

**В. Я. ГАЛЬЧЕНКО**, доктор техн. наук, проф., ГУ «ЛГМУ», Луганськ  
**Д. Л. ОСТАПУЩЕНКО**, канд. техн. наук, ГУ «ЛГМУ», Луганськ  
**А. Н. ЯКИМОВ**, ГУ «ЛГМУ», Луганськ  
 ГУ «Луганский государственный медицинский университет»

### **ЭФФЕКТИВНЫЙ АЛГОРИТМ АНАЛИЗА ТОПОГРАФИИ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА ПРОХОДНЫХ АКСИАЛЬНО-СИММЕТРИЧНЫХ НАМАГНИЧИВАЮЩИХ СИСТЕМ**

У роботі наведено економічний у сенсі витрат обчислювальних ресурсів алгоритм аналізу конфігурації магнітного поля віссиметричних намагнічуючих систем, що містять ферромагнітні елементи, методом поверхневих інтегральних рівнянь, який дозволяє реалізувати розв'язок задачі синтезу намагнічуючих пристроїв як задачі глобальної оптимізації з урахуванням лінійної залежності між намагніченістю матеріалу та напруженістю поля.

In this work an effective design method for axisymmetric systems, which contain ferromagnetic elements, based on joint using of the boundary integral equations with a global evolutionary multiagent optimization technique, is considered. The linear dependence between magnetization of material and strength of magnetic field has been taken in account.

**Введение.** В технике магнитного неразрушающего контроля широкое распространение получили намагничивающие системы (НС), содержащие ферромагнитные элементы, которые используются в качестве концентраторов поля. В этом случае топография поля в рабочем объеме НС определяется не только конфигурацией магнитного поля первичных источников, в качестве которых наиболее часто применяются обмотки с током, но и формой ферромагнитных элементов, а также магнитными характеристиками используемых при их изготовлении материалов. Часто к НС предъявляются требования, обусловленные их функциональным назначением и связанные с характером распределения магнитного поля в рабочем объеме, которые должны быть учтены на этапе проектирования. Этого удастся достичь путем выбора конструктивных параметров НС, в том числе, определяющих геометрическую конфигурацию входящих в ее состав ферромагнитных деталей, руководствуясь условиями, обусловленными требованиями к топографии поля. Связь конструктивных параметров НС с распределением поля в рабочем объеме имеет достаточно сложный характер, поэтому представляет интерес автоматизация процесса выбора их оптимальных значений и данная задача может решаться как задача оптимального параметрического синтеза. Оптимальный синтез предполагает построение параметризованной модели НС, позволяющей осуществлять анализ пространственной конфигурации поля в ее рабочем объеме при различных значениях параметров, оценивание полученного распределения в

соответствии с заданным критерием оптимальности. При этом значения параметров варьируются посредством применения определенной процедуры поиска, которая должна обеспечить нахождение их оптимальных значений. Таким образом, осуществление оптимального синтеза становится возможным в результате многократного решения задачи анализа.

Следовательно, эффективность проведения синтеза во многом определяется применяемыми при расчете магнитного поля методами. Наиболее простым случаем, при котором расчет поля требует минимальных вычислительных затрат, является предположение о постоянстве намагниченности  $\bar{M}$  ферромагнетика [1-3]. Задача в такой формулировке является излишне идеализированной, так как в большинстве случаев необходимо учитывать зависимость намагниченности от напряженности магнитного поля. Для расчета поля в ряде случаев можно использовать метод эквивалентных витков [4], в котором намагниченность ферромагнетика предпологается также постоянной.

Одним из наиболее общих приемов решения задачи анализа является метод скалярного потенциала, позволяющий свести задачу поиска распределения поля к решению уравнений Лапласа-Пуассона. Аналитические решения данных уравнений, обычно записываемые в виде рядов, известны лишь для простейших случаев геометрии, что ограничивает возможности данного метода при решении задач синтеза. В работе [5] приведены формулы для скалярного потенциала, позволяющие аналитически решать задачу анализа для тел простой геометрической формы в предположении, что магнитная проницаемость ферромагнитных элементов магнитной системы имеет бесконечно большую величину. Для тел сложной геометрии вывод подобных формул даже при таких допущениях является затруднительным.

