

А.А. КОНДРИКОВА, студентка, НТУ «ХПІ»;
О.О. ЛАРІН, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПІ»

МОДЕЛЮВАННЯ КОНТАКТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ ПНЕВМАТИЧНИХ ШИН З ДОРОГОЮ З УРАХУВАННЯМ ГЕОМЕТРИЧНОЇ ТА ФІЗИЧНОЇ НЕЛІНІЙНОСТІ ЇХ ДЕФОРМУВАННЯ

В статті наведено аналіз розрахунків напружено-деформованого стану пневматичної шини, навантаженої внутрішнім тиском та осьювою силою, з урахуванням геометричної, фізичної та структурної нелінійностей. Оцінено вплив кожної нелінійності на результати розрахунків.

In the paper the calculation of the stress-strain state of a pneumatic tire, loaded by internal pressure and axial force is presented, taking into account the geometric, physical and structural nonlinearities. It is estimated the influence of each nonlinearity to the results of calculations.

В статье приведен анализ расчетов напряженно деформированного состояния пневматической шины, нагруженной внутренним давлением и осевой силой, с учетом геометрической, физической и структурной нелинейностей. Оценено влияние каждой нелинейности на результаты расчетов.

Вступ. Пневматичні шини багато в чому визначають основні технічні характеристики автомобілів (стійкість, керованість, економічність тощо), разом із тим їх надійність є важливою складовою безпеки експлуатації транспортного засобу [1,2]. Відповідні характеристики шин визначаються їх напружено-деформованим станом (НДС), що виникає під час роботи, площею контакту шини з дорогою, значеннями НДС і характером розподілу напружень у зоні контакту. Вивчення закономірностей формування НДС в елементах шин являє складну науково-практичну проблему внаслідок цілого ряду особливостей: тривимірна геометрія, багатошарова структура, нелінійна поведінка матеріалу, великі прогини під час деформації, наявність контактної взаємодії з дорожнім покриттям та інші. Проведення розрахунків НДС з урахуванням відразу всіх визначених факторів призводить до суттєвих розрахункових складностей внаслідок повільної збіжності чисельних процедур розв'язання нелінійних задач великої розмірності. Крім того, виникає проблема аналізу отриманих результатів, тому що важко оцінити вплив окремих факторів та виявити похибки у розрахункових дослідженнях. Таким чином, виникає необхідність вивчення впливу окремих особливостей об'єкту на формування НДС з поступовим ускладненням моделі.

В даній роботі проведено дослідження НДС шини у трьох постановках:

1: без урахування геометричної та фізичної нелінійностей;

2: з урахуванням великих прогинів;

3: з урахуванням великих прогинів та гіперпружності гумоподібних матеріалів.

В роботі досліджується пневматична шина моделі 175/70 R13 для легкового автомобілю. Моделювання та проведення розрахунків було реалізовано

у рамках методу скінченних елементів. Геометрична модель шини побудована згідно з кресленням її поперечного перерізу. Для коректної передачі навантаження був змодельований диск колеса. Скінченно-елементна (СЕ) сітка (рис. 1) створена методом видавлювання, для її генерації був застосований тривимірний восьмикутний скінченний елемент.

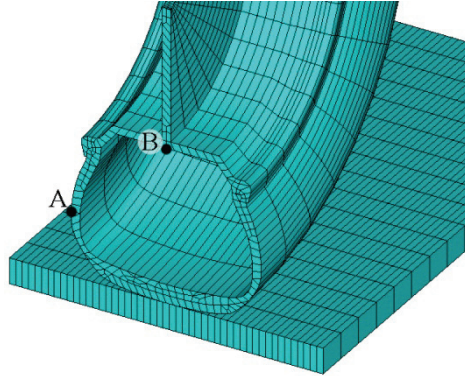


Рисунок 1 – Частина СЕ моделі шини

Однією з особливостей шин є багатшарова структура, яка містить у собі різні види матеріалів. В даній роботі матеріал шини розглядається як однорідний та ізотропний, з осередненими характеристиками. Властивості матеріалів конструкційних елементів, що задіяні у розрахунках, наведені у табл. 1.

