \quad (2)$$

где x, y – обобщенные координаты описывают перемещения точек крепления диска к валу; I_e, I_p – экваториальный и полярный моменты инерции диска. Потенциальная энергия системы записывается так:

$$\Pi = \frac{1}{2} c_{11} [(x - \zeta_1 x_2 - \zeta_2 x_1)^2 + (y - \zeta_2 y_1 - \zeta_1 y_2)^2] + \\ + \frac{1}{2} c_{22} \left[\left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right)^2 + \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right)^2 \right] + \quad (3)$$

$$+ c_{12} \left[(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) - (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) \right],$$

где c_{11} , c_{12} , c_{22} – элементы матрицы жесткости; $\varsigma_1 = \frac{l_1}{l}$; $\varsigma_2 = \frac{l_2}{l}$. Используя уравнения Лагранжа II рода, запишем уравнения движения системы так:

$$m\ddot{x} + c_{11}(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + c_{12} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = -m g;$$

$$m\ddot{y} + c_{11}(y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) - c_{12} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = 0;$$

$$I_e \ddot{\theta}_1 \cos^2 \theta_2 - I_e \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_3 \sin \theta_2 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 \cos \theta_2 - \\ - \frac{I_p}{2} \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + I_p \ddot{\theta}_1 \sin^2 \theta_2 + I_p \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \sin 2\theta_2 + c_{22} \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \\ - c_{12}(y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = 0;$$

$$I_e \ddot{\theta}_2 + \frac{I_e}{2} \dot{\theta}_1^2 \sin(2\theta_2) - I_p \Omega \dot{\theta}_1 \cos \theta_2 + c_{22} \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) + \\ + c_{12}(x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) = 0;$$

Уравнения равновесия цапф ротора принимают следующий вид:

$$\left(\frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2 c_{11} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} - \varsigma_2 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = F_x(x_1, y_1);$$

$$\left(\frac{c_{12}}{l} - \varsigma_2 c_{11} \right) (y - \varsigma_1 y_2 - \varsigma_2 y_1) + \left(\varsigma_2 c_{12} - \frac{c_{22}}{l} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) = F_y(x_1, y_1);$$

$$\left(\varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (x - \varsigma_1 x_2 - \varsigma_2 x_1) + \left(\frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left(\theta_2 - \frac{x_2 - x_1}{l} \right) = -F_x(x_2, y_2);$$

$$\left(\frac{c_{22}}{l} + \varsigma_1 c_{12} \right) \left(\theta_1 + \frac{y_2 - y_1}{l} \right) - \left(\varsigma_1 c_{11} + \frac{c_{12}}{l} \right) (y - \varsigma_2 y_1 - \varsigma_1 y_2) = F_y(x_2, y_2). \quad (4)$$

Под действием силы тяжести ротор занимает некоторое состояние равновесия, которое определяется следующими значениями обобщенных координат: $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{\theta}_1, \bar{\theta}_2, \bar{x}_1, \bar{y}_1, \bar{x}_2, \bar{y}_2)$. Эти координаты состояния равновесия удовлетворяют следующей системе алгебраических уравнений:

$$F_x(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = mg \frac{l_2}{l}; \quad F_x(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = mg \frac{l_1}{l}; \quad F_y(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = 0; \quad F_y(\bar{x}_2, \bar{y}_2) = 0. \quad (5)$$

Обобщенные координаты состояния равновесия диска определяются из следующих уравнений:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \varsigma_1 \bar{x}_2 + \varsigma_2 \bar{x}_1 - \frac{mgc_{22}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}; \quad \bar{y} = \varsigma_2 \bar{y}_1 + \varsigma_1 \bar{y}_2; \\ \bar{\theta}_1 &= \frac{\bar{y}_1 - \bar{y}_2}{l}; \quad \bar{\theta}_2 = \frac{\bar{x}_2 - \bar{x}_1}{l} + \frac{mgc_{12}}{c_{11}c_{22} - c_{12}^2}.\end{aligned}\quad (6)$$