Для учета зависимости намагниченности от напряженности магнитного поля при синтезе наиболее широкое применение нашли метод конечных элементов (ФЕМ) и метод интегральных уравнений (МИУ). Одна из характерных особенностей ФЕМ связана с тем, что дискретизация расчетной области осуществляется не только для ферромагнитных элементов НС, но на конечные элементы разбивается и окружающее тело пространство, что требует введения искусственных граничных условий. В работе [6], в которой в процессе решения задачи синтеза использовался ФЕМ, при изменении значений конструктивных параметров НС проводится повторное переразбиение всего объема системы, а в исследовании [7] – деформация сети вблизи поверхностей полюсных наконечников. Однако многократные переразбиения требуют дополнительного машинного времени, а деформация сети может привести к появлению крупных вытянутых элементов разбиения, что может отрицательно сказаться на скорости и точности вычислительного процесса. В МИУ осуществляется разбиение только ферромагнетика, что позволяет на порядок понизить размерность решаемой системы уравнений [8-10].

В линейном случае одним из наиболее эффективных приемов решения задачи анализа, применение которого позволяет значительно ускорить решение задачи синтеза магнитных систем, обладающих аксиальной симметрией, является метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) [11].

В целом эффективность вычислительного процесса определяется как временем, затрачиваемым на решение задачи расчета поля, так и выбором алгоритма глобальной оптимизации, так как этим обуславливается число вычислений значения целевой функции. Поэтому выбор как оптимизационного алгоритма, так и метода расчета поля имеют определяющее значение при построении эффективной схемы оптимального синтеза. Применительно к задачам синтеза авторами разработан алгоритм глобальной оптимизации, основанный на гибридизации бионического метода оптимизации роем частиц PSO и генетического алгоритма GA с вещественными хромосомами [12], который не предполагает вычисления производных целевой функции и является нечувствительным к особенностям ее топографии. Данные свойства алгоритма обеспечивают возможность его эффективного использования в задачах оптимального проектирования магнитных систем, где целевая функция задается алгоритмически и ее конкретное значение определяется в результате решения задачи расчета поля. Тот факт, что задача анализа конфигурации поля в рабочем объеме магнитной системы решается многократно, смещает акценты при выборе метода расчета поля в сторону методов, допускающих многократное использование информации, полученной на предыдущих этапах синтеза. При этом метод анализа распределения магнитного поля должен органично сочетаться с алгоритмом оптимального синтеза НС, образуя с ним единое целое, что позволяет исключить избыточность, обусловленную повторным проведением одних и тех же вычислительных процедур.

Целью данной работы является создание эффективного с точки зрения вычислительных затрат алгоритма расчета поля на базе метода граничных интегральных уравнений в задачах оптимального синтеза проходных аксиально-симметричных НС, содержащих ферромагнитные элементы.

При использовании метода ГИУ удастся избежать расчета намагниченности  $\vec{M}$  во всем объеме ферромагнитного тела и свести задачу расчета поля к определению нормальной составляющей намагниченности на его поверхности, что эквивалентно размещению на поверхности магнитопровода НС простого слоя фиктивных магнитных зарядов

$$\sigma(P) = \vec{n}_P \cdot \vec{M}(P),$$

где  $\vec{n}_P$  – вектор внешней нормали к поверхности в точке  $P$ .

Напряженность магнитного поля, создаваемого поверхностными зарядами в произвольной точке пространства  $Q$ , может быть рассчитана по формуле

$$\vec{H}(Q) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\sigma(P) \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} dS_P, \quad (1)$$

в которой  $\vec{r}_{PQ}$  – вектор, соединяющий точку истока  $P$ , расположенную на поверхности тела, с точкой наблюдения  $Q$  в пространстве.

