

**Й.І. СТЕНЦЕЛЬ**, докт. техн. наук, проф. СНУ ім. В.Даля, Сєвєродонецьк  
**В.В. ЄВСЮКОВ**, аспірант, СНУ ім. В.Даля, Сєвєродонецьк  
**О.І. ШАПОВАЛОВ**, аспірант, СНУ ім. В.Даля, Сєвєродонецьк

## МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ УЛЬТРАЗВУКОВОГО ЗАСОБУ КОНТРОЛЮ РІВНЯ РІДИННИХ СЕРЕДОВИЩ ЗА РЕПЕРНИМ КАНАЛОМ

У роботі наведено результати теоретичних досліджень ультразвукового засобу контролю рівня, котрий для зменшення похибок вимірювального контролю мають реперний пристрій. Показано, реперний канал має похибки, які впливають на наявність адитивних та мультиплікативних складових похибок робочого каналу.

The results of theoretical researches of ultrasound level control device that has the reference for decreasing errors of measuring control are given in the work. It is shown that the reference channel has the errors that occur at availability of additive and multiplicative component errors of working channel.

**Вступ.** Проблема підвищення точності вимірювального контролю завжди є актуальною, у тому числі й для ультразвукових засобів контролю рівня (ЗКР) рідинних середовищ. У багатьох ультразвукових ЗКР для зменшення впливу внутрішніх і зовнішніх факторів на точність вимірювального контролю використовують різні допоміжні пристрої у т.ч. й реперні [1, 2]. Реперний пристрій, як правило, має вигляд пластини або кільця, які встановлюються на деякій відстані  $J_p$  від ультразвукового перетворювача (УЗП). Частина енергії випроміненого УЗП ультразвукового сигналу (УЗС) відбивається від РП (назвемо реперним сигналом) і повертається до того ж УЗП, який у даному випадку служить як приймач УЗС, а друга її частина направляється до поверхні рідинного середовища (ПРС) (назвемо робочим сигналом), відбивається від неї і сприймається тим же приймачем. Робочий сигнал завжди сприймається з деяким запізненням, яке залежить від відстані ПРС від УЗП. Після кожного сприйняття реперного та робочого сигналу їх різниця приводиться до нуля, тобто адитивна складова робочого сигналу зменшується до мінімального рівня [3]. При цьому рахувалося, що реперний сигнал є сталим і формував поправку для систематичної похибки робочого каналу.

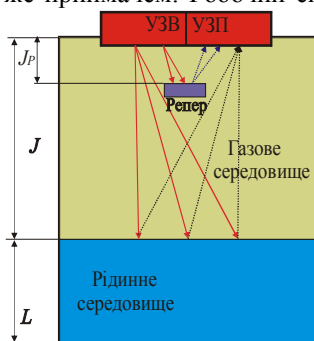


Рис. 1. Принцип вимірювального контролю рівня рідини з репером

**Постановка задачі.** Задача дослідження полягає в тому, щоби визначити фактори, котрі впливають на реперний сигнал, і як змінюється адитивна складова робочого сигналу при зміні реперного сигналу. Поправка, яка формується реперним каналом, фактично є математичною моделлю реперного сигналу. Вхідним сигналом для реперного каналу є електричний збуджуючий імпульс, який в УЗП перетворюється в ультразвукові коливання (УЗК), котрі випромінюються в газове середовище, відбиваються від репера, повертаються знову в це середовище, сприймаються мембраною випромінювача і перетворюються в електрорушійну силу (ЕРС)  $e_p$ , яка далі обробляється і перетворюється електричною вимірювальною схемою.