Теперь движения механической системы рассматриваются относительно положения равновесия (5, 6); введем следующую замену переменных:

$$\begin{aligned}(x, y, \theta_1, \theta_2, x_1, y_1, x_2, y_2) &\rightarrow \\ (\bar{x} + x, \bar{y} + y, \bar{\theta}_1 + \theta_1, \bar{\theta}_2 + \theta_2, \bar{x}_1 + x_1, \bar{y}_1 + y_1, \bar{x}_2 + x_2, \bar{y}_2 + y_2).\end{aligned}\quad (7)$$

С учетом замены переменных (7) динамическая система (4) принимает следующий вид:

$$m \ddot{x} = R_X^{(1)}; I_e \ddot{\theta}_2 - I_p \Omega \dot{\theta}_1 + R_X^{(2)} = 0; m \ddot{y} = R_Y^{(1)}; I_e \ddot{\theta}_1 + I_p \Omega \dot{\theta}_2 - R_Y^{(2)} = 0, \quad (8)$$

где $R_Y^{(1)} = \tilde{F}_Y(x_1, y_1) + \tilde{F}_Y(x_2, y_2)$; $R_X^{(1)} = \tilde{F}_X(x_2, y_2) + \tilde{F}_X(x_1, y_1)$;

$$R_Y^{(2)} = l_1 \tilde{F}_Y(x_1, y_1) - l_2 \tilde{F}_Y(x_2, y_2); R_X^{(2)} = l_1 \tilde{F}_X(x_1, y_1) - l_2 \tilde{F}_X(x_2, y_2).$$

Силы, действующие на цапфы со стороны масляного слоя, представим так:

$$F_x = - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\cos(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz; \quad F_y = - \int_0^{L_b} \int_0^\pi (\sin(\theta + \phi) p(\theta, z) R) d\theta dz. \quad (9)$$

где L_b – длина короткого подшипника; ϕ – угол линии центров. Предполагается, что масляный слой занимает область $\theta \in [0; \pi]$. Давление, действующее на цапфу со стороны масляного слоя $p(z_1, \theta)$, определяется из уравнения Рейнольдса [4]. Решение уравнения Рейнольдса для короткого подшипника запишем в следующем виде:

$$p = \frac{3\mu}{h^3} \left[\Omega \frac{\partial h}{\partial \theta} + 2 \frac{\partial h}{\partial t} \right] z_1 (z_1 - L_b), \quad (10)$$

где μ – вязкость масла; z_1 – продольная локальная координата подшипника скольжения. Величину h представим следующим образом:

$$h = c + e \cos \theta = c - x \cos(\theta + \phi) - y \sin(\theta + \phi),$$

где c – величина зазора между цапфой и подшипником (рис. 1). Подставляя решение (10) в выражения для сил (9), получим следующие выражения:

$$\begin{aligned}F_x &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\cos(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - y \cos(\theta + \phi)) + \\ &+ 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta; \\ F_y &= \frac{R\mu L_b^3}{2} \int_0^\pi \frac{\sin(\theta + \phi)}{h^3} (\Omega(x \sin(\theta + \phi) - y \cos(\theta + \phi)) + \\ &+ 2(\dot{x} \cos(\theta + \phi) + \dot{y} \sin(\theta + \phi))) d\theta.\end{aligned}\quad (11)$$

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:

$$\tilde{x}_j = \frac{x_j}{c}; \quad \tilde{y}_j = \frac{y_j}{c}; \quad H = \frac{h}{c}; \quad \tau = \Omega t. \quad (12)$$

Теперь определим положение равновесия ротора под действием сил тяжести. Если ротор не совершает колебаний, то уравнение (10) представим так: $p = -\frac{3\mu\Omega\varepsilon\sin\theta}{(c+e\cos\theta)^3}z_1(z_1-L_B)$. Уравнения равновесия цапфы запишем так:

$$F_{X'} = G \cos \phi_e; \quad F_{Y'} = -G \sin \phi_e, \quad (13)$$

где $F_{X'}$, $F_{Y'}$ – проекции сил в направлении осей x' , y' ; ϕ_e – угол линии центров для равновесного состояния цапфы; G – значение вертикальной силы в подшипнике. Для цапф А и В сила G принимает следующие значения:

$$G = mg \frac{l_2}{l}; \quad G = mg \frac{l_1}{l}. \quad \text{Тогда статические силы можно записать в следующем виде:}$$

$$F_{X'} = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon^2}{c^2 (1 - \varepsilon^2)^2}; \quad F_{Y'} = -\frac{\pi L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^{3/2}}; \quad \varepsilon = \frac{e}{c}. \quad (14)$$

