

Yu. I. Samoilenko. Ukrainian Mathematical Journal. 2007. № 1. 126-139. Print. **2.** Starun I.I. Linijni synhulyarno zbureni systemy. I.I. Starun, M.I. Shkil'. Ukrayins'kyj matematychnyj zhurnal. 2002. № 12. 1688-1693. Print. **3.** Hryshchak V. Z. Hibrydni asymptotychni metody ta tekhnika yikh zastosovannya. V. Z. Hryshchak. Zaporizhzhya: ZNU, 2009. 226 Print. **4.** Gristchak V. Z. On approximate analytical solution of nonlinear thermal emission problems. V. Z. Gristchak, A. M. Pogrebickaya. Technische Mechanik. 2011. V. 31, № 2. 112-120 Print. **5.** Chambrs R.L. Radiation in efficiency for one-dimensional heat flow in a circular fin. R.L. Chambrs, E.V. Somers. Heat Transfer. 1999. V. 81, November. 327-329 Print. **6.** Hryshchak V. Z. Podvijnyj asymptotychnyj rozklad u problemi promenevoho teploobminu kil'cevykh reber trapeceyidal'noyi formy. V. Z. Hryshchak, H. M. Pohrebyc'ka. Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polya. 2009. Vol. 52, № 3. 217-223 Print. **7.** Pogrebickaya A. M. Ob ocenke tochnosti analiticheskogo gibridnogo resheniya zadachi teploperenosa. A. M. Pogrebickaya, S. I. Smirnova. Uchenye zapiski Tavricheskogo nacional'nogo universiteta im. V. I. Vernadskogo. Seriya: Fiziko-matematicheskie nauki. 2010. Vol. 23 (62), № 2. 113-123 Print. **8.** Na C. Vychislitel'nye metody resheniya prikladnyh granichnyh zadach. C. Na. Moscow: Mir, 1982. 294 Print.

Поступила (received) 05.10.2014

УДК 531.3

Б.В. УСПЕНСКИЙ, аспирант, НТУ «ХПИ»;
К.В. АВРАМОВ, д-р техн. наук, профессор, НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ СВОБОДНЫХ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ СИЛОВЫХ ПЕРЕДАЧ МЕТОДОМ НЕЛИНЕЙНЫХ НОРМАЛЬНЫХ ФОРМ ШОУ-ПЬЕРА

В статье предложена модификация метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования механических систем с кусочно-линейными упругими характеристиками. Такая модификация позволяет вдвое снизить размерность системы обыкновенных уравнений, используемой для расчета форм, увеличивая таким образом точность и быстродействие метода. Рассмотрены механические системы с двумя степенями свободы, которые описывают колебания элементов силовой передачи трехцилиндрового транспортного двигателя.

Ключевые слова: нелинейные нормальные формы, формы Пьера-Шоу, кусочно-линейная система, крутильные колебания, свободные колебания, силовая передача.

Введение. Технические системы часто включают в себя элементы, которые односторонне контактируют между собой. Такие системы моделируют разнообразные технологические процессы [1]. Кусочно-линейные системы описывают динамику механических систем с зазорами, шлицевыми соединениями, упругими муфтами, зубчатыми передачами. Такие системы могут совмещать крутильные, продольные и изгибные колебания [2, 3]. Поэтому мно-

© Б. В. Успенский, К. В. Аврамов, 2014

го было предпринято усилий для исследования кусочно-линейных систем [4, 5]. Нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах рассматриваются в работах [6, 7]. Общая теория нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера описана в работах [8, 9]. Нелинейные нормальные формы Каудерера-Розенберга подробно рассмотрены в монографии [10]. Обзор теоретических исследований по нелинейным формам представлен в статье [11], а обзор по прикладным исследованиям содержится в [12].

В этой статье предлагается новый вариант метода нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера для исследования кусочно-линейных систем. Основой для разработки этого алгоритма была статья [7]. В результате подхода, предложенного в настоящей статье, разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений для определения нелинейной нормальной формы в два раза меньше по сравнению с системой, предложенной в [7].

