

**М. В. НЕКРАСОВА**, канд. техн. наук, доцент, НТУ «ХПИ»;  
**С. А. ОЗЕРЯНЫЙ**, студент, НТУ «ХПИ»;  
**С. Н. ГЛАЗУНОВА**, студент, НТУ «ХПИ»

## **О КОРРЕКЦИИ НАКАПЛИВАЮЩЕЙСЯ ПОСТОЯННОЙ ОШИБКИ ПРИ ОПРЕДЕЛЕНИИ ОРИЕНТАЦИИ В БЕСПЛАТФОРМЕННЫХ ИНЕРЦИАЛЬНЫХ НАВИГАЦИОННЫХ СИСТЕМАХ**

Статтю присвячено проблемі корекції зростаючої з часом похибки у визначенні орієнтації в безплатформених інерційних навігаційних системах. Для її вирішення застосовувалась уточнююча формула Рунге. Розроблений метод перевірявся на схемі датчиків кутової швидкості.

**Ключові слова:** інерційна навігаційна система, орієнтація, формула Рунге.

Статья посвящена проблеме коррекции возрастающей со временем ошибки при определении ориентации в бесплатформенных инерциальных навигационных системах. Для ее решения применялась уточняющая формула Рунге. Разработанный метод проверялся на схеме датчиков угловой скорости.

**Ключевые слова:** инерциальная навигационная система, ориентация, формула Рунге.

In article the problem of correcting growing errors in determining the future orientation in strapdown inertial navigation systems is devoted. To fix it, clarifying formula Runge was applied. The method tested on circuit angular velocity sensor.

**Keywords:** inertial navigation system, orientation, formula Runge.

**Введение.** В данной работе была рассмотрена схема из трех датчиков угловой скорости (ДУС) (рис. 1).

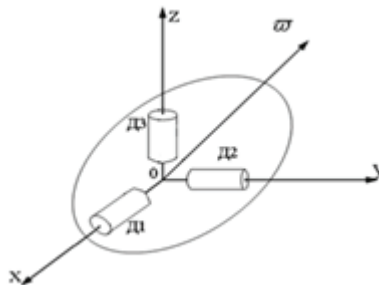


Рисунок 1 – Система ДУС

**Основная часть.** Модель была построена на основании динамических уравнений Эйлера

$$\begin{aligned}
I_1 \dot{\omega}_1 - (I_2 - I_3) \omega_2 \omega_3 &= 0; \\
I_2 \dot{\omega}_2 - (I_3 - I_1) \omega_3 \omega_1 &= 0; \\
I_3 \dot{\omega}_3 - (I_1 - I_2) \omega_1 \omega_2 &= 0,
\end{aligned}
\tag{1}$$

где  $I_1, I_2, I_3$  – главные центральные моменты инерции;  $\omega_1, \omega_2, \omega_3$  – компоненты вектора абсолютной угловой скорости.

Главные центральные моменты инерции выбирались согласно условию физической реализуемости:

$$I_1 \geq I_2 \geq I_3. \tag{2}$$

На основе следующей системы уравнений моделировались показания трех ДУС (см. рис. 1):

$$\begin{cases} \dot{\Theta}_1^* = \omega_1; \\ \dot{\Theta}_2^* = \omega_2; \\ \dot{\Theta}_3^* = \omega_3, \end{cases}
\tag{3}$$

где  $\dot{\Theta}_1^*, \dot{\Theta}_2^*, \dot{\Theta}_3^*$  – компоненты вектора кажущегося поворота.

Уравнением

$$\Delta \Theta_i^*(t_n) = \Theta_i^*(t_n) - \Theta_i^*(t_{n-1}) \tag{4}$$

задавались приращения кажущихся поворотов.

Также решалось кинематическое уравнением для получения эталонных значений параметров ориентации:

$$\Lambda = \frac{1}{2} \Lambda \circ \bar{\omega}, \tag{5}$$

где  $\Lambda$  – кватернион ориентации.

Численное интегрирование систем проводилось методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Задавались следующие начальные условия:

$$\bar{\omega} = \{-0.05, 0.015, 0.075\}, \text{ рад/с};$$

$$\bar{\Theta} = \{0, 0, 0\}, \text{ рад};$$

$$\Lambda = \{1, 0, 0, 0\}.$$

Так как, на протяжении времени моделирования получали нормированный кватернион ориентации, то можно сделать вывод о достаточной точности моделирования схемы из трех ДУС.