Из граничных условий и свойств нормальной производной потенциала простого слоя следует, что плотность поверхностных магнитных зарядов удовлетворяет граничному интегральному уравнению Фредгольма 2-го рода [8, 9]

$$\sigma(Q) - \frac{\lambda}{4\pi} \iint_S \sigma(P) \frac{\vec{n}_Q \cdot \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} dS_P = \lambda \vec{n}_Q \vec{H}_0(Q). \quad (2)$$

где  $\lambda = \frac{2\chi}{2+\chi}$ ,  $\chi$  – магнитная восприимчивость вещества,  $\vec{H}_0$  – напряженность магнитного поля, создаваемого в пространстве намагничивающими катушками.

Если магнитная система обладает аксиальной симметрией, геометрическая форма ее элементов задается некоторым контуром  $l$  в плоскости  $\rho Oz$ , вращением которого вокруг оси  $Oz$  образован магнитопровод НС. При этом исходное интегральное уравнение в цилиндрической системе координат запишется в виде

$$\sigma(Q) - \lambda \int_l \sigma(P) \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{n}_Q \cdot \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} \rho_P d\varphi_P dl_P = \lambda \vec{n}_Q \vec{H}_0(Q). \quad (3)$$

Вводя обозначение для ядра

$$K(Q, P) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\vec{n}_Q \cdot \vec{r}_{PQ}}{r_{PQ}^3} \rho_P d\varphi_P, \quad (4)$$

интегральное уравнение (3) может быть записано в виде

$$\sigma(Q) - \lambda \int_l \sigma(P) K(Q, P) dl_P = \lambda \vec{n}_Q \vec{H}_0(Q). \quad (5)$$

Ядро  $K(Q, P)$  путем несложных математических преобразований может быть выражено через эллиптические интегралы первого и второго рода [11].

Для численного решения интегрального уравнения (5) поверхность осесимметричного тела разбивается на  $N$  тонких колец, в пределах которых значение  $\sigma$  считается постоянным (см. рис.1.а). Тогда, последовательно размещая точку наблюдения  $Q$  в центры образующих элементов разбиения, получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{b}. \quad (6)$$

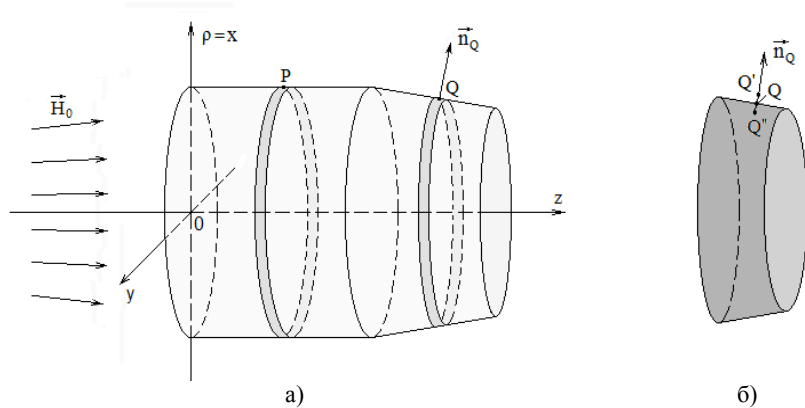


Рис.1. Разбиение поверхности осесимметричного магнитопровода НС на тонкие кольцевые элементы

Данная система уравнений имеет коэффициенты и правую часть, определяемые по следующим формулам

$$a_{ij} = \frac{\delta_{ij}}{\lambda} - \sum_{j=1}^N \int_{l_j} K(P, Q_i) dl_P, \quad b_i = \bar{n}_i \vec{H}_{0i}, \quad (7)$$

где  $l_j$  –  $j$ -й элемент разбиения;  $\bar{n}_i$ ,  $Q_i$  и  $\vec{H}_{0i}$  – соответственно нормаль к элементу разбиения  $l_i$ , центр его образующей и соответствующее значение напряженности внешнего магнитного поля;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера ( $\delta_{ij} = 1$ , при  $i = j$ , иначе  $\delta_{ij} = 0$ ).