Из выражений (13, 14) получаем уравнение для определения эксцентриситета ε : $G = \frac{L_B^3 \mu \Omega R \varepsilon}{4c^2 (1 - \varepsilon^2)^2} \sqrt{16\varepsilon^2 + \pi^2 (1 - \varepsilon^2)}$. Тогда координаты равновесия цапфы А определяются так:

$$\tilde{x}_{1,0} = \bar{x}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \cos \phi_{e1}; \quad \tilde{y}_{1,0} = \bar{y}_1 c^{-1} = -\varepsilon_1 \sin \phi_{e1}; \quad tg \phi_{e1} = \pi \sqrt{1 - \varepsilon_1^2} / (4\varepsilon_1). \quad (15)$$

Индекс I у величин ε и ϕ_e обозначает, что эти параметры описывают равновесие цапфы А. Рассмотрим динамику ротора относительно положений равновесия. Для этого введем следующую замену переменных: $\tilde{x}_i \rightarrow \tilde{x}_i + \tilde{x}_{i,0}$, $\tilde{y}_i \rightarrow \tilde{y}_i + \tilde{y}_{i,0}$, $i = 1, 2$. Введем следующие обозначения:

$$\vartheta = \theta + \phi_e; \quad \gamma = \frac{R\mu L_b^3 \Omega}{2c^2}; \quad J_1 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta; \quad J_2 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\sin^2(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta; \\ J_3 = \int_{\phi_e}^{\theta + \phi_e} \frac{\cos(\vartheta)\sin(\vartheta)}{H_1^3} d\vartheta; \quad H_1(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = 1 - (\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0})\cos\vartheta - (\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0})\sin\vartheta.$$

Силы, действующие со стороны масляного слоя, можно записать в следующем виде:

$$F_X = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}'_1)J_3 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_1; \\ F_Y = \gamma(\tilde{x}_1 + \tilde{x}_{1,0} - 2\tilde{y}'_1)J_2 - \gamma(\tilde{y}_1 + \tilde{y}_{1,0} + 2\tilde{x}_1)J_3. \quad (16)$$

Нелинейные силы F_X, F_Y представим в виде степенного ряда по обобщенным перемещениям \tilde{x}_1, \tilde{y}_1 и скоростям $\tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$. Выражение для величины $H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$ запишем в следующем виде:

$$H^{-3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1) = A_0(\vartheta) + A_1(\vartheta)\tilde{x}_1 + A_2(\vartheta)\tilde{y}_1 + A_3(\vartheta)\tilde{x}_1^2 + \dots \quad (17)$$

Подставляя разложение (17) в выражения для сил (16) получим следующие разложения сил F_X, F_Y в степенные ряды:

$$\begin{aligned} F_X &= F_{X,0} + F_{X,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{X,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots; \\ F_Y &= F_{Y,0} + F_{Y,1}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,2}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + F_{Y,3}(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + \dots, \end{aligned} \quad (18)$$

где $F_{X,0}, F_{Y,0}$ – постоянные составляющие силы; $F_{X,1}, F_{Y,1}$ – линейные части сил относительно $\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1$; $F_{X,2}, F_{Y,2}, F_{X,3}, F_{Y,3}$ – нелинейные составляющие силы второго и третьего порядка. Линейные части сил масляного слоя представим следующим образом:

$$\begin{aligned} F_{X,1} &= \gamma[(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_1 - (\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_2 - 3\varepsilon \tilde{x}I_3 - 3\varepsilon \tilde{y}I_4]; \\ F_{Y,1} &= \gamma[(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_5 - (\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_1 - 3\varepsilon \tilde{x}I_4 - 3\varepsilon \tilde{y}I_6]. \end{aligned} \quad (19)$$

