

**Н. В. ТІТОВА, Г. М. СУЧКОВ, д-р. техн. наук НТУ "ХПИ"**

### **МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ВИХОРОСТРУМОВИХ ПЕРЕТВОРІЮВАЧІВ**

Отримані математичні моделі вихорострумів перетворювачів для контролю параметрів круглих зразків електромагнітних матеріалів. Показано, що електромагнітні процеси описуються нелінійними диференціальними рівняннями. Приведено залежності електрорушійної сили досліджуваного зразка від зміни його магнітної проникності та питомої електричної провідності. Доказано, що сталі часу перехідного процесу вихорострумів перетворювача є функціями власної частоти коливань та електричних параметрів досліджуваного зразка, що може бути покладено в основу розробок нових вихорострумів засобів контролю.

The mathematical models of vortex current transformers for the check of parameters of round samples of electromagnetic materials are gained. It is shown, that electromagnetic processes are featured by the nonlinear differential equations. Dependences of electromotive force of the explored sample on change of its magnetic conductivity and specific electrical conductance are given. It is proved, that time constants of transient the vortex current transformer are functions of natural frequency of oscillations and electrical parameters of the explored sample. It can be incorporated in a basis of development new vortex current resorts of the check.

Вихорострумові перетворювачі (ВСП) широко використовуються в дефектоскопії виробів з електромагнітних матеріалів. Всіх ВСП об'єднує те, що вони генерують електромагнітну енергію (ЕМЕ), яка переходить в досліджуване тіло, створюючи в ньому своє електромагнітне поле (ЕМП). Розглянемо математичні моделі ВСП, котрий складається з циліндричної котушки, в середині якої знаходиться електропровідний круглий стрижень. При подачі електричного струму (постійного чи змінного) у котушці створюється ЕМП напруженістю  $H_{0k}$ . Як вказувалося в [1], зміна напруженості ЕМП котушки зі стрижнем описується наступним рівнянням

$$\tau_k \frac{\partial^2 H_{0k}}{\partial t^2} + \frac{\partial H_{0k}}{\partial t} = -k^2 \nabla^2 H - \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (1)$$

де  $\tau_k$  - стала процесу переносу ЕМЕ;  $H_{0k}$  - напруженість ЕМП котушки;  $k$  - стала;  $H$  - напруженість ЕМП в стрижні;  $t, \theta$  - час зміни ЕМП в котушці та стрижні відповідно.

Електрорушійна сила (ЕРС), яка створюється котушкою, дорівнює [2, 3]

$$E_k = -w_k S_k \mu_{ak} \frac{\partial H_{0k}}{\partial t}, \quad (2)$$

де  $w_k$  - кількість витків котушки;  $S_k$  - поперечний її перетин;  $\mu_{ak}$  - абсолютна магнітна проникність котушки.

ЕРС, яка створюється стрижнем

$$e_c = S_C \mu_{ac} \frac{\partial H}{\partial \theta} \quad (3)$$

де  $S_C$  - поперечний перетин круглого стрижня;  $\mu_{ac}$  - абсолютна магнітна проникність стрижня.

Визначивши з (2) і (3) похідні від напруженостей магнітних потоків і підставивши їх в рівняння (1), одержуємо

$$\tau_K \frac{\partial E_K}{\partial t} + E_K = \frac{w_n S_K \mu_{aK}}{S_C \mu_{ac}} (k^2 \nabla e - e). \quad (4)$$

Нелінійне рівняння (4) являє собою математичну модель розглядуваного вихорострумowego перетворювача.

Якщо часткова похідна  $\partial E_K / \partial t = 0$ , то перехідний процес у стрижні описуватиметься таким чином

$$k^2 \frac{\partial e_c}{\partial r_C} + e_c = \left( \frac{E_K}{w_n} \right) \left( \frac{S_C}{S_K} \right) \left( \frac{\mu_{ac}}{\mu_{aK}} \right), \quad (5)$$

де  $r_C$  - радіус стрижня.