Таблиця 1 – Характеристики матеріалів

Конструкційний елемент	Матеріал	Е, ГПа	ν	$[\sigma]$, ГПа
Шина	гума	0,01	0,47	300
Диск	сталь	210	0,3	-
Дорога	бетон	23,5	0,2	-

Теоретичні основи рішення нелінійних задач. В рамках методу скінченних елементів відклик системи шукається шляхом мінімізації функціоналу повної потенційної енергії [3]:

$$u: \nabla \Pi = 0, \tag{1}$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \iiint_V \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{E} dV - \iiint_V \mathbf{f} \cdot \mathbf{u}^T dV - \iint_S \mathbf{p} \cdot \mathbf{u}^T dS, \tag{2}$$

де Π – повна потенційна енергія; $\boldsymbol{\sigma}$ – тензор напружень Коші; \mathbf{E} – тензор деформацій Лагранжа; \mathbf{u} – вектор переміщень точок тривимірного тіла; \mathbf{f} – век-

тор об'ємних навантажень; \mathbf{p} – вектор поверхневих навантажень; ∇ – оператор набла.

Використання виразу (2) для визначення параметрів НДС (відповідно до (1)) потребує виразити компоненти тензорів напружень та деформацій через компоненти вектору переміщень відповідно до фізичних та геометричних співвідношень.

Зв'язок між напруженнями та деформаціями реалізується через потенційну енергію деформації W :

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = 2 \frac{\partial W}{\partial \mathbf{\Lambda}}, \quad (3)$$

де $\mathbf{\Lambda}$ – тензор деформацій Коші-Гріна ($\mathbf{\Lambda} = 2\mathbf{E} + \mathbf{I}$); \mathbf{S} – тензор напружень Піола-Кірхгофа, який визначає напруження в тілі відносно системи координат, що відповідає деформованому стану (на відміну від напружень тензору Коші, які визначаються відносно початкової системи координат). Істинні напруження Коші $\boldsymbol{\sigma}$ можуть бути виражені через напруження, що визначені для деформованого тіла (тензор Піола-Кірхгофа \mathbf{S}) через градієнт деформацій:

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{J} \mathbf{F} \cdot \mathbf{S} \cdot \mathbf{F}^T, \quad (4)$$

де \mathbf{F} – тензор градієнтів деформацій ($\mathbf{F} = \mathbf{I} + \mathbf{D}$); $J = \det \mathbf{F}$ (для нестисливих матеріалів $J = 1$); \mathbf{D} – тензор градієнтів переміщень:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (5)$$

В рамках *першої постановки* моделювання проводилось без врахування великих переміщень та для лінійного наближення поведінки матеріалу. В цьому випадку $\mathbf{D} \ll \mathbf{I}$, а отже $\mathbf{F} \rightarrow \mathbf{I}$. Таким чином, тензор напружень Коші буде співпадати з тензором Піола-Кірхгофа ($\mathbf{S} \rightarrow \boldsymbol{\sigma}$).

Для лінійного матеріалу потенційна енергія деформації W є квадратичною формою компонент тензору деформацій Лагранжа (закон Гука)

$$W = \frac{1}{2} (\lambda + \mu) I_{1E}^2 - 2\mu I_{2E}, \quad (6)$$

де λ і μ – коефіцієнти Ламе, що визначаються модулем пружності та коефіцієнтом Пуассона, I_{1E} і I_{2E} – перший та другий інваріанти тензора деформацій Лагранжа \mathbf{E} , компоненти якого виражаються через вектор переміщень відповідно до формул Коші:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} (\mathbf{D} + \mathbf{D}^T). \quad (7)$$