Квадратичная составляющая сил (18) записывается в виде:

$$\begin{aligned} F_{X,2} &= \gamma\{3[\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}' - 2\tilde{y}\tilde{x}']I_7 - 3\tilde{x}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_8 + 3\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_9 - \\ &\quad - 6\varepsilon \tilde{x}^2I_{10} - 6\varepsilon \tilde{y}^2I_{11} - 12\varepsilon \tilde{x}\tilde{y}I_{12}\}; \\ F_{Y,2} &= \gamma\{3[\tilde{x}^2 - \tilde{y}^2 - 2\tilde{x}\tilde{y}' - 2\tilde{y}\tilde{x}']I_9 - 3\tilde{x}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_7 + 3\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{13} - \\ &\quad - 6\varepsilon \tilde{x}^2I_{12} - 6\varepsilon \tilde{y}^2I_{14} - 12\varepsilon \tilde{x}\tilde{y}I_{11}\}. \end{aligned} \quad (20)$$

Кубическая составляющая сил (18) описывается следующими выражениями:

$$\begin{aligned} F_{X,3} &= \gamma\{6[\tilde{x}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - 2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{15} + 6[2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - \tilde{y}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{16} + \\ &\quad + 6\tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{17} - 6\tilde{x}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_{18} - 20\varepsilon \tilde{x}^3I_{19} - 20\varepsilon \tilde{y}^3I_{20} - 60\varepsilon \tilde{x}^2\tilde{y}I_{21} - \\ &\quad - 60\varepsilon \tilde{x}\tilde{y}^2I_{21}\}; \\ F_{Y,3} &= \gamma\{6[\tilde{x}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - 2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{16} + 6[2\tilde{x}\tilde{y}(\tilde{x} - 2\tilde{y}') - \tilde{y}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')]I_{17} + \\ &\quad + 6\tilde{y}^2(\tilde{x} - 2\tilde{y}')I_{23} - 6\tilde{x}^2(\tilde{y} + 2\tilde{x}')I_{15} - 20\varepsilon \tilde{x}^3I_{21} - 20\varepsilon \tilde{y}^3I_{24} - 60\varepsilon \tilde{x}^2\tilde{y}I_{22} - \\ &\quad - 60\varepsilon \tilde{x}\tilde{y}^2I_{20}\}, \end{aligned} \quad (21)$$

где I_1, \dots, I_{24} – интегралы, которые берутся в элементарных функциях и не приводятся для краткости изложения.

Подставляя выражения для сил (18) в уравнения движения (8) получаем следующее матричное уравнение:

$$[M]\ddot{q} + [G]\dot{q} = [K_1]q + [D_1]q' + W(q_1, q'_1), \quad (22)$$

где $W(q_1, q'_1)$ – вектор нелинейных составляющих сил, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
w_1 &= F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{X,0}; \\
w_2 &= l_1 F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) - l_2 F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + (l_1 - l_2)F_{Y,0}; \\
w_3 &= F_Y(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) + F_Y(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + 2F_{Y,0}; \\
w_4 &= l_2 F_X(\tilde{x}_2, \tilde{y}_2, \tilde{x}'_2, \tilde{y}'_2) - l_1 F_X(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1, \tilde{x}'_1, \tilde{y}'_1) + (l_2 - l_1)F_{X,0}.
\end{aligned}$$

Окончательно, систему (22) можно представить так:

$$\ddot{q} + [F]\dot{q} + [Q]q = \tilde{W}(q, \dot{q}), \quad (23)$$

где $\tilde{W}(q, \dot{q}) = [M]^{-1}W(q_1, \dot{q}'_1) = [M]^{-1}W(q_1, \Omega^{-1}\dot{q}'_1) = [M]^{-1}W(\tilde{D}^{-1}Rq, \Omega^{-1}\tilde{D}^{-1}R\dot{q})$.

В численном анализе уравнений (23) учитывались как квадратичные, так и кубические слагаемые нелинейных сил, действующих со стороны масляного слоя (18).

