

**СТЕНЦЕЛЬ Й. І., д-р техн. наук СНУ ім. В.Даля,
ЄВСЮКОВ В.В., ПЕТРОСЯН Л.І., ПОМІЩЕНКО А.Ф.**

МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ХЛОПАЮЧИХ МЕМБРАН ПЕРШОГО РОДУ

Виконані дослідження хлопаючих мембран при дії на них ступінчастих збуджуючих імпульсів і показано, що їх рух складається з двох складових. Показано, що першою складовою є рух мембрани від початкового значення до деякого іншого сталого її положення, а другою - є загасаючий коливальний процес, який залежить від частоти власних коливань і фізичних параметрів оточуючого середовища. Отримана математична модель руху хлопаючої мембрани, яка дозволяє виконувати аналіз їх руху.

Executed research of slammings membranes at an action on them of step excitant impulses and it is rotined that their motion is folded s two constituents. It is rotined that the first constituent is motion of membrane from the begun value to some of other its permanent position, and second constituent is go out shake process which depends on frequency of eigentones and physical parameters of environment. The mathematical model of motion of slamming membrane which allows to execute the analysis of their motion is got.

Вимірювальні перетворювачі, в основу роботи яких покладено переміщення гнучких мембран знаходять достатньо широке розповсюдження в різних пристроях контролю та автоматики. Вони мають різноманітне призначення не тільки як чутливий елемент пристрою контролю, але й як розділюючий елемент, наприклад, для розділення чуливого п'єзокерамічного елемента від газового середовища в ультразвукових рівнемірах. Особливе значення мають так звані хлопаючі мембрани, які використовуються в пристроях неруйнівного контролю тиску та механічної міцності апаратів під тиском.

Далеко не повністю вивчені всі фактори, котрі впливають на процеси перетворення в перетворювачах з хлопаючими мембранами. Тому вивчення факторів, які викликають функціональні перетворення в хлопаючих мембранах є однією з основних задач при їх розробці та експлуатації.

Принцип роботи пристроїв з хлопаючими мембранами полягає в тому, що під дією деякої сили (механічної чи іншої) мембрана переміщається на відстань y_0 і знаходиться в деякому сталому положенні (наприклад, у верхньому), або під дією накопиченої енергії повертається в попереднє стале положення. При переході з одного крайнього положення в інше хлопаюча мембрана здійснює загасаючі коливання з тою чи іншою частотою. Ці коливання передаються середовищу, в якому розташовується перетворювач, у якому вони загасають. Як правило, хлопаючі мембрани з гумових матеріалів мають низьку частоту коливань, а з металевих, особливо сталевих, – високу частоту коливань. При роботі пристроїв контролю з односторонніми

хлопаючими мембранами (мембрана переміщається з одного сталого положення в інше стале положення) мають місце такі реологічні переходи: вхідний збуджуючий імпульс – первинне переміщення мембрани – пакет первинних коливань – передаюче середовище для цього пакета. При роботі пристроїв контролю з двосторонніми хлопаючими мембранами (мембрана переміщається з одного сталого положення в інше, а потім сама повертається в попереднє стале положення) мають місце такі реологічні переходи: вхідний збуджуючий імпульс – первинне переміщення мембрани – пакет первинних коливань – передаюче середовище для цього пакета – вторинне переміщення мембрани – пакет вторинних коливань тощо. Кожне реологічне перетворення має свою фізичну суть і описується тим чи іншим диференціальним рівнянням руху. Розглянемо роботу пристрою контролю з хлопаючою мембраною першого роду, коли після її збудження вона переходить в інше статичне положення.

Хлопаючі мембрани відносяться до інерційних елементів. Вони переміщуються під дією сили прикладеного імпульсу і можуть описуватися диференціальним рівнянням першого або другого порядку. Якщо такою силою є імпульс механічної, електричної чи іншої енергії, то для мембрани першого роду рівняння має наступний вигляд

$$T \frac{dy}{d\theta} + y = k_1 F_0, \quad (1)$$

де $T = m/\beta$ - стала часу мембрани; m - її маса; β - коефіцієнт тертя мембрани для середовища, в якому вона переміщається; y - поточне переміщення мембрани; k_1 - коефіцієнт її передачі; F_0 - зусилля, яке прикладене до мембрани; θ - час переміщення.

Форми руху хлопаючої мембрани першого роду показані на рис. 1.