Далее по полученным модельным значениям алгоритмом первого порядка [1]:

$$\begin{aligned}
\Lambda_n^* &= \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta \Lambda_n^*; \\
\Delta \Lambda_n^* &= 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^*.
\end{aligned}
\tag{6}$$

определялись параметры кватерниона ориентации. Сравнивая их с модельными параметрами, видно, что дрейф (7)  $\delta v_n$  со временем возрастает (рис. 2).

$$\delta v_n = 2 \arctg \frac{\sqrt{\delta \lambda_{n1}^2 + \delta \lambda_{n2}^2 + \delta \lambda_{n3}^2}}{\delta \lambda_{n0}}, \quad (7)$$

где  $\delta \Lambda_n = \Lambda_n^* \circ \tilde{\Lambda}_n = \{\delta \lambda_{n0}, \delta \lambda_{n1}, \delta \lambda_{n2}, \delta \lambda_{n3}\}$ .

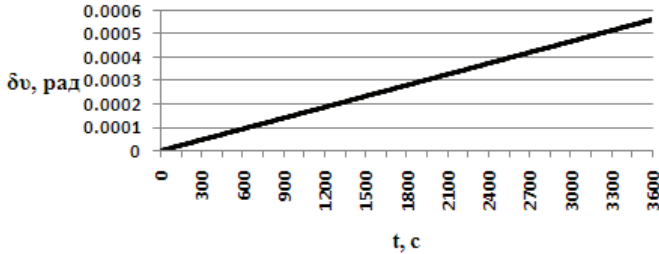


Рисунок 2 – Дрейф при определении ориентации обычным алгоритмом первого порядка

Эту проблему можно решить, применяя формулу Рунге [2]. Изложим соответствующее решение.

Для этого сначала определялись кватернионы ориентации с шагом  $h$  и  $2h$ , согласно (6). Затем проводилось уточнение ориентации с шагом  $2h$  по формуле:

$$\Lambda_{2h}^{ym} = \Lambda_h^* + \frac{\Lambda_h^* - \Lambda_{2h}^*}{2^m - 1}, \quad (8)$$

где  $m$  – количество совпадающих членов в разложениях точного кватерниона ориентации  $\Lambda$  и приближенного  $\Lambda^*$ .

Так как аналитическое определение параметра  $m$  является сложной задачей, можно произвести экспериментальное сравнение, результаты которого занесены в следующую таблицу (см. табл. 1).

Видно, что при  $m = 2$  получаем наименьшую погрешность. Сравним погрешности обычного и уточненного алгоритмов первого порядка (рис. 3).

То есть, уточненный алгоритм первого порядка ((6) с уточнением в виде (8)) в 1300 раз точнее определяет ориентацию, чем обычный алгоритм (6).

Если определять ориентацию алгоритмом второго порядка [1]:

$$\begin{aligned} \Lambda_n^* &= \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta \Lambda_n^*; \\ \Delta \Lambda_n^* &= 1 + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla \Theta_n^*|^2. \end{aligned} \quad (9)$$

то дрейф (7) возрастает, но медленнее, чем в предыдущем случае.

Определим экспериментально  $m$  для уточненного алгоритма второго порядка (формулы (8) и (9)):

Снова получаем при  $m = 2$  наименьшую погрешность. Сравним погрешности обычного и уточненного алгоритмов (рис. 5).

Таблица 1 – Зависимость дрейфа от предполагаемой точности алгоритма первого порядка

Предполагаемая точность алгоритма	Значения дрейфа после 1 часа работы, рад
1	0.00113114
2	0.00000434211
3	0.000322626
4	0.00045185

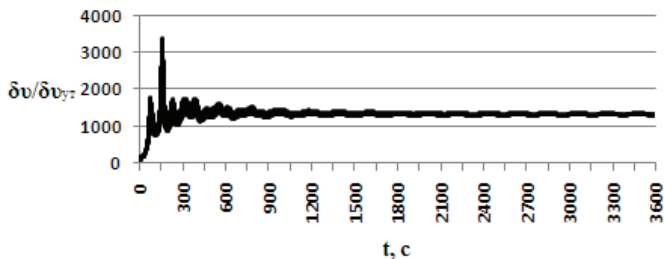


Рисунок 3 – Отношение дрейфов обычного и уточненного алгоритмов определения ориентации