В рамках *другої постановки* враховується геометрична нелінійність, до

якої відносяться нелінійні ефекти в конструкції або її складової частини, що обумовлені зміною вихідної геометрії за рахунок великих зсувів і поворотів. В даному випадку актуальними є великі прогини, які передбачають значні кути повороту і малі механічні деформації. При цьому тензор деформацій \mathbf{E} нелінійним чином залежить від градієнтів переміщень [5]:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T) + \frac{1}{2}\mathbf{D}^T \cdot \mathbf{D}. \quad (8)$$

Незважаючи на те, що шина являє собою складну композиційну структуру, її головною складовою є гума. Гума відноситься до гіперпружних матеріалів. Для опису її поведінки, яка підкорюється складним закономірностям, в рамках *третьої постановки* була обрана модель гіперпружного матеріалу Муні-Рівліна. Порівняно з іншими моделями вона більш точно апроксимує рішення при значеннях деформацій, що мають місце під час роботи шини.

Потенційна енергія деформації для двопараметричної моделі гіперпружного нестисливого матеріалу Муні-Рівліна записується у вигляді [6]:

$$W = C_{10}(I_{1\Lambda} - 3) + C_{01}(I_{2\Lambda} - 3), \quad (9)$$

де C_{10} і C_{01} – константи Муні-Рівліна, які визначаються експериментально і для шинних матеріалів мають значення [7]: $C_{10} = 8,601 \cdot 10^5$, $C_{01} = 1,805 \cdot 10^6$. $I_{1\Lambda}$ і $I_{2\Lambda}$ – перший і другий інваріанти правого тензора деформацій Коші-Гріна Λ .

Нормальна робота шин пов'язана із їх контактною взаємодією з дорогою, що обумовлює наявність структурної нелінійності, яка була врахована в усіх трьох постановках. Структурна нелінійність полягає у накладанні обмежень на можливі розв'язки рівняння (1), що забезпечують непроникнення одного тіла в інше ($c_i(u) \leq 0$) та обмеження, які визначають наявність щільного контакту або контакту з розковзуванням ($h_j(u) = 0$).

У даній роботі для розрахунків контактної взаємодії використовувався розширений метод Лагранжа, відповідно до якого задача мінімізації зводиться до рівняння [8]:

$$\nabla \Pi + f_c(u) = 0. \quad (10)$$

Вектор контактних сил f_c визначається через множники Лагранжа λ_i , параметри штрафів γ_i та відповідно до існуючих обмежень має вигляд [9]:

$$f_c(u) = \sum_{i=1}^l (v_i + \gamma_i \cdot c_i(u)) \nabla c_i(u) + \sum_{j=1}^m \gamma_j \left(h_j(u) + \frac{\lambda_j}{\gamma_j} \right) \cdot \nabla h_j(u). \quad (11)$$

При цьому множники Лагранжа та параметри штрафів на кожному кроці k мають корегуватися наступним чином:

$$v_i^{k+1} = v_i^k + \gamma_i \cdot c_i(u^k); \quad \lambda_j^{k+1} = \lambda_j^k + \gamma_j \cdot c_j(u^k). \quad (12)$$

З урахуванням попередніх формулювань, можна привести наступний алгоритм розв'язання контактних задач розширеним методом Лагранжа [9]:

1. Початкові умови: коефіцієнти тертя μ ; початкова точка $u^0 = 0$; множники Лагранжа (λ_i^0, v_i^0) ; параметри штрафу (γ_i^0) , $k = 0$ (лічильник ітерацій).

2. Доки не досягнуто критерію збіжності, повторюються п. 2.1. – 2.3.:

2.1 Визначення контактних сил (через множники Лагранжа): $n = \lambda^k$ (нормальні сили), $t = v^k$ (дотичні сили).