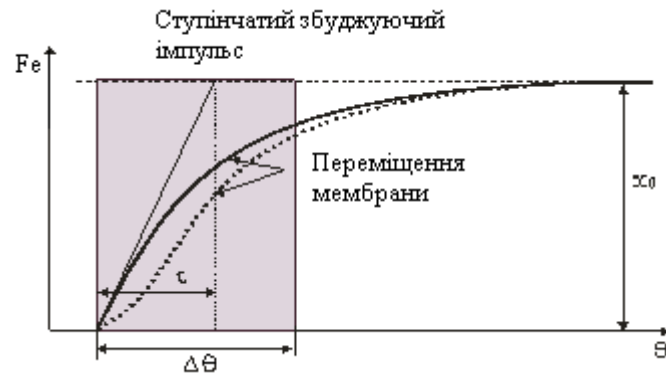


Рисунок 1 - Реакція мембрани на збуджуючий імпульс

З рівняння (1) випливає, що при граничних умовах $t=0, y=0$ і $t=\infty, y=y_0$ перехідний процес описуватиметься наступним рівнянням

$$y(\theta) = k_1 F_0 [1 - \exp(-\beta\theta/m)]. \quad (2)$$

Якщо переміщення мембрани залежить від її жорсткості, то вона описується таким модифікованим диференціальним рівнянням

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{d\theta^2} + T_1 \frac{dy}{d\theta} + y = k_1 F_0, \quad (3)$$

де $T_1 = k_M \beta / D$, $T_2^2 = m / D$ - сталі часу; D - жорсткість мембрани; k_M - коефіцієнт демпферування коливань мембрани середовищем; y - поточне відхилення пластини.

Так як для хлопаючих мембран перехідний процес є завжди аперіодичним, то відношення сталих часу T_1/T_2 завжди буде більше двох.

Переміщення мембрани другого роду описуватиметься наступним рівнянням

$$y(t) = k_1 F_0 [1 - \alpha_1 \exp(-p_1 t) + \alpha_2 \exp(-p_2 t)], \quad (4)$$

де $\alpha_1 = p_2 / (p_2 - p_1)$, $\alpha_2 = p_1 / (p_2 - p_1)$; p_1, p_2 - корені характеристичного рівняння (3).

Після досягнення максимального значення переміщення за рахунок накопиченої кінетичної енергії мембрана починає коливальний процес з деякою частотою, яка може бути звуковою або навіть ультразвуковою. Таким чином на границі усталеного положення має місце реологічний перехід руху мембрани, який характеризується реологічним перетворенням механічної енергії в коливальну. За рахунок витрати цієї енергії в середовище, яке оточує мембрану, проходить її стік. Такий процес характеризується перенесенням імпульсу механічної енергії мембрани в коливальну енергію. Перехідний процес хлопаючої мембрани при дії на неї імпульсу збуджуючої енергії показаний на рис. 2.



Рисунок 2 - Перехідний процес мембрани після дії збуджуючого сигналу

Неоднорідність розподілення потенціалу переносу $\varphi(\vec{r}, \theta)$ коливальної енергії приводить до відхилення мембрани від стану рівноваги і є причиною виникнення потоків переносу. У цій області має місце рух механічної енергії, який характеризується полем швидкостей $\vec{v}(\vec{r}, \theta)$, де \vec{r} - вектор направленості руху переносу; θ - час переносу. Стоки потенціалу переносу γ характеризуються вектором інтенсивності коливального поля $B(\vec{r}, \theta)$. Перенесення потенціалу $\bar{\varphi}$ складається з переносу за рахунок руху мембрани та потоку переносу коливальної енергії, який позначимо через \bar{q} . Таким чином, вираз для сумарного потоку переносу \bar{Q} можна подати у вигляді

$$\bar{Q} = \bar{\varphi} \cdot \vec{v} + \bar{q}. \quad (5)$$

В інтегральній формі умова зберігання потенціалу для даного об'єму V має наступну форму

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} dV = \oint_S Q d\vec{f} + \int_V \gamma dV, \quad (6)$$

де S - поверхня об'єму; $d\vec{f} = n d\zeta$ - елемент поверхні; n - одиничний вектор елемента $d\zeta$.

Для довільного об'єму рівняння (6) буде наступним

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \text{div} Q - \gamma = 0. \quad (7)$$

де γ - стік потенціалу переносу енергії коливального поля.

З врахуванням співвідношення (5) рівняння (7) приймає вигляд

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \text{div}(\varphi, \vec{v}) = -\text{div} \bar{q} + \gamma. \quad (8)$$

Якщо в розглядуваному об'ємі має місце коливальне перетворення, яке є наслідком взаємодії двох об'єктів (мембрани і середовища), то, позначивши $\bar{B}(\vec{r}, \theta)$ - інтенсивність енергії коливального поля, $\vec{v}_i(\vec{r}, \theta)$ - швидкість його зміни і $\bar{\varphi}(\vec{r}, t)$ - інтенсивність стоку енергії коливального поля в одиницю об'єму за одиницю часу t , рівняння переносу приймає наступну форму

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} + \text{div}(B, \vec{v}) = \text{div}(\sigma \nabla B) + \gamma, \quad (9)$$

де σ - параметр, який характеризує коливальні властивості мембрани.