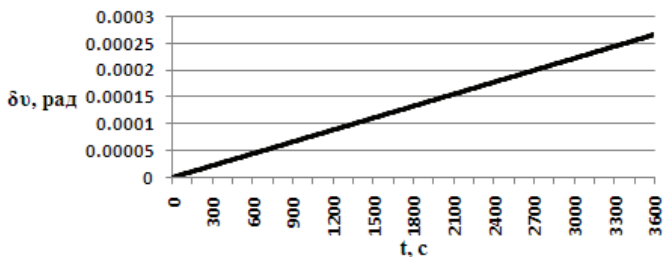


Рисунок 4 – Дрейф при определении ориентации обычным алгоритмом второго порядка

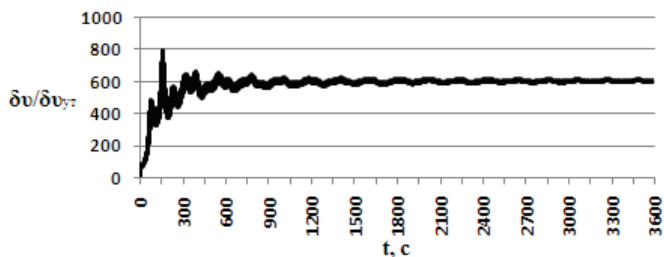


Рисунок 5 – Отношение дрейфов обычного и уточненного алгоритмов определения ориентации второго порядка

Итак, уточненные алгоритмы первого и второго порядка имеют одинаковую точность.

Таблица 2 – Зависимость дрейфа от предполагаемой точности алгоритма второго порядка

Предполагаемая точность алгоритма	Значения дрейфа после 1 часа работы, рад
1	0.000532
2	0.000000443093
3	0.000152569
4	0.000213419

Уточненный алгоритм определения ориентации второго порядка в 600 раз точнее обычного алгоритма этого порядка.

Теперь рассмотрим обычный алгоритм третьего порядка [1]. Считаем ориентацию в следующем виде:

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta\Lambda_n^*;$$

$$\Delta\Lambda_n^* = 1 + \frac{1}{2} \nabla\Theta_n^* - \frac{1}{8} |\nabla\Theta_n^*|^2 + \frac{1}{24} (\nabla\Theta_n^* \times \nabla^2\Theta_n^*) - \frac{1}{48} |\nabla\Theta_n^*|^2 \nabla\Theta_n^*. \quad (10)$$

Дрейф (7) в этом случае (рис. 6) также возрастает, но медленнее, чем для обычного алгоритма второго порядка.

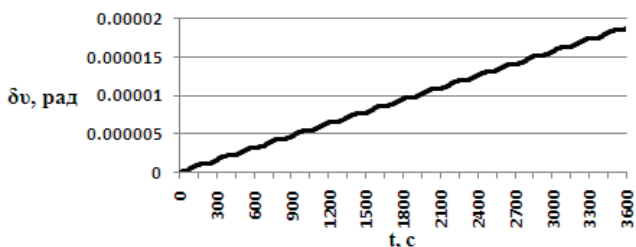


Рисунок 6 – Дрейф при определении ориентации обычным алгоритмом третьего порядка

Также определим экспериментально  $m$  для уточненного алгоритма третьего порядка (табл. 3).

При  $m = 2$  получаем наименьшую погрешность. Также сравним дрейфы обычного и уточненного алгоритмов (рис. 7).

В этом случае уточненный алгоритм определения ориентации (формулы (8) и (10)) в 42 раза точнее обычного алгоритма (10).

Таблица 3 – Зависимость дрейфа от предполагаемой точности алгоритма третьего порядка

Предполагаемая точность алгоритма	Значения дрейфа после 1 часа работы, рад
1	0.0000388705
2	0.000000440037
3	0.0000105407
4	0.0000149328

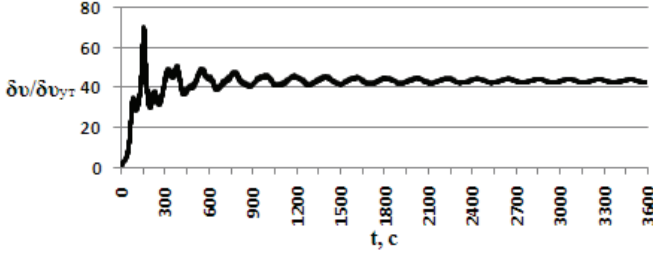


Рисунок 7 – Отношение дрейфов обычного и уточненного алгоритмов определения ориентации третьего порядка

В результате исследований получили, что уточненные алгоритмы определения ориентации имеют одинаковую точность.

Рассмотрим этот факт подробнее.