2.2 Вирішується нелінійна система (11) методом Н'ютона-Рафсона [10] для отримання u^{k+1} . Приймається u^k в якості початкової точки, і

$$f_c = \sum_{i=1}^l f_{ci}$$

з наступною перевіркою умов проковзування для кожної пари контактних вузлів та нерівності:

– нема контакту $\lambda_i^k + \gamma_i^k \cdot h_i(u) \leq 0$, тоді $f_{ci} = 0$;

– прилипання $\lambda_i^k + \gamma_i^k \cdot h_i(u) > 0$, і $\|t_i\| \leq \mu_e \cdot \|n_i\|$, тоді

$$f_{ci} = (\lambda_i^k + \gamma_i^k \cdot c_i(u)) \nabla h_i(u) + (v_i^k + \gamma_i^k \cdot c_i(u)) \nabla c_i(u);$$

– ковзання $\lambda_i^k + \gamma_i^k \cdot h_i(u) > 0$ і $\|t_i\| \geq \mu_e \cdot \|n_i\|$, тоді

$$f_{ci} = (\lambda_i^k + \gamma_i^k \cdot c_i(u)) \nabla h_i(u) + (v_i^k + \gamma_i^k \cdot c_i(u)) \nabla c_i(u).$$

2.3 Коригування множників Лагранжа і параметрів штрафу.

Таким чином, дослідження НДС шини у рамках

першої постановки передбачає розв'язання (1) з урахуванням (3–7);

для *другої постановки* – розв'язання (1) з урахуванням (3–6, 8),

для *третьої постановки* – розв'язання (1) з урахуванням (3–5, 8, 9).

Розрахунок НДС шини при контактній взаємодії з дорогою у різних постановках. Для кожної з постановок за допомогою комп'ютерного програмного комплексу були проведені розрахунки НДС шини, навантаженої внутрішнім тиском (2 атм.) та вагою від автомобілю (у перерахунку на одну шину 375 кг.) при контактній взаємодії з дорогою. На рис. 2 наведені результати розподілу сумарних переміщень, отриманих в рамках трьох постановок.

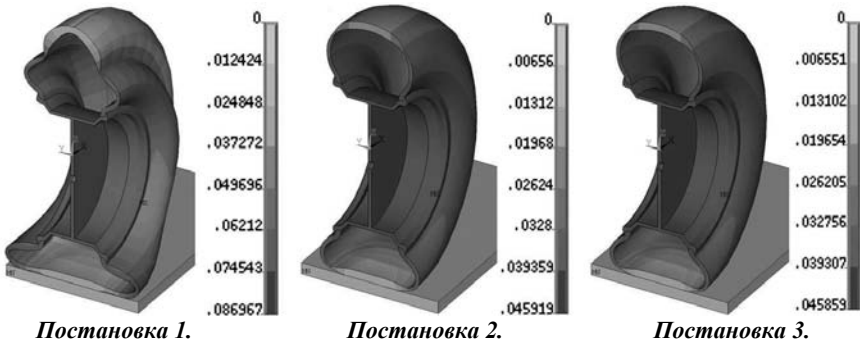


Рисунок 2 – Розподіл сумарних переміщень для трьох постановок

На розподілах (рис. 2) видно, що деформований стан об'єкта у постановці 1 викривлений: спостерігаються надмірно великі переміщення протектора і боковини відносно мінібоковини, що визначає некоректність геометрично та фізично лінійної постановки.

При порівнянні розподілів сумарних переміщень у другій та третій постановках можна відзначити, що характер деформування відрізняється слабо. Однак різниця між максимальним сумарним переміщенням в геометрично нелінійній задачі і задачі з урахуванням двох нелінійностей становить близько 10%, а між максимальними еквівалентними напруженнями – 20%, причому при розрахунках у другій постановці ці значення завищені. Наведена різниця свідчить, що результати рішення задачі без урахування гіперпружних властивостей гуми для квазістатичних задач можуть використовуватись в якості попередніх досліджень, результати яких визначаються з урахуванням певного коефіцієнту запасу.

Розрахунок НДС шини при різних режимах навантаження. Проведені раніше розрахунки показали неспроможність першої постановки, тому подальші дослідження при варіюванні параметрів осьового навантаження та внутрішнього тиску були реалізовані у другій та третій постановках. Результати, що були отримані, є якісно подібними, тому далі наведені тільки для третьої постановки.