1 Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему с конечным числом степеней свободы и трилинейной упругой характеристикой:

$$M \ddot{z} + F(z) = 0; \quad (1)$$

$$F(z) = \begin{cases} K_1 z; & \Delta_2 \leq h^T z \leq \Delta_3; \\ K_2 z - b_2; & h^T z < \Delta_2; \\ K_3 z - b_3; & \Delta_3 < h^T z, \end{cases} \quad (2)$$

где z – вектор обобщенных координат системы размерности N ; $M = \text{diag}(M_1, \dots, M_N)$; h – вектор-столбец размерности N ; K_1, K_2, K_3 – матрицы размерности $N \times N$; b_2, b_3 – векторы-столбцы, обеспечивающие непрерывность трилинейной упругой характеристики; $\Delta_2 < 0, \Delta_3 > 0$.

Теперь, следуя [6, 7], перейдем к главным координатам, соответствующим линейному участку системы $\Delta_2 \leq h^T z \leq \Delta_3$. Для этого введем замену переменных:

$$z = Q \eta, \quad (3)$$

где Q – матрица собственных векторов матрицы $M^{-1}K_1$. Относительно координат η система (1) приобретает следующий вид:

$$\ddot{\eta} + \Lambda_1 \eta = f(\eta), \quad (4)$$

где $\Lambda_1 = Q^{-1}M^{-1}K_1Q = \text{diag}(\omega_1^2, \dots, \omega_N^2)$ – диагональная матрица, состоящая из квадратов собственных частот. Кусочно-линейная вектор-функция $f(\eta) = (f_1, \dots, f_N)$ принимает следующий вид:

$$f(\eta) = \begin{cases} 0, & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3; \\ Z^{(2)} \eta + Q^{-1}M^{-1}b_2, & h^T Q \eta < \Delta_2; \\ Z^{(3)} \eta + Q^{-1}M^{-1}b_3, & \Delta_3 < h^T Q \eta, \end{cases} \quad (5)$$

где $Z^{(2)} = \Lambda_1 - Q^{-1}M^{-1}K_2Q$; $Z^{(3)} = \Lambda_1 - Q^{-1}M^{-1}K_3Q$; $Z^{(2)} = \{z_{ij}^{(2)}\}$;
 $Z^{(3)} = \{z_{ij}^{(3)}\}$.

2 Построение ННФ Шоу-Пьера. Следуя работам [8, 9], введем ведущие координаты $(\eta_i, \dot{\eta}_i)$. Для этих координат воспользуемся следующей заменой переменных:

$$\eta_i(t) = a(t) \cos \varphi(t); \quad \dot{\eta}_i(t) = -\omega_i a(t) \sin \varphi(t). \quad (6)$$

Тогда ведомые координаты выражаются через уравнения, описывающие нелинейную нормальную форму:

$$\begin{aligned} \eta_j(a, \varphi) &= P_j(a, \varphi); \\ \dot{\eta}_j(a, \varphi) &= R_j(a, \varphi); \quad j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, N. \end{aligned} \quad (7)$$

Движения на нелинейной нормальной форме описываются следующей динамической системой:

$$\dot{a} = -\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi; \quad \dot{\varphi} = \omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos \varphi. \quad (8)$$

Функции $P_j(a, \varphi)$ из (7) разложим по следующей системе базисных функций:

$$P_j(a, \varphi) = \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_j^{(l,m)} T_{l,m}(a, \varphi), \quad (9)$$

где $T_{l,m}(a, \varphi) = A_l(a) \cos(m-1)\varphi$; $A_l(a)$, $l = 1, \dots, N_a$ – система базисных функций; $C_j^{(l,m)}$ – неизвестные коэффициенты, подлежащие определению. Подчеркнем, что в работах [7-9] производилось разложение функции $Q_j(a, \varphi)$ по системе ортонормированных функций. В предлагаемом здесь подходе это разложение не используется, что сокращает в два раза размерность разрешающей системы нелинейных алгебраических уравнений. В этом состоит основное преимущество предлагаемого здесь метода.