Применение метода гармонического баланса к анализу автоколебаний. Для исследования автоколебаний воспользуемся методом гармонического баланса; движения системы (23) представим в следующем виде:

$$\begin{aligned}
x &= A_0 + \tilde{A}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_1); \theta_1 = B_0 + \tilde{B}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_2); \\
y &= C_0 + \tilde{C}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_3); \theta_2 = D_0 + \tilde{D}_1 \cos(\omega\tau + \varphi_4).
\end{aligned} \quad (24)$$

Система (23) является автономной, поэтому она инвариантна относительно преобразования времени $\tau = t + t_*$, где t_* выберем так: $t_* = -\frac{\varphi_1}{\omega}$. Тогда решение (24) примет следующий вид:

$$\begin{aligned}
x &= A_0 + A_1 \cos(\omega t); \theta_1 = B_0 + B_1 \cos(\omega t) + B_2 \sin(\omega t); \\
y &= C_0 + C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t); \theta_2 = D_0 + D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t),
\end{aligned} \quad (25)$$

где A_0, A_1, \dots, D_2 - подлежащие определению параметры. Подставляя (25) в выражения для сил (18) и в уравнения движения (8) и приравнявая соответствующие коэффициенты, получаем систему из 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно $A_0, A_1, \dots, D_2, \omega$. Эта система решается численно при различных значениях частоты вращения ротора Ω . Результаты расчета представляются на амплитудно-частотной характеристике.

Для анализа устойчивости полученных периодических движений систему (23) представим так:

$$\dot{z} = f(z), \quad (26)$$

где $z = [q; \dot{q}]^T$; $f(z)$ - нелинейная вектор-функция.

Запишем следующую систему уравнений в вариациях:

$$\dot{u} = Df(z^*) \cdot u, \quad (27)$$

где $u(t)$ - вектор-функция, описывающая малые отклонения от состояния равновесия; $Df(z^*)$ - матрица Якоби вектор-функции правых частей системы (26); z^* - периодическое движение (25).

Для оценки устойчивости рассчитывается фундаментальная матрица системы (27) и определяются мультипликаторы.

Численный анализ колебаний. Колебания ротора исследовались при следующих численных значениях параметров:

$$R = 0,057 \text{ м}; \quad \mu = 18 \cdot 10^{-3} \text{ Па} \cdot \text{с}; \quad L_B = 28,5 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad c = 0,2 \cdot 10^{-3} \text{ м}; \quad m = 374 \text{ кг};$$

$$l_1 = 0,5 \text{ м}; \quad l_2 = 0,648 \text{ м}; \quad I_p = 28,4 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad I_e = 14,2 \text{ кг} \cdot \text{м}^2; \quad E = 2,1 \cdot 10^{11} \text{ Па};$$