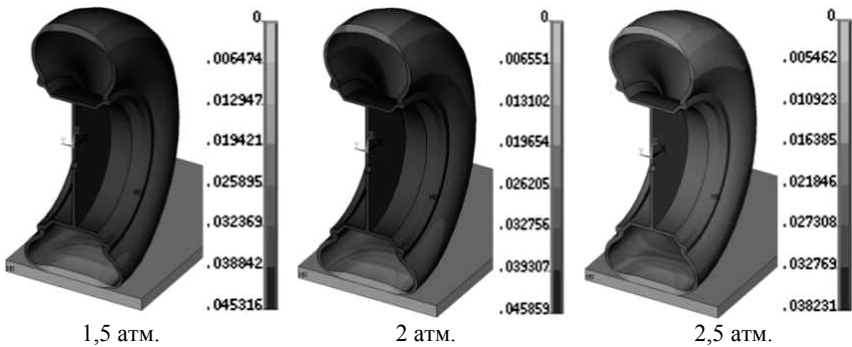


Рисунок 3 – Розподіл сумарних переміщень при різних значеннях внутрішнього тиску

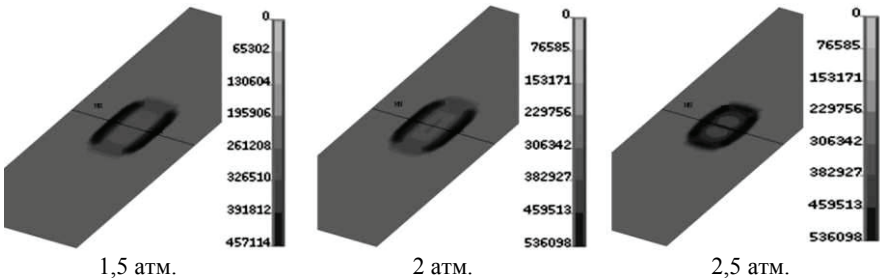


Рисунок 4 – Розподіл контактних тисків при різних значеннях внутрішнього тиску

На рис. 3 наведені поля сумарних переміщень при різних значеннях тиску. Площа плям контакту зменшується при збільшенні внутрішнього тиску. Це свідчить про те, що при надмірному тиску погіршується зчеплення шини з дорогою, вона стає більш жорсткою і як наслідок, зростають навантаження на інші елементи автомобіля (кузов, підвіску). Крім того, надлишковий тиск призводить до збільшення зносу центральної частини протектора.