Используя соотношения (7,9) и правила дифференцирования, получим:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_j &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} (A'_l \cos[(m-1)\varphi] \cdot \dot{a} - A_l(m-1) \sin[(m-1)\varphi] \cdot \dot{\varphi}); \\ \ddot{\eta}_j &= \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} \left(\cos[(m-1)\varphi] [A''_l \dot{a}^2 + A'_l \ddot{a} - A_l(m-1)^2 \dot{\varphi}^2] - \right. \\ &\quad \left. - \sin[(m-1)\varphi] [2(m-1)A'_l \dot{a} \dot{\varphi} + A_l \ddot{\varphi}] \right); \end{aligned} \quad (10)$$

Для определения первых производных, входящих в соотношения (10), использовались уравнения (8). Для расчета вторых производных использовались следующие соотношения:

$$\ddot{a} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{f_i}{\omega_i} \sin \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_i} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \dot{\varphi} \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \right] \sin \varphi + f_i \cos \varphi \right); \quad (11)$$

$$\ddot{\varphi} = \frac{d}{dt} \left(\omega_i - \frac{f_i}{a\omega_i} \cos \varphi \right) = -\frac{1}{\omega_i a} \left(\left[\frac{\partial f_i}{\partial a} \dot{a} + \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} \dot{\varphi} - f_i \frac{\dot{a}}{a} \right] \cos \varphi - f_i \sin \varphi \cdot \dot{\varphi} \right). \quad (12)$$

Отметим, что частные производные от функции f_i из (8) определяются так:

$$\frac{\partial f_i}{\partial a} = \begin{cases} 0; & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a}; & h^T Q \eta < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial a}; & \Delta_3 < h^T Q \eta; \end{cases} \quad \frac{\partial f_i}{\partial \varphi} = \begin{cases} 0; & \Delta_2 \leq h^T Q \eta \leq \Delta_3; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(2)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi}; & h^T Q \eta < \Delta_2; \\ \sum_{k=1}^N z_{ik}^{(3)} \frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi}; & \Delta_3 < h^T Q \eta, \end{cases} \quad (13)$$

где

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial a} = \begin{cases} \sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_k^{l,m} A_l^m \cos(m-1)\varphi; & k \neq i; \\ \cos \varphi; & k = i; \end{cases}$$

$$\frac{\partial \eta_k}{\partial \varphi} = \begin{cases} -\sum_{l=1}^{N_a} \sum_{m=1}^{N_\varphi} C_k^{l,m} (m-1) A_l^m \sin(m-1)\varphi; & k \neq i; \\ -a \sin \varphi; & k = i. \end{cases}$$

Основными неизвестными нелинейной нормальной формы (9) являются коэффициенты $C_j^{(l,m)}$. Для их расчета к динамической системе (4) применим метод Галеркина, который выражается так:

$$\int_{a_{1,0}}^{a_{2,0}} \int_0^{2\pi} \left\{ \ddot{\eta}_j + \omega_j^2 \eta_j - f_j(\eta) \right\} T_{l,m} da d\varphi = 0;$$

$$j = 1, \dots, N; j \neq i;$$

$$l = 1, \dots, N_a; m = 1, \dots, N_\varphi. \quad (14)$$

В уравнения (14) вместо вторых производных вводят соотношения (10, 11, 12).

Система (14) представляет собой систему $(N-1) N_a N_\varphi$ нелинейных алгебраических уравнений относительно $(N-1) N_a N_\varphi$ коэффициентов $C_j^{l,m}$. Если эти коэффициенты рассчитаны, то нелинейная нормальная форма (9) приближенно определена. После определения нелинейной нормальной формы исследуется динамика на ней. Динамика на форме описывается системой (8).