**Основна частина.** Електричний збуджуючий імпульс (ЕЗІ), який формується блоком живлення ультразвукового ЗКР, прикладений до УЗП. Так як останній має активний опір, ємність та індуктивність, то під дією ЕЗІ в ньому виникає сила струму, котра викликає електромагнітне поле (ЕМП) напруженістю  $H_{\Pi}$ , яка описується наступним рівнянням [4]

$$\frac{\partial U_I}{\partial \theta} = -\text{div}(D_U \nabla H_{\Pi}(\bar{r}_{H_{\Pi}}, \theta)) + \gamma(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t), \quad (1)$$

де  $U_I$  - амплітуда ЕЗІ;  $H_{\Pi}(\bar{r}_{H_{\Pi}}, \theta)$  - зміна напруженості ЕМП за час перенесення електромагнітної енергії  $\theta$ ;  $\bar{r}_{H_{\Pi}}$  - вектор напрямку дії ЕМП;  $D_U$  - ефективний коефіцієнт перенесення електричної енергії ЕЗІ в напрямку  $\bar{r}_{H_{\Pi}}$ ,  $\text{м}^2/\text{с}$ ,  $\gamma(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t)$  - стік електромагнітної енергії.

Приймемо, що перенесення енергії електричного поля та напруженості електромагнітного поля проходить одночасно. Тому враховуватимемо, що  $\theta \approx t$ . Стоком  $\gamma(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t)$  цього реологічного перетворення є напруженість ЕМП  $H_{\Pi}(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t)$ . Враховуючи, що УЗП має активний опір та ємність, то стік ЕМП проходитиме за аперіодичним законом:

$$\gamma(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t) = \tau_{H_{\Pi}} \frac{dH_{\Pi}(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t)}{dt} + H_{\Pi}(\bar{r}_{H_{\Pi}}, t) = k_U U_I, \quad (2)$$

де  $\tau_{H_{\Pi}} = RC$  - стала часу п'єзоелемента;  $k_U$  - коефіцієнт передачі

Згідно з фізичною моделлю цього реологічного перетворення, а також з методом нульового градієнта (метод проф. Стенцеля Й.І.) рівняння (1) з врахуванням (2) та одностороннього напрямку перенесення електричної енергії ЕЗІ приймає форму системи двох рівнянь:

$$\frac{\partial U_I}{\partial t} + D_U \frac{\partial^2 U_I}{\partial x^2} = 0; \quad (3)$$

$$\tau_{H_{\Pi}} \frac{dH_{\Pi}(x, t)}{dt} + H_{\Pi}(x, t) = k_U U_I(x, t). \quad (4)$$

де  $x$  - напрямок дії напруженості електричного поля ЕЗІ.

Рішенням рівняння (3) буде

$$U_I(x, t) = U_{10} \operatorname{erf}(x/2\sqrt{D_U t}), \quad (5)$$

де  $U_{10}$  - максимальне значення ЕЗІ.

Розклавши  $\operatorname{erf}(x/2\sqrt{k_U^2 t})$  у ряд і виключивши члени високих порядків,

при товщині ПЕЕ  $x = x_0$ , приймаючи, що час тривалості ЕЗІ  $t = t_1$ , маємо

$$U_I(x, t_1) = U_{10} (x(t)/2\sqrt{D_U t_1}). \quad (6)$$

Позначивши  $k_{U0} = U_{10}/2\sqrt{D_U t_1}$ , отримуємо

$$U_I(x, t_1) = k_{U0} x(t). \quad (7)$$

Підставивши (7) у друге рівняння системи (4), маємо

$$\tau_{H\Pi} \frac{dH_{\Pi}(x, t)}{dt} + H_{\Pi}(x, t) = k_{U0} U_I(x, t). \quad (8)$$

Рішенням рівняння (8) при умовах:  $x = 0$  при  $t = 0$  і  $x = x_0$  при  $t = \infty$  буде наступним

$$H_{\Pi}(x, t) = k_{U0} U_I [1 - \exp(-t/\tau_{H_A})]. \quad (9)$$

Внаслідок такого реологічного переходу в ПЕЕ має місце електромагнітне перетворення, яке можна описати таким рівнянням

$$\frac{\partial H_{\Pi}(\vec{r}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(H_{\Pi}(\vec{r}, t), \vec{v}) = \operatorname{div}(k^2 \nabla H_{\Pi}(\vec{r}, t)) + \gamma(\vec{r}, t), \quad (10)$$