При вычислении диагональных элементов матрицы  $\mathbf{A}$ , когда точка истока  $P$  совпадает с точкой наблюдения  $Q$ , ядро имеет особенность. Для численного выделения этой особенности можно воспользоваться теоремой о предельном значении нормальной производной потенциала простого слоя [13], согласно которой нормальная составляющая градиента потенциала, представляющего собой напряженность магнитного поля, испытывает скачок на величину  $\sigma$ . При этом сумма нормальных составляющих напряженности магнитного поля в точках  $Q'$  и  $Q''$  по обе стороны вблизи поверхности кольцевого элемента (см. рис.1.б) при  $Q', Q'' \rightarrow Q$  стремится к значению

$$\bar{n}_Q \cdot (\vec{H}(Q') + \vec{H}(Q'')) \rightarrow 2 \int_{l_j} K(P, Q) dl_P. \quad (8)$$

Пользуясь этим достаточно вычислить по формуле (1) напряженность магнитного поля в нескольких точках в непосредственной близости к поверхности кольцевого элемента с внутренней и внешней стороны и

экстраполировать полученные значения нормальных составляющих напряженности поля в точку  $Q$ , например, с использованием интерполяционного полинома Лагранжа.

Матрица системы линейных уравнений  $\mathbf{A}$  является плотно заполненной. Увеличение числа разбиений осесимметричного тела на кольцевые элементы позволяет получить более точное численное решение граничного интегрального уравнения (5), но повышает размерность системы уравнений. Количество неизвестных при этом может достигать нескольких десятков тысяч и для эффективного решения систем такой высокой размерности необходимо применять специальные методы. В данной работе для этой цели использовался метод GMRES [14, 15], основанный на проектировании на подпространства Крылова и позволяющий свести решение системы уравнений большой размерности к последовательному решению нескольких систем со значительно меньшим числом неизвестных. Выбор этого метода обуславливается тем, что при его применении не требуется хранить в оперативной памяти всю матрицу  $\mathbf{A}$ . Достаточно лишь насчитывать значения ее коэффициентов на внутреннем цикле метода. Обычно данный метод используется для систем уравнений с разреженными матрицами, однако, как показала практика, он может быть успешно применен и для систем с плотно заполненными матрицами.

Так как в рамках задачи синтеза многократно решается ресурсоемкая задача анализа, требуется, чтобы расчет поля осуществлялся с минимальными временными затратами. При решении задачи анализа наибольшее время счета занимает вычисление коэффициентов матрицы влияния  $\mathbf{A}$ . Информация о коэффициентах взаимного влияния, применяемая на предыдущих шагах оптимизационного процесса, может быть повторно использована на последующих итерациях синтеза для контуров, определяющих геометрию магнитопровода и имеющих общие элементы разбиения. Для этого предлагается хранить и использовать коэффициенты матрицы  $a_{ij}$ , вычисленные на предварительной стадии для всех потенциально возможных взаимных расположений элементов разбиения. При этом существенная экономия оперативной памяти компьютера, оцениваемая порядками, достигается в результате учета трансляционной симметрии, поскольку коэффициенты взаимного влияния пары тонких кольцевых элементов, определяемые по формуле (7), зависят лишь от относительного взаимного положения вдоль оси  $Oz$  и не зависят от абсолютных значений координат (см. рис.2). Так кольцо  $A$  оказывает такое же влияние на кольцо  $B$ , как элемент разбиения  $C$  влияет на элемент  $D$ . Для описания текущей геометрии, в потенциально возможной области, которую могут занимать элементы НС, вводится регулярная сеть. Далее применяется технология Вкл/Выкл, согласно которой при расчете учитываются лишь те элементы разбиения, которые принадлежат текущему профилю НС.

Следует заметить, что искомый контур оптимальной геометрии может быть представлен совокупностью образующих кольцевых элементов, имеющих ориентацию, не только совпадающую с направлениями координатных осей, но и вдоль отрезков, соединяющих узлы регулярной сети, покрывающей область возможного существования решения, для которой на предварительном этапе и определяются возможные коэффициенты взаимного влияния элементов разбиения.