Для численного решения полученной системы нелинейных алгебраических уравнений применяется метод Ньютона-Рафсона. Интегрирование в (14)

осуществляется по области $a \in [0; a_0]$, $\varphi \in [0; 2\pi]$. Область интегрирования $a \in [0; a_0]$ разбивается на N_s участков $[a_j; a_{j+1}]$; $j=1, \dots, N_s$; $a_1=0$; $a_{N_s+1}=a_0$. На каждом участке строится своя система ортогональных базисных функций $A_l, l=1, \dots, N_a$. Следуя [7-9], на каждом участке воспользуемся линейными базисными функциями:

$$A_1(a) = \frac{a - a_j}{a_{j+1} - a_j}; \quad A_2 = \frac{a_{j+1} - a}{a_{j+1} - a_j}.$$

3 Численный анализ механических систем с конечным числом степеней свободы. С помощью нелинейных нормальных форм исследуем крутильные колебания силовых передач двигателей внутреннего сгорания с противоположно движущимися поршнями. Модели таких систем рассмотрены в работах [13-15]. Крутильные колебания опишем системой с кусочно-линейной упругой характеристикой, представленной на рис. 1.

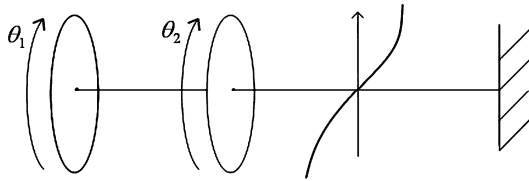


Рисунок 1 – Механическая система

Эта система описывается следующими обыкновенными дифференциальными уравнениями:

$$\begin{aligned} I_1 \ddot{\theta}_1 - c_1(\theta_2 - \theta_1) &= 0; \\ I_2 \ddot{\theta}_2 + c_1(\theta_2 - \theta_1) + f(\theta_2) &= 0; \end{aligned} \quad (15)$$

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_1 \theta_2, & \theta_2 < \Delta; \\ c_2 \theta_2 - \Delta(c_2 - c_1), & \theta_2 \geq \Delta, \end{cases} \quad (16)$$

где θ_1, θ_2 – обобщенные координаты, описывающие колебания двух коленчатых валов двигателя; c_1 – жесткость зубчатой передачи между коленчатыми валами. Билинейная упругая характеристика $f(\theta_2)$ описывает нелинейную упругую муфту.

Численный анализ проводился для следующих значений параметров системы:

$$c_1 = 300 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad \Delta = 0,00104 \text{ рад}; \quad I_1 = 0,3 \text{ кг/м}^2; \quad I_2 = 0,45 \text{ кг/м}^2. \quad (17)$$

Собственные частоты линейных колебаний системы с малыми амплитудами таковы: $\omega_1 = 577,350 \text{ рад/с}$; $\omega_2 = 1414,214 \text{ рад/с}$.

Проводились расчеты нелинейной нормальной формы с помощью под-

хода представленного выше. Результаты расчетов для $c_2 = 0,5 c_1$ приводятся на рис. 2. На рис. 2, *a* представлена нелинейная нормальная форма в безразмерном пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Из этого рисунка следует, что нелинейная нормальная форма достаточно близка к плоскости. Напомним, что плоскостью является нормальная форма линейной системы. Для исследования отличия нелинейной нормальной формы (рис. 2, *a*) от плоскости строились линии уровня. Они представлены на рис. 2, *б*. Как видно из этого рисунка, линии уровня отличаются от прямых, что свидетельствует о влиянии нелинейности на вид нелинейной нормальной формы.