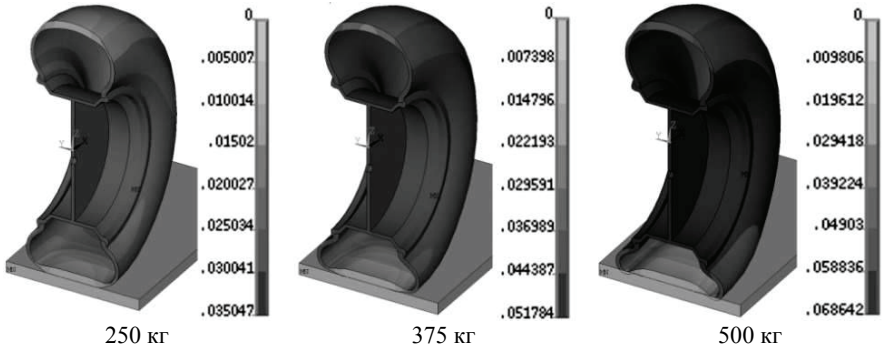


Рисунок 5 – Розподіл сумарних переміщень при різних значеннях ваги автомобілю

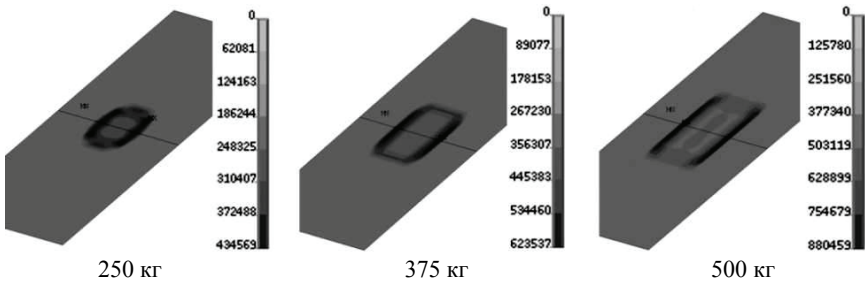


Рисунок 6 – Розподіл контактних тисків при різних значеннях ваги автомобілю

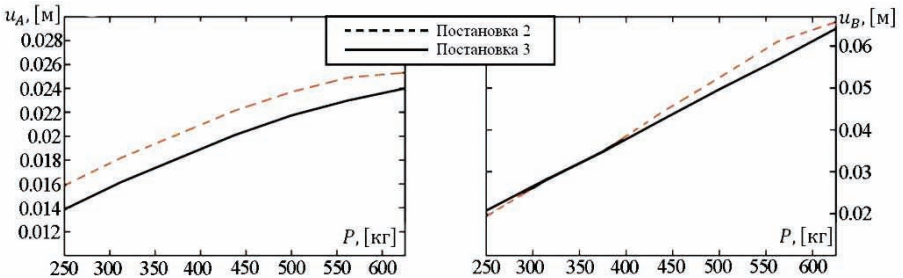


Рисунок 7 – Навантажувальні характеристики при різних значеннях осьового навантаження на шину

По результатам серії розрахунків для різних значень осьового наванта-

ження на шину були побудовані графіки залежності переміщення у контрольних точках (рис. 1) від значення маси автомобілю (рис. 7). З першого графіка видно, що горизонтальний прогин точки А суттєво знижується при урахуванні нелінійних властивостей матеріалу, тоді як на нормальний прогин шини (вертикальне переміщення точки В) ця нелінійність має невеликий вплив. Тобто найбільш чутливою до нелінійних властивостей гуми є боковина шини.

Висновки: Таким чином, при розрахунках контактної взаємодії з дорогою шини, навантаженої внутрішнім тиском і осьювою силою, в трьох постановках було встановлено, що дослідження напруженого стану пневматичної шини неможливе без урахування геометричної нелінійності її деформування.

Список літератури: 1. Бухин Б.Л. Введение в механику пневматических шин. – М: Химия, 1988. – 224 с. 2. Кнороз В.И. Работа автомобильной шины. – М.: «Транспорт», 1976. 3. Zienkiewicz O.C. The Finite Element Method. Fifth Edition. Volume 1: The Basis / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Oxford: Butterworth-Heinemann, 2000. 4. Клованич С.Ф. Метод конечных элементов в нелинейных задачах инженерной механики.– Запорожье: издательство журнала «Світ геотехніки», 2009. – 400с. 5. Krenk S. Non-linear Modeling and Analysis of Solids and Structures. – Cambridge, 2009. 6. Holzapfel G. Nonlinear Solid Mechanics. A Continuum Approach for Engineering. – New York: John Wiley&Sons, ltd, 2001. 7. Tönük, E. Computer Simulation of Dynamic Behavior of Pneumatic Tires, Ph. D. Thesis, Mechanical Engineering Department., Middle East Technical University. – Ankara,1998. 8. Wriggers P. Non-linear Finite Element Methods. – Berlin: Springer, 2008. 9. Sepra A.L., Igti F. Contact with Friction using the Augmented Lagrangian Method: a Conditional Constrained Minimization Problem // Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences. – Vol.22, no.2. – PP.273-289. 10. Wriggers P. Computational Contact Mechanics. 2nd Ed. – Berlin: Springer, 2006. – 518 pp.

Надійшла до редакції 27.08.2011.