Відношення  $E_K / w_n = E_0^1$  є ЕРС одного витка живлячої котушки. Якщо  $S_C = S_K$ , то рівняння (5) набуває вигляду

$$k \frac{\partial e_c}{\partial r_C} + e_c = E_0^1 \frac{\mu_{ac}}{\mu_{aK}}. \quad (6)$$

Використовуючи метод нульового градієнта, для границі розділу „котушка-стрижень” одержуємо наступну систему диференціальних рівнянь:

$$\tau_K \frac{\partial E_K}{\partial t} + E_K = 0; \quad (7)$$

$$k \frac{\partial e_c}{\partial r_C} + e_c = \frac{E_K \mu_{ac}}{w_n \mu_{aK}}. \quad (8)$$

Рішення рівняння (7) при граничних умовах  $E_K(0) = 0$  і  $E_K(\infty) = U$  має вигляд

$$E_K(t) = U [1 - \exp(-t / \tau_K)]. \quad (9)$$

Граничними умовами для рівняння (8) будуть:  $e(0, r_C) = 0$ ,  $e(\infty, r_C) = H_{0k}$ ,  $\partial e(\theta, \infty) / \partial r_C = 0$ . З врахуванням цього рішенням рівняння (8) буде

$$e_c(r_C) = E_K(t) \frac{\mu_{ac}}{w_n \mu_{aK}} [1 - \exp(-r_C k)]. \quad (10)$$

Підставимо рівняння (4) в (5). У результаті маємо

$$e_c(r_C) = E_{0K}(t) \frac{\mu_{ac}}{w_n \mu_{aK}} [1 - \exp(-t / \tau_K)] [1 - \exp(-r_C k)]. \quad (11)$$

Рівняння (11) описує зміну ЕРС, яка формується у ВСП при дії на нього електропровідного стрижня без врахування його власного ЕМП.

Приймаючи до уваги те, що в стрижні створюються вихрові струми і має місце власне ЕМП, рівняння (1) приймає наступний вигляд

$$T \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{\partial H}{\partial \theta} = k \nabla^2 H + \frac{\partial H}{\partial \theta}, \quad (12)$$

де  $T = L_C / R_C$  - стала часу стрижня.

Використовуючи метод нульового градієнта, рівняння (1) розділяється на систему наступних рівнянь:

$$\tau_c \frac{\partial^2 H}{\partial \theta^2} + \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0; \quad (13)$$

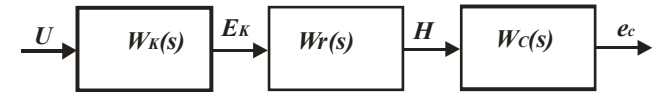
$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = k \nabla^2 H. \quad (14)$$

Систему рівнянь (13) і (14) можна представити таким чином:

$$\tau_c \frac{\partial e_c}{\partial \theta} + e_c = 0; \quad (15)$$

$$k \frac{\partial e}{\partial r_C} + e = \frac{E_K \mu_{ac}}{w_n \mu_{aK}}. \quad (16)$$

Аналізуючи рівняння (7), (8), (15) і (16) бачимо, що рівності (8) і (16) є однаковими, які зв'язують напруженості магнітного поля котушки і стрижня. Виходячи з цього, процес перетворення у ВСП можна показати у вигляді структурної схеми, приведеної на рисунку.



Передавальна функція котушки  $W_K(s) = 1 / (\tau_K s + 1)$ , стрижня  $W_C(s) = 1 / (\tau_c s + 1)$ , а проміжного перетворювача, який є фактично коефіцієнтом передачі ЕМП  $W_r(s) = \frac{\mu_{ac}^H}{w_n \mu_{aK}^H} [1 - \exp(-r_C k) = K_N]$ , де  $\mu_{ac}^H, \mu_{aK}^H$  - нормовані значення абсолютної магнітної проникності стрижня та котушки відповідно.

$$\text{Еквівалентна передавальна функція перетворювача } W(s) = \frac{K_N}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1},$$

де  $T_2^2 = \tau_K \tau_c$ ;  $T_1 = \tau_K + \tau_c$  - сталі часу.

Так як

$$T_2^2 = \frac{L_K L_C}{R_K R_C}, \text{ і } T_1 = \frac{L_K}{R_K} + \frac{L_C}{R_C} = \frac{L_K}{R_K} \left( 1 + \frac{L_C R_K}{L_K R_C} \right) = \frac{L_K}{R_K} (1 + \delta_L \delta_R),$$

де  $\delta_L = L_C / L_K$  - відносне значення індуктивностей стрижня і котушки;  
 $\delta_R = R_K / R_C$  - відносний активний опір котушки і стрижня.

Тоді диференціальне рівняння, яке описує перехідний процес у ВСП, матиме таку форму

$$\frac{L_K L_C}{R_K R_C} \frac{d^2 e_C}{dt^2} + \frac{L_K}{R_K} (1 + \delta_L \delta_R) \frac{de_C}{dt} + e_C = UK_N, \quad (17)$$

де  $U$  - напруга живлення котушки.