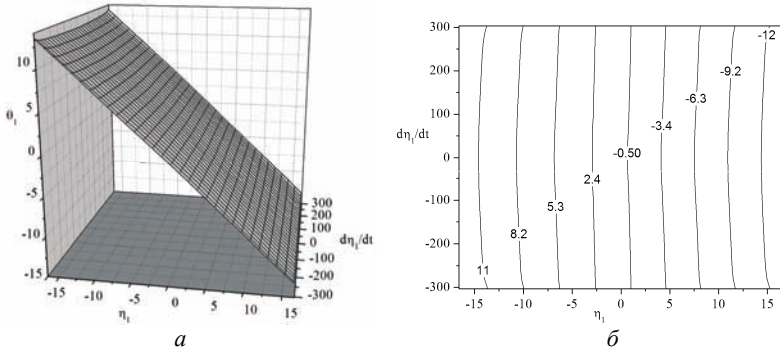


Рисунок 2 – Нелинейная нормальная форма для случая $c_2 = 0,5 c_1$; *a* – поверхность в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$, *б* – линии уровня этой поверхности

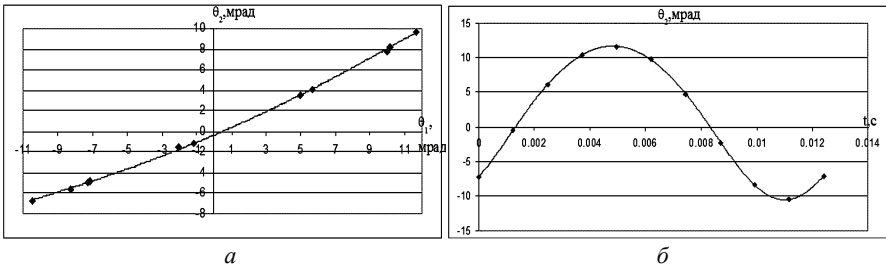


Рисунок 3 – Нелинейная нормальная форма; *a* – форма представлена в конфигурационном пространстве; *б* – изменение координаты θ_2 с течением времени

Полученная нелинейная нормальная форма перестраивается в конфигурационном пространстве [11] обобщенных координат системы (15). Результаты расчетов представляются сплошной линией на рис. 3, *a*. Итак, исследуемая нелинейная нормальная форма также является формой Каудерера-Розенберга, так как ее можно представить в виде однозначной функции $\theta_2(\theta_1)$. Отметим некоторые свойства нормальной формы Каудерера-Розенберга. Во-первых, эта нормальная форма не проходит через точку $\theta_1 = \theta_2 = 0$. Во-

вторых, эта нормальная форма удовлетворяет соотношению: $|\max \theta_1| \neq |\min \theta_1|$. Оба эти свойства объясняются несимметричностью билинейной упругой характеристики рассматриваемой динамической системы.

Для подтверждения правильности расчетов нелинейной нормальной формы проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, принадлежащих нелинейной нормальной форме. Результаты расчетов представлены на рис. 3, а точками. Близость результатов, полученных различными методами, свидетельствует, что нелинейная нормальная форма получена правильно. На рис. 3, б сплошной линией представлены движения системы $\theta_1(t)$ на нелинейной нормальной форме, а точками показаны результаты прямого численного интегрирования системы (15) из начальных условий, соответствующих нелинейной нормальной форме. Колебания, полученные из нелинейной нормальной формы и результаты прямого численного интегрирования системы (15) близки.

Как следует из рис. 2, нелинейная нормальная форма билинейной системы близка к плоскости в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \theta_1)$. Подчеркнем, что эта нелинейная нормальная форма значительно больше отклоняется от плоскости, если ее изобразить в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_1)$. Эта поверхность изображена на рис. 4, а. На рис. 4, б показаны линии уровня. В этом случае они значительно отличаются от прямых.