де  $H_{\Pi}(\vec{r}, t)$  - напруженість ЕМП;  $\vec{r}$  - вектор напрямку дії ЕМП;  $t$  - час дії ЕМП;  $v_i(\vec{r}, t)$  - швидкість зміни ЕМП;  $k^2 = j\omega_e \mu_a \sigma$  - комплексний коефіцієнт, який залежить від електромагнітних властивостей п'єзоелемента;  $\omega_e$  - кутова частота коливань ЕМП;  $\mu_a$  - абсолютна магнітна сприйнятливості, яка характеризує індуктивні властивості ПЕЕ;  $\sigma$  - питома електрична провідність ПЕЕ;  $\gamma(\vec{r}, t)$  - інтенсивність стоку енергії ЕМП за одиницю часу  $t$ .

Нехай швидкість руху мембрани УЗП в ЕМП незначна у порівнянні зі швидкістю зміни самого поля, тобто можна припустити, що  $\vec{v}(\vec{r}, t) \rightarrow 0$ . Тоді рівняння перенесення напруженості ЕМП приймає наступну форму

$$\frac{\partial H_{\Pi}(\vec{r}, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(k^2 \nabla^2 H_{\Pi}(\vec{r}, t)) + \gamma(\vec{r}, t). \quad (11)$$

Якщо параметр  $k^2$  мало залежить від процесу перенесення, а перенесення ЕМП проходить в одному напрямку  $x$ , то рівняння (11) спрощується й приймає форму:

$$\frac{\partial H_{\Pi}(x, t)}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 H_{\Pi}(x, t)}{\partial x^2} + \gamma(x, t), \quad (12)$$

Стоком цього реологічного перетворення є переміщення мембрани УЗП під дією зусилля ЕМП, яке створюється ЕЗІ. Приймаючи до уваги, що переміщення мембрани проходить в одному напрямку, то позначивши  $\gamma(x, t) = f(x(t))$ , для вільної складової маємо

$$\gamma(x, t) = \tau_M \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k_{H\Pi} H(x, t), \quad (13)$$

де  $\tau_M$  - стала часу переміщення мембрани.

Підставивши (13) у рівняння (12), отримуємо

$$\frac{dH_{\Pi}(x, t)}{dt} + k^2 \frac{d^2 H_{\Pi}(x, t)}{dx^2} = \tau_M \frac{dx(t)}{dt} + x(t). \quad (14)$$

Згідно з фізичною моделлю реологічного перетворення на границі розділу інтегральної імпульсної дельта-функції Дірака похідна  $\frac{dH_{\Pi}(x, t)}{dt} = 0$

і  $\frac{dx(t)}{dt} = 0$ . Тоді нелінійне диференціальне рівняння (14) розділяється на наступну систему двох рівнянь:

$$\frac{\partial H_{\Pi}(x, t)}{\partial t} + k^2 \frac{\partial^2 H_{\Pi}(x, t)}{\partial x^2} = 0; \quad (15)$$

$$\tau_x \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k_x H_{\Pi}(x, t). \quad (16)$$

Рішення рівняння (15) при умові:  $t = 0$   $H_{\Pi}(x, 0) = H_{\Pi 0}$  і  $x = \infty$   $H_{\Pi}(\infty, t) = 0$  має вигляд

$$H_{\Pi}(x, t) = H_{\Pi 0} \operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{k^2 t}\right). \quad (17)$$

де  $H_{\Pi 0}$  - напруженість електричного поля, яка прикладена до ПЕЕ.