Індуктивність циліндричної котушки  $L_K = \mu_{aK} (w_n^2 S_K / l_K) = k_K \mu_{aK}$ , а активний опір  $R_K = \rho_K l_n / S_n = \frac{1}{\sigma_K} \frac{l_n}{S_n} = \frac{k_{RK}}{\sigma_K}$ , де  $l_K$  - довжина котушки;  $\rho_K$  - питомий опір електропровідного матеріалу;  $l_n$  - довжина провідника;  $S_n$  - поперечний перетин провідника;  $\sigma_K$  - питома провідність котушки.

Аналогічно можна записати для стрижня, враховуючи, що він має один виток:  $L_C = \mu_{aC} (S_C / l_C) = k_C \mu_{aC}$ ;  $R_C = \rho_C l_C / S_C = k_{RC} / \sigma_C$ , де  $l_C$  - довжина стрижня, яка знаходиться в котушці;  $S_C$  - поперечний перетин стрижня;  $\rho_C$  - питомий опір стрижня на довжині  $l_C$ ;  $\sigma_C$  - питома провідність стрижня. З врахуванням сказаного рівняння (17) буде наступним

$$K_{LR} (\mu_{aK} \mu_{aC}) (\sigma_K \sigma_C) \frac{d^2 e_C}{dt^2} + k_K \mu_{aK} \sigma_K (1 + \delta_L \delta_R) \frac{de_C}{dt} + e_C = UK_N. \quad (18)$$

Якщо прийняти, що для заданої живлячої котушки абсолютна магнітна проникність  $\mu_{aK}$  і питома провідність  $\sigma_K$  не змінюються і залишаються сталими, то рівняння (18) буде наступним

$$K_{LR}^0 (\mu_{aC} \sigma_C) \frac{d^2 e_C}{dt^2} + k_K^0 (1 + \delta_L \delta_R) \frac{de_C}{dt} + e_C = U \frac{\mu_{aC}^H}{\mu_{aK}^H} [1 - \exp(-r_C \sqrt{\omega \mu_{aC} \sigma_C})], \quad (19)$$

де  $K_{LR}^0 = K_{LR} \mu_K \sigma_K$ ;  $k_K^0 = k_K \mu_K \sigma_K$ .

Рівняння (19) показує, як впливають електромагнітні параметри стрижня на перехідний процес перетворювача, а також шляхи побудови засобів контролю електромагнітних параметрів циліндричних виробів. З нього видно, що засоби контролю електромагнітних параметрів можуть бути побудовані на основі методів як статичної зміни характеристик ВСП, так і на основі динамічних його властивостей.

Статична характеристика ВСП являє собою залежність ЕРС  $e_C$  від зміни електромагнітних параметрів  $\mu_{aC}$  і  $\sigma_C$  електропровідного круглого матеріалу. З рівняння (19) маємо

$$e_C = U \frac{\mu_{aC}^H}{\mu_{aK}^H} [1 - \exp(-r_C \sqrt{\omega \mu_{aC} \sigma_C})]. \quad (20)$$

У вихорострумовій дефектоскопії широко використовується узагальнюючий параметр  $\beta = r_C \sqrt{\omega \mu_a \sigma}$ . Для досліджуваного стрижня узагальнюючий цей параметр матиме вигляд:  $\beta_C = r_C \sqrt{\omega \mu_{aC} \sigma_C}$ . Тоді рівняння статичної характеристики буде таким:

$$e_C = U \frac{\mu_{aC}^H}{\mu_{aK}^H} [1 - \exp(-\beta_C)]. \quad (21)$$

Рівняння (21) повністю погоджується з експериментальними висновками акад. Ключова В.В. [3] про те, що при контролі дефектів вихорострумовим перетворювачем залежність  $e_C$  від  $\beta$  є експоненційною функцією. Рівняння (21) може бути покладене в основу розробки статичного диференційного методу контролю електромагнітних параметрів [2].