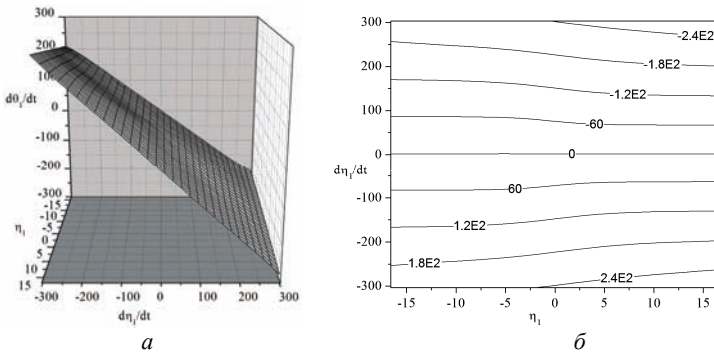


Рисунок 4 – Нелинейная нормальная форма в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_1)$

Нелинейные нормальные формы рассчитывались для разных значений амплитуд колебаний a_0 . Для каждой амплитуды определялась частота движений на нелинейной нормальной форме Ω_1 . Результаты такого расчета представлены на скелетной кривой (рис. 5).

Теперь рассмотрим нелинейные нормальные формы крутильных колебаний механической системы (15) с трилинейной упругой характеристикой, которая имеет следующий вид:

$$f(\theta_2) = \begin{cases} c_2\theta_2 + \Delta(c_2 - c_1), & \theta_2 \leq -\Delta; \\ c_1\theta_2, & -\Delta < \theta_2 < \Delta; \\ c_2\theta_2 - \Delta(c_2 - c_1), & \theta_2 \geq \Delta. \end{cases} \quad (18)$$

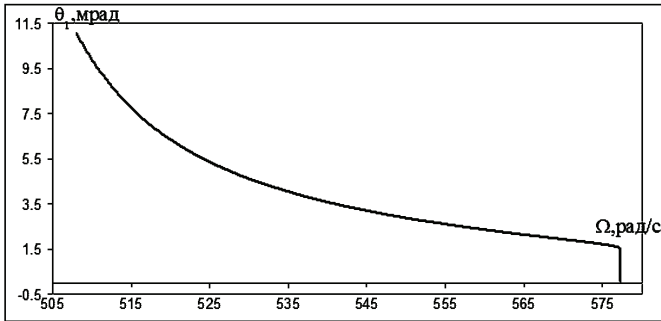


Рисунок 5 – Скелетная кривая колебаний θ_1

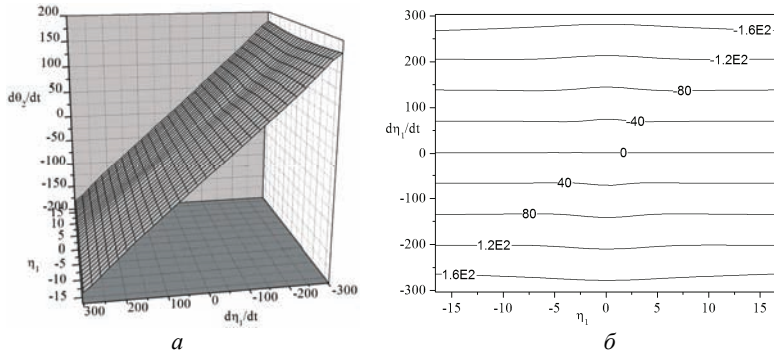


Рисунок 6 – Нелинейная нормальная форма системы с тринейной упругой характеристикой