$$J = 8,29 \cdot 10^{-6} \text{ м}^4.$$

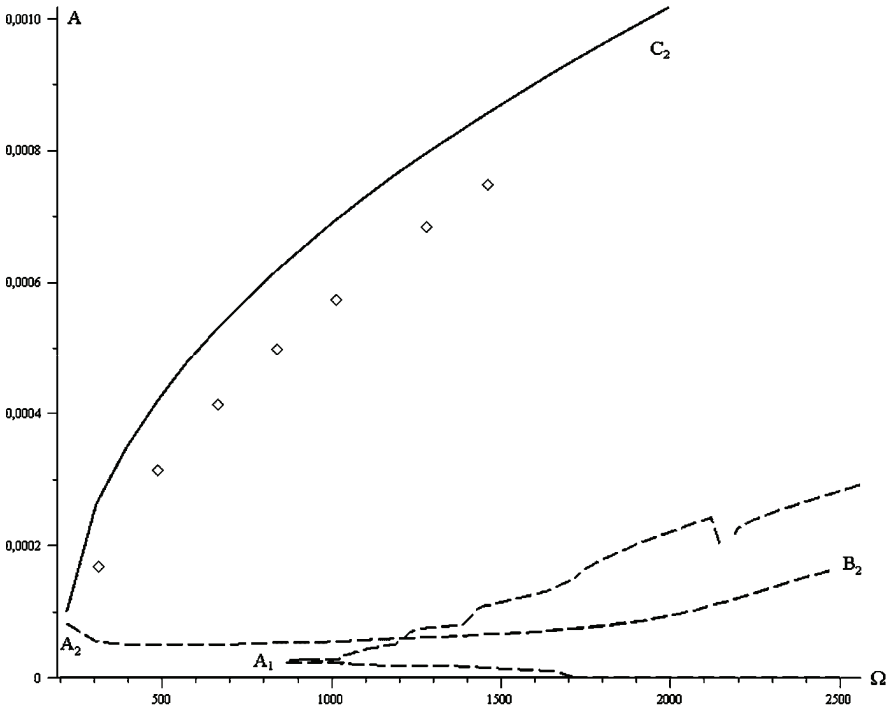


Рисунок 2 – Амплитудно-частотная характеристика колебаний

Для нахождения критической частоты вращения ротора анализировались собственные значения линеаризованной системы (22). Частота вращения ротора, при которой он теряет устойчивость равномерного вращения, составляет $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$. Для исследования автоколебаний ротора численно решалась система 12 нелинейных алгебраических уравнений относительно амплитуд автоколебаний при квазистатическом изменении частоты вращения ротора Ω . Результаты расчета представлены на амплитудно-частотной характеристике (рис. 2). При $\tilde{\Omega} = 1710 \text{ рад/с}$ наблюдается бифуркация Хопфа. В

результате этой бифуркации возникают неустойчивые предельные циклы, которые претерпевают седло-узловую бифуркацию в точке A_1 . После этой бифуркации предельные циклы являются неустойчивыми. Подчеркнем, что в системе была найдена еще одна ветка автоколебаний, которая обозначена $(C_2A_2B_2)$. Участок (C_2A_2) этой ветви описывает устойчивые предельные циклы, которые в точке седло-узловой бифуркации A_2 преобразуются в неустойчивые движения.

Для подтверждения результатов, полученных методом гармонического баланса, проводилось прямое численное интегрирование системы (22) методом Рунге-Кутты. Начальные условия для интегрирования выбирались из результатов метода гармонического баланса. Результаты расчета приводятся на рис. 2 точками. Между результатами, полученными двумя различными методами, наблюдается довольно хорошее совпадение. Сплошной линией на рисунке обозначены устойчивые режимы автоколебаний, пунктирной линией – неустойчивые.

Выводы. В статье получена математическая модель несимметричного однодискового ротора на нелинейных подшипниках скольжения. Получены области устойчивости движений. Для исследования колебаний использовался метод гармонического баланса. Исследована устойчивость периодических движения. Рассмотрена бистабильность автоколебаний ротора. В диапазоне $\Omega \in [300; 1700]$ рад/с наблюдается два вида установившихся движений. К первому виду, относятся состояния равновесия, которые описывают равномерное вращение ротора. Ко второму типу движений относятся автоколебания, которые возникают вследствие седло-узловой бифуркации A_2 . Отметим, что в зависимости от величины начальных условий в системе будет реализовываться один из полученных режимов. Проведено численное интегрирование системы. Результаты численного интегрирования хорошо совпадают с результатами полученными методом гармонического анализа.

Список литературы: 1. Zhang X. Y. On site testing and analysis of the oil whirl phenomena in national made 200MW stream turbine generator systems // Power Industry. – 1992. – № 12. – С. 32-37. 2. Legrand M. Nonlinear normal modes of a rotating shaft based on the Invariant Manifold Method / M. Legrand, D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw // International Journal of Rotating Machinery. – 2004. – № 10. – С. 319-335. 3. Позняк Э. Л. Неустойчивые колебания роторов на подшипниках скольжения // Сб. «Динамика гибких роторов». – М.: Наука, 1972. – С. 22-29. 4. Олиштин В. И. О собственных частотах ротора на подшипниках скольжения // Изд. АН СССР, ОТН. – 1960. – № 3. – С. 24-29. 5. Тондл А. Динамика роторов турбогенераторов. – Л.: Энергия, 1971. – 386 с. 6. Каринцев И.Б. Статические и динамические характеристики масляной пленки коротких подшипников скольжения / И.Б. Каринцев, Н.Г. Шульженко // Динамика и прочность машин. – Изд-во Харьковск. унта, 1972. – Вып. 16. – С. 14-18. 7. Филиппов А.П. Устойчивость колебаний ненагруженного неуравновешенного ротора в коротких опорах жидкостного трения / А.П. Филиппов, Н.Г. Шульженко // Машиноведение. – 1973. – № 4. – С. 21-28. 8. Овчарова Д.К. Вынужденные колебания ротора на подшипниках скольжения / Д.К. Овчарова, Е.Г. Голоскоков // Прикладная механика. – 1975. – № 11. – С. 95-99.

Поступила в редколлегию 13.04.2010