Так как во всех случаях  $m = 2$ , то:

$$\Lambda_{2h}^{ym} = \Lambda_h^* + \frac{\Lambda_h^* - \Lambda_{2h}^*}{3}, \quad (11)$$

Также справедливы равенства:

$$\Lambda_n^* = \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta \Lambda_n^* = \Lambda_{n-2}^* \circ \Delta \Lambda_{n-1}^* \circ \Delta \Lambda_n^*, \quad (12)$$

Опустим \* и запишем кватернионы ориентации, посчитанные с разным шагом  $h$ , согласно (12):

$$\begin{aligned} \Lambda_n^h &= \Lambda_{n-2}^h \circ \Delta \Lambda_{n-1}^h \circ \Delta \Lambda_n^h; \\ \Lambda_n^{2h} &= \Lambda_{n-1}^{2h} \circ \Delta \Lambda_n^{2h}. \end{aligned} \quad (13)$$

Кватернионы в совпадающих узлах определяют одно положение в пространстве:

$$\Lambda_{n-1}^{2h} = \Lambda_{n-2}^h. \quad (14)$$

Перепишем (12) с учетом (13) и (14):

$$\Lambda_n^{ym} = \frac{1}{3} \Lambda_{n-2}^h \circ (4 \Delta \Lambda_{n-1}^h \circ \Delta \Lambda_n^h - \Delta \Lambda_n^{2h}) = \frac{1}{3} \Lambda_{n-2}^h \circ \Delta \Lambda_s, \quad (15)$$

где  $s$  – порядок алгоритма.

Для алгоритма первого порядка (6) имеем:

$$\Delta \Lambda_1 = -\frac{1}{4} \nabla \Theta_{n-1}^h \nabla \Theta_n^h + \frac{1}{2} \nabla \Theta_{n-1}^h + \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^h + \frac{1}{4} \nabla \Theta_{n-1}^h \times \nabla \Theta_n^h - \frac{1}{2} \nabla \Theta_n^{2h};$$

$$\nabla \Theta_{n-1}^h + \nabla \Theta_n^h - \nabla \Theta_n^{2h} = 0;$$

$$\Delta \Lambda_1 = -\nabla \Theta_{n-1}^h \nabla \Theta_n^h + \nabla \Theta_{n-1}^h \times \nabla \Theta_n^h.$$

Для алгоритма второго порядка (9) получили:

$$\Delta \Lambda_2 = \Delta \Lambda_1 - \Delta \hat{\Lambda}_2;$$

$$\Delta \hat{\Lambda}_2 = \frac{1}{2}((\nabla \Theta_n^h)^2 + (\nabla \Theta_{n-1}^h)^2 - (\nabla \Theta_n^{2h})^2) + \frac{1}{2}(\nabla \Theta_n^h)^2 \nabla \Theta_{n-1}^h + \\ + \frac{1}{2}(\nabla \Theta_{n-1}^h)^2 \nabla \Theta_n^h - \frac{1}{8}(\nabla \Theta_{n-1}^h)^2 (\nabla \Theta_n^h)^2.$$

Оценим порядок малости  $\Delta \Lambda_1$  и  $\Delta \hat{\Lambda}_2$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \Lambda_1}{\Theta_n^k} = \text{const} \neq 0$$

при  $k = 2$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Delta \hat{\Lambda}_2}{\Theta_n^k} = \text{const} \neq 0$$

при  $k = 4$ .

То есть, влияние  $\Delta \hat{\Lambda}_2$  на определении  $\Delta \Lambda_2$  мало по сравнению с  $\Delta \Lambda_1$ . Соответственно при определении  $\Delta \Lambda_3$  основное влияние будет оказывать  $\Delta \Lambda_1$ . Из-за этого точность всех уточненных алгоритмов одинаковая.

**Выводы.** Вычислительная сложность уточненного алгоритма первого порядка ниже, чем у двух других уточненных алгоритмов. Поэтому применение его более целесообразно.

Вычислительная сложность уточненного алгоритма первого порядка выше, чем у обычного алгоритма первого порядка, но ниже, чем у обычного алгоритма третьего порядка.

Также уточненный алгоритм первого порядка точнее, чем обычный алгоритм третьего порядка.

Все эти факты подтверждают рациональность использования уточненного алгоритма первого порядка (формулы (6) и (8)) для определения ориентации твердого тела.

**Список литературы:** 1. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М.: Наука, 1973. – 320 с. 2. Демидович Б. П., Марон И. А., Шувалова Э. З. Численные методы анализа. Приближение функций, дифференциальные и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1967. – 368 с.

*Поступила в редколлегию 12.10.2012*