УДК 62-50

Ж.А. КИРЕЕВА, к-т. техн. наук; доц. НТУ «ХПИ»
В.А. КИРЕЕВ, к-т. техн. наук; доц. НАКУ «ХАИ»
М.А. КРАВЧЕНКО, студент НАКУ «ХАИ»

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ И ПОСТРОЕНИЕ ПЕРЕХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

Розглянуто спосіб аналізу стійкості лінійних систем по рівняннях змінних стану без побудови характеристичного полінома. Приводиться алгоритм програми побудови перехідних процесів, реалізований на конкретному прикладі.

The method of the analysis of linear systems on managements of variables of a condition without construction of a characteristic polynom is considered. The algorithm of the program of construction of the transients, realized on a concrete example is resulted.

Введение. Устойчивость систем управления важнейшее условие их работоспособности. Она обеспечивает принципиальную возможность прихода системы в некоторое установившееся состояния при любом внешнем возмущении. Необходимо, чтобы переходные процессы в системе быстро затухали, а возможные колебания вокруг установившегося состояния были невелики.

Известны ряд критериев для определения устойчивости работы системы управления. Особый интерес представляют методы, ориентированные на использование ЭВМ.

Основная часть. Динамика систем управления описывается дифференциальными уравнениями [1]

$$\dot{x} = F(t)\cdot x + G(t)\cdot w(t) + C(t)\cdot u(t), \qquad (1)$$

где x(t) - n - вектор, называемый состоянием системы;
w(t) - p – вектор возмущений;
u(t) - r – вектор управлений;
F(t) - динамическая матрица системы размером $n\times n$;
G(t) - переходная матрица возмущения размером $n\times p$;
C(t) - переходная матрица управления размером $n\times r$;

Эти векторы и матрицы являются непрерывными функциями времени.

Рассмотрим способ анализа устойчивости линейных систем по уравнениям переменных состояния (1) без построения характеристического полинома. Основы метода функционально-преобразованных матриц были предложены Зубовым В.И.[2]. В результате был сформулирован критерий: для того чтобы система (1) была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для матрицы

$$B = E - 2(E - F)^{-1} \qquad (2)$$

выполнялось условие

$$B^k \to 0 \text{ при } k \to \infty ,$$

где 0 – нулевая матрица, Е – единичная матрица.

Необходимо только, чтобы $\left|E - F\right| \neq 0$.

Можно избежать обращения матрицы в выражении (2), применяя матрицу

$$\overline{B} = E + F/R \qquad (3)$$

и считая, что все собственные числа матрицы F находятся внутри круга радиуса R в левой полуплоскости комплексного переменного p. Тогда должно выполняться условие

$$B^k = 0 \text{ при } k \to \infty . \qquad (4)$$

Поскольку решение однородной системы $\dot{x} = F \cdot x(t)$ имеет вид

$$x(t) = e^{F \cdot t} \cdot x_0 ,$$

то для соотношения (3) рассмотрим степенной ряд

$$e^{F/R} = E + \frac{F}{R} + \frac{F^2}{2!R^2} + \frac{F^3}{3!R^3} + \ldots + \frac{F^m}{m!R^m} = D_m \;\; m = 0,1,2,\ldots \qquad (5)$$

Алгоритм построения процессов с равномерным шагом h имеет вид

$$x_{k+1} = D_m \cdot x_k ,\;\; k = 0,1,2,\ldots \qquad (6)$$

Функционально-преобразованные матрицы можно применять не только для анализа устойчивости, но и для построения переходных процессов при определённых начальных условиях. Для нестационарных систем функционально-преобразованная матрица перестраивается на каждом шаге, поэтому алгоритм построения переходных процессов в однородной нестационарной системе принимает вид

$$x_{k+1} = D_m(kh) \cdot x_k . \qquad (7)$$

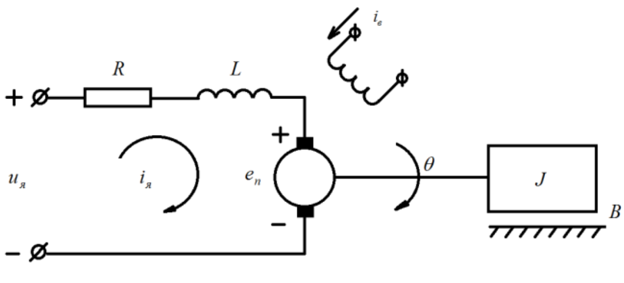


Рис. 1.