Розклавши  $\operatorname{erf}\left(x/2\sqrt{k^2 t}\right)$  в ряд і обмежившись тільки першим його членом, при  $x = x_0$  і тривалості дії імпульсу  $t = t_{H0}$  маємо

$$H_{\Pi}(x, t) = H_{\Pi 0} x(t)/2\sqrt{k^2 t_{H0}}. \quad (18)$$

Позначивши  $k_{H0} = H_{\Pi 0}/2\sqrt{k^2 t_{H0}}$ , маємо

$$H_{\Pi}(x, t) = k_{H0} x(t). \quad (19)$$

Підставивши (19) у (16), маємо

$$\tau_x \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = k_{H0} H_{\Pi}(x, t). \quad (20)$$

Рішенням рівняння (20) при умовах: при  $t = 0$   $x = 0$  і  $t = \infty$   $x = x_0$  буде наступним

$$x(t) = k_{H0} H_{\Pi}(x, t) \exp(-t/\tau_x), \quad (21)$$

де  $\tau_x = \sqrt{mk_1/c_2^2}$  - стала часу мембрани УЗП.

Після припинення дії ЕЗІ, а відповідно дії напруженості ЕМП вільне падіння мембрани призведе до її коливального процесу. Процес є загасаючим з частотою, яка відповідає ультразвуковій. Рух мембрани здійснюється в газовому середовищі, яке чинить відповідну протидію цьому руху за рахунок тиску газу на мембрану. Реологічне перетворення такого процесу описується рівнянням

$$\frac{\partial x(y_M, t)}{\partial t} = \text{div}(D_{y_M} \nabla^2 x(y_M, t)) + \gamma(y_M, t), \quad (22)$$

де  $y_M$  - напрямок коливального руху мембрани УЗП;  $D_{y_M}$  - ефективний коефіцієнт переносу кількості руху мембрани.

Якщо коефіцієнт перенесення імпульсу руху мембрани  $D_{y_M}$  мало залежить від напрямку перенесення, а переміщення мембрани здійснюється в одному напрямку, то рівняння (22) приводиться до наступного

$$\frac{\partial x(y_M, t)}{\partial t} = -D_{y_M} \frac{d^2 x(y_M, t)}{dy^2} + \gamma(y_M, t). \quad (23)$$

Стоком реологічного перетворення є загасання УЗК мембрани, тобто

$$\gamma(y_M, t) = f(x(t)) = \tau_{22}^2 \frac{d^2 y_M}{dt^2} + \tau_{21} \frac{dy_M}{dt} + y_M, \quad (24)$$

де  $\tau_{21} = k_1/c_1$ ;  $\tau_{22}^2 = m/c_1$  - сталі часу;  $k_{y_M}$  - коефіцієнт передачі.

Підставивши (24) у рівняння (23), отримуємо

$$\frac{\partial x(y_M, t)}{\partial t} + D_{y_M} \frac{d^2 x(y_M, t)}{dy_M^2} = k_{y_M} \left[ \tau_{22}^2 \frac{d^2 y_M(t)}{dt^2} + \tau_{12} \frac{dy_M(t)}{dt} + y_M(t) \right]. \quad (25)$$

Згідно з фізичною моделлю реологічного перетворення на границі розділу інтегральної імпульсної дельта-функції Дірака похідна  $\frac{dx(y_M, t)}{dt} = 0$  і  $\frac{dy_M(t)}{dt} = 0$ . Тоді рівняння (25) розділяється на наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial x(y_M, t)}{\partial t} + D_{y_M} \frac{\partial^2 x(y_M, t)}{\partial y_M^2} = 0; \quad (26)$$

$$\tau_{22}^2 \frac{d^2 y_M(t)}{dt^2} + \tau_{12} \frac{dy_M(t)}{dt} + y_M(t) = k_{y_M} x(y_M, t). \quad (27)$$

При граничних умовах:  $t = 0$   $x = x_0$  і  $t = \infty$   $\frac{dx(y_M, \infty)}{dt} = 0$  рішенням рівняння (26) буде

$$x(t) = k_{y_M} x_0 \text{erf}(y_M(t)/2\sqrt{D_{y_M} t}). \quad (28)$$

Розклавши функцію  $\text{erf}(y_M(t)/2\sqrt{D_{y_M} t})$  у ряд, у першому наближенні при нульових початкових умовах маємо

$$x(y_M, t_x) = k_{y_M} x_0 (y_M(t)/2\sqrt{D_{y_M} t_{x0}}). \quad (29)$$

де  $y_{M0}$  - максимальне відхилення мембрани за час  $t_{x0}$ .