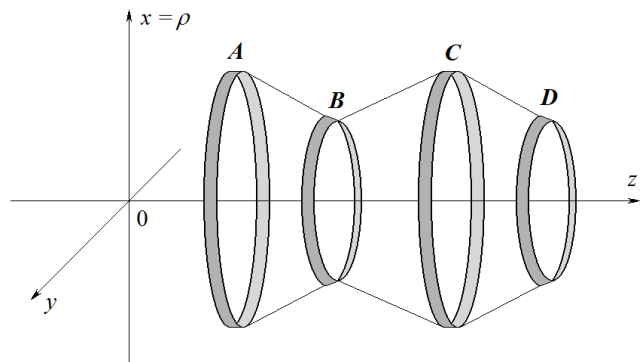


Рис.2. Учет трансляционной симметрии

Тестирование разработанного программного комплекса осуществлялось на модельном примере сферического экрана (см. рис.3), находящегося в однородном внешнем поле  $\vec{H}_0$ . В этом случае поле внутри полости экрана также является однородным, а его напряженность вычисляется по формуле

$$\vec{H} = \frac{\vec{H}_0}{1 + \frac{2}{9} \left( 1 - \frac{r^3}{R^3} \right) \left( \frac{1}{\chi + 1} + \chi - 1 \right)}, \quad (9)$$

где  $R$  – радиус экрана,  $r$  – радиус полости. Расчет поля проводился в контрольных точках, расположенных в полости экрана, при этом радиус  $R = 100 \text{ мм}$ , радиус полости  $r = 0.95R$ . Напряженность внешнего магнитного поля составляла  $1000 \text{ А/м}$ . Контур экрана разбивался на 9 950 элементов. При этих значениях параметров максимальное расхождение численного и аналитического решения составило 0.27% при  $\chi = 100$ , и 2.8% при  $\chi = 500$ , погрешность однородности поля внутри полости не превышала машинной точности. Корректность получаемых результатов свидетельствует об адекватности разработанной математической модели, и делает возможным ее использование для решения других задач расчета поля.

Продемонстрируем применение разработанного алгоритма расчета поля для случая проходной осесимметричной НС, изображенной на рис.4. В приведенном случае в качестве источника первичного поля выступает пара круговых намагничивающих катушек с прямоугольным поперечным сечением, плотность тока в которых составляла  $2 \text{ А/мм}^2$ . Внутренний и внешний радиусы первой катушки выбирались равными 30 мм и 40 мм, а второй катушки – 35 мм и 45 мм соответственно. Длина обеих катушек составляла 40 мм. Внешний радиус магнитопровода принимался равным 60 мм, а его длина – 120 мм. Зазор между полюсами составлял 20 мм. Конфигурация магнитного поля вдоль оси НС изменялась путем варьирования радиусов уступов, длина каждого из которых вдоль оси  $Oz$  была неизменной и равной 10 мм. НС разбивалась на тонкие кольцевые элементы с постоянным шагом 0.125 мм вдоль обеих координатных осей.

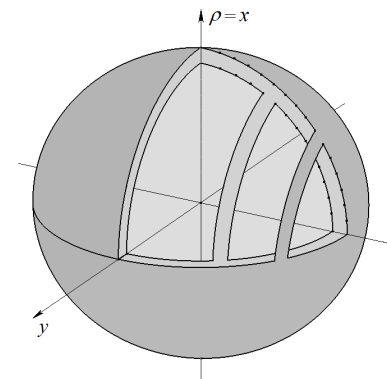
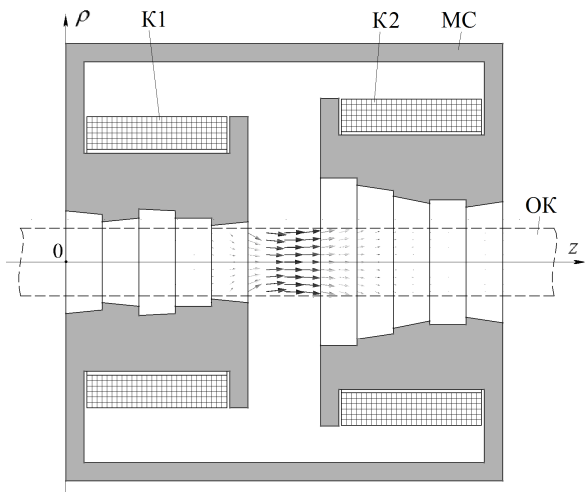


Рис.3. Геометрическая модель сферического экрана, применяемая при тестировании алгоритма