Рассмотрим пример, иллюстрирующий применение этого алгоритма. На рис.1 приведена схема электродвигателя постоянного тока с управлением в цепи якоря. Задача заключается в регулировании углового положения θ и угловой скорости $\dot{\theta}$ выходного вала с помощью изменения напряжения якоря $U_я$. В линеаризованной модели двигателя: J– инерционная нагрузка; В – коэффициент вязкого трения; R – сопротивление цепи якоря; L – индуктивность цепи якоря; $i_я$ – ток якоря; $e_п$ - противо - Э.Д.С. якоря; $i_в = const$ – ток возбуждения.

Допустим, что выходной момент, создаваемый двигателем, пропорционален току якоря с коэффициентом пропорциональности $K_м$; а $e_п$ – пропорциональна угловой скорости $e_п = K_м\dot{\theta}$. Тогда согласно второму закону Ньютона имеем:

$$J\ddot{\theta} = -B\dot{\theta} + K_м\, i_я\,. \tag{8}$$

Для цепи якоря запишем уравнения Кирхгофа

$$L\frac{di_я}{dt} + Ri_я + e_п = u_я\,. \tag{9}$$

Число переменных состояния определяется порядком системы дифференциальных уравнений. Выберем три величины: $X_1 = \theta, X_2 = \dot{\theta}, X_3 = i_я$. Решая уравнения (8) и (9) получаем:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{B}{J}\dot{\theta} + \frac{K_м}{J}i_я; \\ \frac{di_я}{dt} &= -\frac{R}{L}i_я - \frac{K_п}{L}\dot{\theta} + \frac{1}{L}u_я. \end{aligned} \tag{10}$$

Обозначим $f_1 = -\frac{B}{J};\; f_2 = \frac{K_м}{J};\; f_3 = -\frac{K_п}{J};\; f_4 = -\frac{R}{L}; c = \frac{1}{L};$

$u_я$ - входная управляющая переменная, поэтому $u_я = u(t)$.

Теперь уравнения (8) и (9) можно представить в виде.

$$\begin{aligned} \dot{X}_1 &= X_2 \\ \dot{X}_2 &= f_1X_2 + f_2X_3 \\ \dot{X}_3 &= f_3X_2 + f_4X_3 + cu(t) \end{aligned} \tag{11}$$

или в матрично-векторной форме

$$\dot{X} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & f_1 & f_2 \\ 0 & f_3 & f_4 \end{Vmatrix} X + \begin{Vmatrix} 0 \\ 0 \\ c \end{Vmatrix} u(t) \tag{12}$$

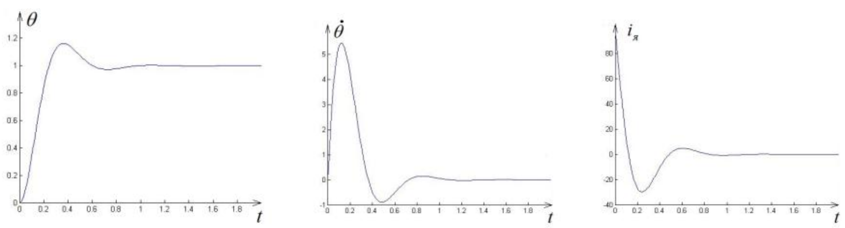
Матрица F и вектор начальных условий $\left|X_0\right|$ имеют вид:

$$F=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & f_1 & f_2\\ 0 & f_3 & f_4\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -0.01 & 1\\ 0 & -100 & -10\end{matrix}\right\|,\quad X_0=\left\|\begin{matrix}0\\ 0\\ c\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}0\\ 0\\ 100\end{matrix}\right\|.$$

Запишем уравнение (5) в виде:

$$D_4=E+Fh+\frac{(Fh)^2}{2!}+\frac{(Fh)^3}{3!}+\frac{(Fh)^4}{4!}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+$$
$$+0.01\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & -0.01 & 1\\ 0 & -100 & -10\end{bmatrix}+\frac{0.0001}{2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0.001\\ 0 & -0.1 & -0.01\\ 0 & 1.001 & 0\end{bmatrix}+\ldots \qquad (14)$$

Результаты вычислений для различных моментов времени $X_1(t), X_2(t), X_3(t)$ представлены на рис. 2 (а,б,в).



а *б* *в*

Рис. 2.

Вывод

Рассмотренный способ анализа устойчивости линейных систем по уравнениям переменных состояния с использованием ЭВМ эффективен и его применение целесообразно.

Список литературы: 1. *Барышев И.В., Киреев В.А*. Системы управления. – Учеб. пособие. – Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т «Харьк. авиац. ин-т», 2001. – 141 с. **2.** Теория автоматического управления. Ч.1.Под. ред. *А.А. Воронова.* – М.: Высш. Шк., 1986. – 387 с.