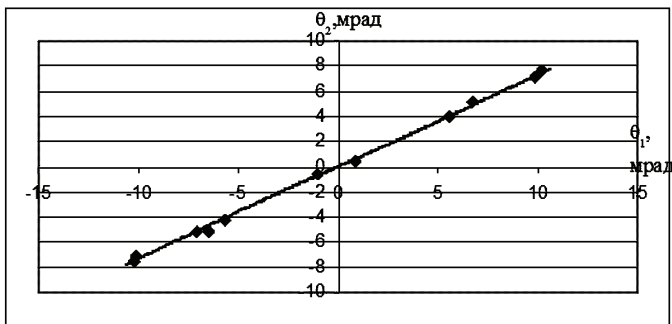


Рисунок 7 – Нелинейная нормальная форма Каудерера-Розенберга

Рассмотрим нелинейную нормальную форму системы с нелинейностью (18) для параметров (17) при $c_2 = 0,7 c_1$. Нелинейная нормальная форма этой системы в пространстве $(\eta_1, \dot{\eta}_1, \dot{\theta}_2)$ представлена на рис. 6, а. На рис. 6, б показаны линии уровня этой поверхности. Полученная нелинейная нормальная форма близка к плоскости. На рис. 7 показана эта же нелинейная нормальная форма в конфигурационном пространстве (θ_1, θ_2) . Итак, нелинейная нормальная форма Каудерера-Розенберга $\theta_2(\theta_1)$ проходит через начало координат. Более того, она является симметричной относительно начала координат. Все эти свойства нелинейной нормальной формы являются следствием симметричности тринейной упругой характеристики. Для проверки правильности расчета нелинейной нормальной формы (рис. 7) проводилось прямое численное интегрирование системы (15) из начальных условий, которые находятся на нелинейной нормальной форме. Результаты прямого численного интегрирования представлены точками на рис. 7. Близость результатов, полученных двумя методами, свидетельствует о правильности проведенных расчетов.

Выводы. В статье предложен альтернативный работам [6, 8] подход к расчету нелинейных нормальных форм Шоу-Пьера в кусочно-линейной системе. В предлагаемом подходе разрешающая система нелинейных алгебраических уравнений в два раза меньше аналогичной системы, рассмотренной в статье [7].

Показано, что в модальных координатах одного из линейных участков нелинейная нормальная форма близка к плоскости. Она может существенно отличаться от плоскости, если ее перестроить в пространстве, в которое будут входить как модальные координаты одного линейного участка, так и обобщенные скорости исходной механической системы.

Из результатов численного интегрирования следует, что нелинейные нормальные формы в кусочно-линейных системах могут быть представлены в виде модальных линий в конфигурационном пространстве. Эти нелинейные нормальные формы являются формами Каудерера-Розенберга.

Список литературы: 1. Аврамов К.В. Нелинейная динамика упругих систем. Т. 1. Модели, методы, явления / К.В. Аврамов, Ю.В. Мухлин. – М., Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Институт компьютерных исследований, 2010. – 704 с. 2. Whiston G.S. Impacting under harmonic excitation / G.S. Whiston // Journal of Sound and Vibration. – 1979. – № 67. – P. 179-186. 3. Sakai T. Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox / T. Sakai, Y. Doi, K. Yamamoto, T. Ogasawara, M. Narita // Society of Automotive Engineers. – 1981. – Paper № 810773. – P. 1–10. 4. Bishop R.S. Impact oscillators / R.S. Bishop // Philosophical Transactions of the Royal Society. – 1994. – № A347. – P. 347-351. 5. Ostrovsky L.A. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator / L.A. Ostrovsky, I.M. Starobinets // Chaos. – 1995. – № 5 (3). – P. 496-500. 6. Chen S.L. Normal modes for piecewise linear vibratory systems / S.L. Chen, S.W. Shaw // Nonlinear Dynamics. – 1996. – № 10. – P. 135-164. 7. Jiang D. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems / D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2004. – № 272. – P. 869-891. 8. Shaw S.W. Normal modes for non-linear vibratory systems / S.W. Shaw, C. Pierre // Journal of Sound and Vibration. – 1993. – № 164. – P. 85-124. 9. Pesheck E. A new Galerkin-based approach for accurate nonlinear normal modes through invariant manifolds /