Ліва частина диференціального рівняння (21) характеризує динамічні властивості вихорострумового методу контролю. Позначимо в цьому рівнянні

$$T_1 = k_K^0 (1 + \delta_L \delta_R); \quad (22)$$

$$T_2 = \sqrt{K_{LR}^0} \sqrt{\mu_{aC} \sigma_C} = \frac{\sqrt{K_{LR}^0}}{r_C \sqrt{\omega}} (r_C \sqrt{\omega \mu_{aC} \sigma_C}) = \frac{1}{r_C} \sqrt{\frac{K_{LR}^0}{\omega}} \beta_C. \quad (23)$$

З рівняння (23) видно, що стала часу перехідного процесу  $T_2$  прямо пропорційна узагальнюючому параметру  $\beta$  і зворотно пропорційна радіусу  $r_C$  стрижня. Виконаємо аналіз сталої часу  $T_1$ . У результаті маємо

$$T_1 = k_K^0 \left( 1 + \frac{L_C R_K}{L_K R_C} \right) = k_K^0 \left( 1 + \frac{1}{w_n} \frac{\mu_{aC} \sigma_C}{\mu_{aK} \sigma_K} \right) = k_K^0 (1 + k_{\beta K} \beta_C^2), \quad (24)$$

де  $k_{\beta K} = 1 / w_n (\omega \mu_{aK} \sigma_K)$ .

З рівняння (24) видно, що стала часу  $T_1$  теж залежить від узагальнюючого параметра  $\beta$ . Таким чином, рівняння (23) і (24) можуть бути покладені в основу розробки динамічного диференційного методу контролю електромагнітних параметрів електропровідних виробів.

З рівняння (24) випливає третій «відносний» метод контролю електромагнітних параметрів електропровідних матеріалів, який заснований на відношенні індуктивностей та активних опорів живлячої котушки та

стрижня. Згідно з (24) маємо наступну рівність  $\left( \frac{L_C}{L_K} \right) \left( \frac{R_K}{R_C} \right) = \delta_L \delta_R = k_{\beta K} \beta_C^2$ ,

звідки

$$\beta_C = K_{\mu K} \sqrt{\delta_L \delta_R} = r_C \sqrt{\omega \mu_{ac} \sigma_C}, \quad (25)$$

де  $K_{\mu K} = \sqrt{1/k_{\mu K}}$ .

З рівняння (25) випливає така важлива залежність

$$\delta_L \delta_R = \frac{r_C^2}{K_{\mu K}^2} (\omega \mu_{ac} \sigma_C). \quad (26)$$

З рівняння (26) видно, що добуток відносних значень індуктивностей та активних опорів котушки та стрижня пропорційні добуткові абсолютної магнітної проникності  $\mu_{ac}$  і питомій електричній провідності  $\sigma_C$  стрижня. У науковій літературі з електромагнітних методів дефектоскопії вказується на практично лінійній залежності між відносними значеннями індуктивностей та активних опорів та електромагнітними параметрами досліджуваних зразків. Таким чином, рівність (26) підтверджується результатами експериментальних досліджень.

**Висновки.** На основі теорії реологічних переходів отримані математичні моделі вихорострумів перетворювачів, які можуть використовуватися для контролю електромагнітних параметрів круглих зразків електромагнітних матеріалів. Показані залежності ЕРС джерела електромагнітної енергії та досліджуваного зразка від зміни магнітної проникності та питомої електричної провідності досліджуваного матеріалу.

Вперше доказано, що сталі часу перехідного процесу вимірювальної системи є функціями власної частоти коливань та узагальнюючого параметра  $\beta$  досліджуваного зразка, що може бути покладено в основу нових розробок вихорострумів дефектоскопів. Теоретично обґрунтовано статичного диференційного, динамічного диференційного та відносного. Показана можливість використання сталих часу перехідних процесів перетворювача для визначення абсолютної магнітної проникності та питомої електричної провідності електропровідних матеріалів.

**Література:** 1.Тітова Н.В. Основи теорії вихорострумів методів контролю електромагнітних параметрів. // XI Всеукраїнської науково-практичної конференції студентів, аспірантів та молодих вчених «Технологія - 2008»/ ТІ СНУ ім. В.Даля \_ Северодонецьк, 2008. – С. 153. 2.Тітова Н.В. Контроль електромагнітних параметрів електропровідних виробів методом постійного струму. // Матеріали четвертої Міжнародної науково-практичної конференції „Наукові дослідження – теорія та експеримент 2008р”. Т.8, 2008. – С. 74-76.3.Герасимов В.Г., Клюев В.В., Шатерников В.Е. Методы и приборы электромагнитного контроля промышленных изделий. – М.: Энергоатомиздат, 1983. – 262 с. 4.Дорофеев А.Л., Ершов Р.Е. Физические основы электромагнитной структуроскопии. – Новосибирск: Наука, 1985. – 284 с.