Позначивши  $k_{x0} = k_{y_M} x_0 / 2\sqrt{D_{y_M} t_{x0}}$ , маємо

$$x(y_M, t) = k_{x0} y_M(t). \quad (30)$$

Підставивши (30) у рівняння (27), отримуємо

$$\tau_{22}^2 \frac{d^2 y_M(t)}{dt^2} + \tau_{12} \frac{dy_M(t)}{dt} + y_M(t) = k_{x0} x(t). \quad (31)$$

При граничних умовах:  $t = 0$   $y_M(0) = 0$ ,  $t = \infty$   $y_M(\infty) = 0$  рішенням рівняння (31) буде:

$$y_M(t) = k_{x0} x(t) \{1 - \exp(-\alpha_1 t) [\cos(\omega_0 t)]\}, \quad (32)$$

де  $\alpha_1 = \tau_{21} \setminus 2\tau_{22}^2$  - ступінь загасання УЗК;  $\omega_0$  - власна частота коливань УЗС.

Вище вказувалося, що УЗС від УЗВ направляється в газове середовище, в якому терпить відповідне перетворення за рахунок тертя, а також фізико-хімічних параметрів газу. Для заданих конструктивних параметрів УЗВ змінним параметром є коефіцієнт тертя  $\beta$ , який залежить від параметрів газу. Коефіцієнт тертя дорівнює  $\beta = \eta l$ , де  $\eta$  - динамічна в'язкість газу, в якому розташований УЗВ;  $l$  - умовний лінійний розмір.

Динамічна в'язкість газового середовища визначається наступним рівнянням [2]:

$$\eta = 26,69 \sqrt{MT_C} / r^2, \quad (33)$$

де  $M$  - молярна маса газового середовища;  $T_C$  - температура;  $r$  - радіус мембрани.

З врахуванням рівняння (33) вираз для коефіцієнта тертя прийме вигляд:

$$\beta = 26,69 l \sqrt{MT_C} / r^2, \quad (34)$$

або, враховуючи, що  $l = 2\pi r$  - периметр мембрани УЗП, а  $r$  - його радіус, одержуємо

$$\beta = 53,38\sqrt{MT_C} / r. \quad (35)$$

З врахуванням коефіцієнта тертя сталі часу в рівнянні (31)  $\tau_{22} = m / \beta$ , а  $\tau_{12} = \beta x_0 / mg$ , де  $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ .

Власна частота УЗК

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{\tau_{22}^2} - \left(\frac{\tau_{12}}{2\tau_{22}}\right)^2} = \frac{\beta}{m} \sqrt{1 - \frac{x_0^2 \beta^4}{4g^2 m^4}} \approx \frac{\beta}{m}. \quad (36)$$

Виходячи зі сказаного, ступінь загасання УЗК дорівнюватиме

$$\alpha_{y_M} = -\frac{\tau_{12}}{2\tau_{22}} = \frac{\beta x_0 \beta^2}{mg 2m^2} = \omega_0^3 x_0 / g. \quad (37)$$

З врахуванням рівнянь (36) і (37) отримуємо

$$y_M(t) = k_{x_0} x(t) \left\{ 1 - \exp\left(-\beta^3 x_0 t / m^3 g\right) \left[ \cos(\beta t / m) \right] \right\}. \quad (38)$$

Механічний рух мембрани УЗВ призводить до появи в п'єзоелементі ЕРС, дія якої направлена протилежно до дії механічного руху мембрани. Реологічне перетворення вільних механічних коливань  $y_M$  в ЕРС  $e(\bar{r}, t)$  можна описати наступним рівнянням

$$\frac{\partial y_M}{\partial t} = \text{div}(D_{y_M} \nabla y_M) + e_T(\bar{r}, t). \quad (39)$$