E. Pesheck, C. Pierre, S.W. Shaw // Journal of Sound and Vibration. – 2002. – № 249. – P. 971-993. **10.** *Vakakis A.* Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems / *A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin.* – New-York: Wiley, 1996. – 552 p. **11.** *Mikhlin Yu.* Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments / *Yu. Mikhlin, K.V. Avramov* // Applied Mechanics Reviews. – 2010. – № 63. – P. 4-20. **12.** *Avramov K. V.* Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems / *K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin* // Applied Mechanics Reviews (*in press*). **13.** *Avramov K.V.* Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics / *K.V. Avramov, V.N. Karaban* // International Applied Mechanics. – 1997. – Vol. 33 (7). – P. 584-588. **14.** *Avramov K.V.* Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces / *K.V. Avramov* // International Applied Mechanics. – 2002. – Vol. 38 (9). – P. 1151-1156. **15.** *Avramov K.V.* Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics / *K.V. Avramov, A.S. Belomytsev, V.N. Karaban* // International Applied Mechanics. – 1994. – Vol. 30 (5). – P. 396-402.

Bibliography (transliterated): **1.** Avramov K.V. Nelinejnaya dinamika uprugih sistem. Vol. 1. Modeli, metody, yavleniya. K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin. Moscow, Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haticheskaya dinamika», Institut komp'yuternyh issledovanij, 2010. 704 Print. **2.** Whiston G.S. Impacting under harmonic excitation. G.S. Whiston. Journal of Sound and Vibration. 1979. № 67. 179-186 Print. **3.** Sakai T. Theoretical and experimental analysis of rattling noise of automotive gearbox. T. Sakai, Y. Doi, K. Yamamoto, T. Ogasawara, M. Narita. Society of Automotive Engineers. 1981. Paper № 810773. 1–10 Print. **4.** Bishop R.S. Impact oscillators. R.S. Bishop. Philosophical Transactions of the Royal Society. 1994. № A347. 347-351 Print. **5.** Ostrovsky L.A. Transitions and statistical characteristics of vibrations in a bimodal oscillator. L.A. Ostrovsky, I.M. Starobinets. Chaos. 1995. № 5 (3). 496-500 Print. **6.** Chen S.L. Normal modes for piecewise linear vibratory systems. S.L. Chen, S.W. Shaw. Nonlinear Dynamics. 1996. № 10. 135-164 Print. **7.** Jiang D. Large-amplitude non-linear normal modes of piecewise linear systems. D. Jiang, C. Pierre, S.W. Shaw. Journal of Sound and Vibration. 2004. № 272. 869-891 Print. **8.** Shaw S.W. Normal modes for non-linear vibratory systems. S.W. Shaw, C. Pierre. Journal of Sound and Vibration. 1993. № 164. 85-124 Print. **9.** Pesheck E. A new Galerkin-based approach for accurate nonlinear normal modes through invariant manifolds. E. Pesheck, C. Pierre, S.W. Shaw. Journal of Sound and Vibration. 2002. № 249. 971-993 Print. **10.** Vakakis A. Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems. A. Vakakis, L. Manevitch, Yu. Mikhlin, V. Pilipchuk, A. Zevin. New-York: Wiley, 1996. 552 Print. **11.** Mikhlin Yu. Nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. Review of theoretical developments. Yu. Mikhlin, K.V. Avramov. Applied Mechanics Reviews. 2010. № 63. 4-20 Print. **12.** Avramov K. V. Review of applications of nonlinear normal modes for vibrating mechanical systems. K.V. Avramov, Yu.V. Mikhlin. Applied Mechanics Reviews (*in press*). **13.** Avramov K.V. Resonance under random vibrations of discrete dynamic systems with piecewise-linear elastic characteristics. K.V. Avramov, V.N. Karaban. International Applied Mechanics. 1997. Vol. 33 (7). 584-588 Print. **14.** Avramov K.V. Bifurcation analysis of a vibropercussion system by the method of amplitude surfaces. K.V. Avramov. International Applied Mechanics. 2002. Vol. 38 (9). 1151-1156 Print. **15.** Avramov K.V. Regions of chaotic oscillations of discrete mechanical systems with piecewise-linear elastic characteristics. K.V. Avramov, A.S. Belomytsev, V.N. Karaban. International Applied Mechanics. 1994. Vol. 30 (5). 396-402 Print.

Поступила (received) 19.10.2014