Нехай основний рух мембрани в коливальному полі незначний у порівнянні зі зміною коливального поля, тобто швидкість $\vec{v}(\vec{r}, \theta) \rightarrow 0$. Тоді рівняння переносу імпульсу інтенсивності коливального поля в середовище приймає наступну форму

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = \text{div}(\sigma \nabla B) + \gamma. \quad (10)$$

Якщо параметр σ мало залежить від процесу переносу, то рівняння (10) спрощується до такої форми:

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = k^2 \nabla^2 B + \gamma. \quad (11)$$

Нехай основний рух мембрани є аперіодичним першого порядку та описується рівнянням (1). Тоді вільна складова перехідного процесу має вигляд

$$T \frac{dy}{d\theta} + y = 0, \quad (12)$$

Нехай інтенсивність енергії E мембрани $E = k_y y$, де k_y - стала. Так як коливання мембрани передаються оточуючому середовищу, то повинна виконуватися умова

$$E_0 = \Psi \frac{\partial E}{\partial \theta}, \quad (13)$$

де E_0 - максимальна інтенсивність коливальної енергії мембрани; Ψ - стала процесу переносу E - поточне значення інтенсивності коливальної енергії.

Продиференціюємо ліву і праву частини рівняння (13) по змінній часу t . У результаті маємо

$$\frac{\partial E_0}{\partial t} = \Psi \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \theta}. \quad (14)$$

З врахуванням цього рівняння (11) буде наступним

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} + \Psi \frac{\partial^2 E}{\partial t \partial \theta} = k_M \nabla^2 E. \quad (15)$$

Якщо стала $\Psi \rightarrow \infty$, а $\theta \approx t$, то $\partial^2 E / \partial t^2 \rightarrow 0$. У цьому випадку перенесення коливальної енергії в середовище буде відсутнім. При $\Psi = \tau$ і $\theta = t$ рівняння (15) приймає наступну форму

$$T \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{\partial E_0}{\partial t} = k_M \nabla^2 B. \quad (16)$$

Ліва частина рівняння (16) характеризує зміну інтенсивності коливальної енергії мембрани, а права - зміну цієї енергії в середовищі, в якому розповсюджуються коливання. Так як у середовищі мають місце втрати енергії, то, приймаючи до уваги, що $\gamma = \partial B / \partial \theta$, рівняння (16) набуває такого вигляду

$$T \frac{\partial^2 E_0}{\partial t^2} + \frac{\partial E_0}{\partial t} = -k_M \nabla^2 B - \frac{\partial B}{\partial \theta}. \quad (17)$$

Таким чином, процес, який протікає в системі, котра складається з хлопаючої мембрани та деякого середовища (газового чи рідинного), описується нелінійним диференціальним рівнянням (17). На границі переходу механічної (чи іншої) енергії в коливальну проходить зміна інтенсивності енергії коливального поля, яка може бути описана інтегральною імпульсною δ -функцією Дірака.

Якщо розглядати енергію мембрани, яка змінюється в просторі та часі, то рівняння (17) можна записати в такій формі

$$\frac{\partial E}{\partial \theta} + \mathbf{V} \nabla^2 E - \nu \nabla E = K \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\sum_{j=0}^n \tau_j^j \frac{\partial^j z}{\partial \theta^j} + z \right], \quad (18)$$

де E - енергія переносу; \mathbf{V} - інтенсивність переносу енергії; ν - швидкість переносу; τ_j^j - j -і сталі часу переносу імпульсу енергії; z - напрямок переносу.

Використовуючи метод нульового градієнта [2] для аналітичного рішення рівняння (18), отримуємо рівняння для руху мембрани в такій формі:

$$z(\theta) = Z_0 \exp(-\alpha L) \left\{ \exp(-\alpha_2 |\Omega - \theta|) (1 - y(t)) \right\} \cos(\omega \theta) \cdot \exp(\alpha_1 |\Omega - t|),$$

де Z_0 - максимальна амплітуда коливань; $\alpha = Af^2$ - коефіцієнт зменшення амплітуди коливань, 1/м; L - відстань розповсюдження коливань, м; α_1 - коефіцієнт загасання енергії в залежності від фізичних властивостей середовища; α_2 - коефіцієнт загасання коливань в залежності від фізичних властивостей мембрани; Ω - час загасання енергії коливань; $y(t)$ - переміщення мембрани під дією збуджуючого імпульсу.

Висновки. Теоретичні та експериментальні дослідження показують, що при дії на хлопаючі мембрани ступінчастих збуджуючих імпульсів їх рух складається з двох складових. Першою складовою є рух мембрани від початкового значення до деякого іншого сталого положення, яке може бути обмеженим на деякій відстані $y(t)$, або не обмеженим, коли мембрана переміщається на максимально можливу відстань, а другою складовою руху є загасаючий коливальний процес мембрани, який залежить від частоти її власних коливань і фізичних параметрів оточуючого середовища.

На основі теорії реологічних переходів і методу нульового градієнта отримана математична модель руху хлопаючої мембрани, яка дозволяє виконувати аналіз руху таких мембран з точки зору часу періодичності її роботи, надійності вимірювальних пристроїв, а також виконувати їх діагностування за частотою та затуханням вимушених коливань.

Література: 1. Азизов А.М., Гордов А.Н. Точность измерительных преобразователей. – Л.: Энергия, 1975. – 256 с. 2. Стенцель Й.І., Томсон А.В. Електродеформаційні процеси в п'єзоелектричних перетворювачах. Системи контролю і управління технологічними процесами. Сб. науч. статей. – Луганск; Світлиця, 2006. – С.144-150.