Для данного примера, радиусы полюсных элементов выбирались равными (нумерация слева направо)  $r_1 = 14 \text{ мм}$ ,  $r_2 = 13 \text{ мм}$ ;  $r_3 = 11 \text{ мм}$ ,  $r_4 = 12 \text{ мм}$ ;  $r_5 = 14.5 \text{ мм}$ ,  $r_6 = 14 \text{ мм}$ ;  $r_7 = r_8 = 12 \text{ мм}$ ;  $r_9 = 10 \text{ мм}$ ,  $r_{10} = 11 \text{ мм}$  для левого и  $r_{11} = r_{12} = 23 \text{ мм}$ ;  $r_{13} = 21 \text{ мм}$ ,  $r_{14} = 19.5 \text{ мм}$ ;  $r_{15} = 18 \text{ мм}$ ,  $r_{16} = 16 \text{ мм}$ ;  $r_{17} = r_{18} = 17 \text{ мм}$ ;  $r_{19} = 15 \text{ мм}$ ,  $r_{20} = 16.5 \text{ мм}$  для правого полюсов.

Графики для компонент напряженности магнитного поля вдоль оси магнитной системы на различных расстояниях от нее приведены на рис.5,6. Варьируя параметры уступов посредством применения алгоритма глобальной

оптимизации, удается обеспечить необходимое априори заданное распределение магнитного поля в рабочем объеме.



MC – магнитная система; K1, K2 – катушки; ОК – объект контроля

Рис. 4. Проходная аксиально-симметричная намагничивающая система ( $\chi = 100$ ) и распределение магнитного поля в ее рабочем объеме

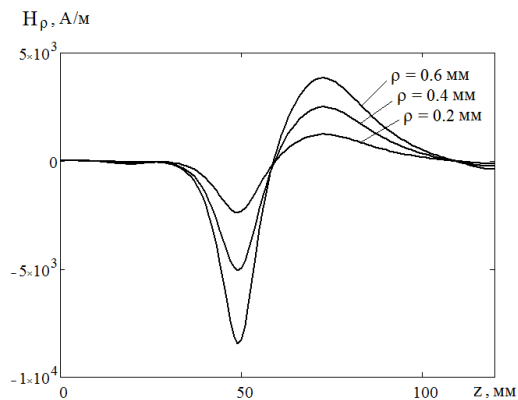


Рис.5. Радиальная составляющая напряженности поля вблизи оси намагничивающей системы

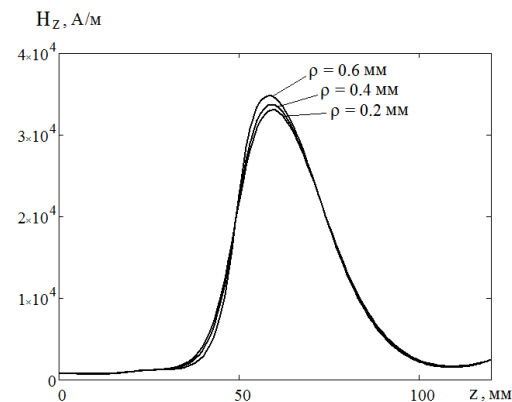


Рис.6. Аксиальная составляющая напряженности поля вблизи оси намагничивающей системы

### Выводы

1. В работе проведен анализ особенностей решения задачи расчета поля в рамках вычислительного процесса оптимального синтеза намагничивающих систем, содержащих ферромагнитные элементы. Анализ показал необходимость повторного использования информации при многократном решении задачи расчета поля в эффективных схемах оптимального синтеза, при этом выбор в пользу того или иного метода решения прямой задачи магнитостатики должен осуществляться руководствуясь критерием возможности его алгоритмической реализации, позволяющей избежать избыточного повторения идентичных вычислительных процедур на внутреннем цикле поиска оптимального значения параметров проектируемой магнитной системы.
2. На базе метода граничных интегральных уравнений разработан эффективный с точки зрения вычислительных затрат алгоритм расчета поля в задачах оптимального синтеза проходных аксиально-симметричных намагничивающих систем, включающих ферромагнитные элементы.
3. Проведено тестирование программного обеспечения, реализующего разработанный алгоритм расчета поля, которое показало, что погрешность в диапазоне значений магнитной восприимчивости от 10 до 500 не превышает 3%, а также приведен численный пример, иллюстрирующий применение разработанного алгоритма в задаче анализа проходного осесимметричного намагничивающего устройства магнитного неразрушающего контроля.