Стоком цього реологічного перетворення є ЕРС  $e_T(\bar{r}, t)$ . Якщо створювана ЕРС викликає в п'єзоелементі струм, а останній напруженість ЕМП, ( $y_M(\bar{r}, t) \equiv e(\bar{r}, t) \equiv H_E(\bar{r}, t)$ ), то рівняння (39) можна записати таким чином:

$$\frac{\partial H_E(y_T, t)}{\partial t} = k^2 \nabla^2 H_E(y_T, t) + \gamma(y_T, t), \quad (40)$$

де  $H_E(y_T, t)$  - напруженість ЕМП, яке створюється ЕРС.

Стоком цього реологічного перетворення є гальмуюча дія руху мембрани УЗП. Для створюваної ЕРС можна записати таке рівняння

$$\frac{\partial H_E(y_T, t)}{\partial t} + k^2 \frac{d^2 H_E(y_T, t)}{dy_E^2} = k_E \left[ \tau_{2E}^2 \frac{d^2 y_T(t)}{dt^2} + \tau_{1E} \frac{dy_T(t)}{dt} + y_T(t) \right], \quad (41)$$

де  $y_T(t)$  - напрямок руху гальмуючих коливань.

Після відповідного розв'язку рівняння (41), враховуючи, що частота вимушених коливань ЕРС співпадає з частотою власних коливань мембрани, маємо

$$y_E(t) = -k_{E0} y_M(t) \left\{ 1 - \exp(-\alpha_E t) \left[ \cos(\omega_0 t) \right] \right\}, \quad (42)$$

де  $\alpha_E = \omega_0^3 / k^4$ .

УЗС, який випромінюється в газове середовище, дорівнює  $y_\Gamma(t) = y_M(t) - y_E(t)$ . Позначимо  $Y_M(t) = k_{x_0} x(t)$ ,  $Y_E(t) = k_{E0} y_M(t)$ ,

$$K_Y = Y_E(t) / Y_M(t), \text{ а } \Delta\alpha = \alpha_E - \alpha_M = \frac{\omega_0^3}{k^4} \left( 1 - \frac{k^4}{g} x_0 \right) \approx \frac{\omega_0^3}{k^4}.$$

Тоді

$$y_\Gamma(t) = k_{\Gamma 0} y_M(t) \left\{ \begin{array}{l} 1 - \frac{k_{\Gamma 0} y_M(t)}{1 - K_Y} \exp\left(-\left(\omega_0^3 t\right) \frac{x_0}{g}\right) \cos(\omega_0 t) * \\ * \left[ 1 + K_Y \exp\left[-\left(\omega_0^3 t\right) \frac{1}{k^4}\right] \right] \end{array} \right\}. \quad (43)$$

Якщо прийняти, що  $\exp\left[-\left(\omega_0^3 t\right) / k^4\right] \approx 1$ , то рівняння (43) спрощується і приймає вигляд

$$y_\Gamma(t) = k_{\Gamma 0} y_M(t) \left\{ 1 - k_{\Gamma 0} y_M(t) \left( \frac{1 + K_Y}{1 - K_Y} \right) \exp\left(-\left(\omega_0^3 t\right) \frac{x_0}{g}\right) \cos(\omega_0 t) \right\}. \quad (44)$$

Випромінений УЗС проходить подвійну відстань у газовому середовищі, за рахунок чого його інтенсивність зменшується за законом Ламберта-Бера. Ультразвуковий сигнал, який приходить до УЗП, дорівнюватиме

$$y_C(t) = k_{\Gamma 0} y_M(t) \left\{ \begin{array}{l} 1 - k_{\Gamma 0} y_M(t) \left( \frac{1 + K_Y}{1 - K_Y} \right) * \\ * \exp\left(-\left[\left(\omega_0^3 t\right) \frac{x_0}{g} + 2\varepsilon J_p\right]\right) \cos(\omega_0 t) \end{array} \right\}, \quad (45)$$

де  $\varepsilon$  - коефіцієнт поглинання УЗС газовим середовищем;  $J_p$  - відстань від УЗП до репера.