**Список литературы:** 1. Гальченко В.Я. Параметрический синтез формы аксиально-симметричных полюсов электромагнита для создания однородного магнитного поля / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов, Д.Л. Остапушенко // *Електротехніка і електромеханіка*. – Харків. – 2010. – № 2. – С. 33-36. 2. Гальченко В.Я. Оптимальное проектирование намагничивающих систем с высокооднородными магнитными полями в дефектоскопическом неразрушающем контроле / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов, Д.Л. Остапушенко // *Вісник Національного технічного університету «ХПІ»*. – 2010. – № 12. – С. 100-109. 3. Гальченко В.Я. Оптимальное конструирование электромагнитов с коническими полюсами для генерации высокооднородного магнитного поля / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов // *Электронное моделирование*. – 2010. – т. 32. – № 6. – С. 85-96. 4. Сизиков В.С. О повышении однородности поля постоянного магнита МР-томографа / В.С. Сизиков, Д.Ю. Соколов // *Изв. вузов. Приборостроение*. – Т. 49. – № 12. – 2006. – С. 32-38. 5. Marble A.E. Designing static fields for unilateral magnetic resonance by scalar potential approach / A.E. Marble, Mastikhin I.V., Colpitts B.G., Balcom B.J. // *IEEE Trans. Magn.* – vol. 43. – № 5. – 2007. – P. 1903-1911. 6. Богданов П.В. Особенности конструирования магнитных систем ряда современных компактных изохронных циклотронов с использованием методов математического моделирования / П.В. Богданов, В.П. Кухтин, Е.А. Ламзин, Ю.И. Стогов, С.Е. Сычешский // *Журнал технической физики*. – 2010. – т. 80. – № 9. – С. 125-133. 7. Ryu J. S. 3-D optimal shape design of pole piece in permanent magnet MPI using parameterized nonlinear design sensitivity analysis / J.S. Ryu, Y. Yao, C.S. Koh, Y.J. Shin // *IEEE Trans. Magn.* – vol. 42. – No 4. – 2006. – PP. 1351-1354. 8. Тозони О.В. Расчет трехмерных электромагнитных полей / О.В. Тозони, И.Д. Маергойз. – К.: Техника, 1874. – 352 с. 9. Маергойз И.Д. Итерационные методы расчета статистических полей в неоднородных, анизотропных и нелинейных средах / И.Д. Маергойз. – К.: Наук. думка, 1979. – 210 с. 10. Гальченко В.Я. Численный анализ пространственной конфигурации магнитных полей объектов сложной геометрической формы с учетом нелинейных характеристик веществ / В.Я. Гальченко, Д.Л. Остапушенко // *Информационные технологии*. – 2008. – №8. – С. 43-49. 11. Гальченко В.Я. Использование метода граничных интегральных уравнений в оптимальном 3-D проектировании осесимметричных электромагнитов с выбором формы полюсных наконечников / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов, Д.Л. Остапушенко // *Електротехніка і електромеханіка*. – Харьков. – № 6. – 2010. – С. 20-24. 12. Гальченко В.Я. Поиск глобального оптимума функций с использованием гибрида мультиагентной роевой оптимизации с эволюционным формированием состава популяции / В.Я. Гальченко, А.Н. Якимов, Д.Л. Остапушенко // *Информационные технологии*. – 2010. – № 10. – С. 9-16. 13. Тихонов А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1966. – 724 с. 14. Saad Y. Iterative methods for sparse linear systems / Y. Saad. – Philadelphia: PWS Publishing Company, 2003. – 448 p. 15. Баландин М.Ю. Методы решения СЛАУ большой размерности / М.Ю. Баландин, Э.П. Шурина. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2000. – 70 с.

*Поступила в редколлегию 19.04.11*