УЗС, який досяг УЗП, перетворюється в механічні коливання мембрани. Реологічне перетворення УЗС у вимушені механічні коливання мембрани можна описати наступним рівнянням:

$$\frac{\partial y_C(z, t)}{\partial t} = -\text{div}(D_C \nabla y_C(z, t)) + z(\bar{r}, t). \quad (46)$$

де  $D_C$  - ефективний коефіцієнт перенесення механічної енергії у напрямку  $z$  за час  $t$ .

Стоком цього реологічного перетворення є вимушені механічні коливання мембрани  $z(\bar{r}, t)$ . Так як напрямок дії сигналу  $y_C(t)$  такий самий як і сигналу  $z(\bar{r}, t)$ , то рівняння (46) набуде наступного вигляду:

$$\frac{dy_C(z, t)}{dt} + D_C \frac{d^2 y_C(z, t)}{dz^2} = z(y_C, t). \quad (47)$$

Вимушені механічні коливання мембрани описуються таким рівнянням

$$m \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dz(t)}{dt} + c_1 z(t) = k_C y_C(z, t). \quad (48)$$

Підставивши (48) у рівняння (47), маємо

$$\frac{dy_C(z, t)}{dt} + D_C \frac{d^2 y_C(z, t)}{dz^2} = k_C \left( \tau_{2C}^2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \tau_{1C} \frac{dz(t)}{dt} + z(t) \right), \quad (49)$$

де  $\tau_{1C} = k_1 / c_1$ ,  $\tau_{2C} = \sqrt{m / c_1}$  - сталі часу.

Згідно з фізичною моделлю реологічного перетворення на границі розділу інтегральної імпульсної дельта-функції Дірака похідна  $\frac{dy_C(z, t)}{dt} = 0$  і  $\frac{dz(t)}{dt} = 0$ . Тоді рівняння (49) розділяється на наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial y_C(z, t)}{\partial t} + D_C \frac{d^2 y_C(z, t)}{dz^2} = 0; \quad (50)$$

$$\tau_{2C}^2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \tau_{1C} \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = k_C y_C(z, t). \quad (51)$$

При граничних умовах:  $t = 0$   $x = x_0$  і  $t = \infty$   $\frac{dy_C(z, \infty)}{dt} = 0$  рішенням рівняння (50) буде

$$y_C(z, t) = k_C y_{C0} \operatorname{erf}\left(z / 2\sqrt{D_C t}\right). \quad (52)$$

Розклавши функцію  $\operatorname{erf}\left(z / 2\sqrt{D_C t}\right)$  у ряд, при початкових умовах наближено маємо

$$y_C(z, t) = k_C y_{C0} \left( z(t) / 2\sqrt{D_C t_{C0}} \right), \quad (53)$$

де  $z_0$  - максимальне відхилення мембрани при дії на неї сприймаючого УЗС.

Позначивши  $k_{C0} = k_C \left( y_C(t) / 2\sqrt{D_C t_{C0}} \right)$ , маємо

$$y_C(z, t) = k_{C0} z(t). \quad (54)$$

Підставивши (54) у рівняння (53), отримуємо

$$\tau_{2C}^2 \frac{d^2 z(t)}{dt^2} + \tau_{1C} \frac{dz(t)}{dt} + z(t) = k_{C0} y_{C0}. \quad (55)$$

При граничних умовах:  $t = 0$   $z(0) = 0$ ,  $t = \infty$   $z(\infty) = 0$  маємо

$$z(t) = k_{C0} y_{C0} (t) \{ 1 - \exp(-\alpha_C t) [\cos(\omega_0 t)] \}, \quad (56)$$

де  $\alpha_C = -\tau_{1C} / 2\tau_{2C}^2$  - ступінь загасання коливань.

Реологічне перетворення вимушених механічних коливань мембрани викличе ЕРС  $e_{\Pi}(t)$ . Таке перетворення описується наступним рівнянням

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\operatorname{div}(D_{\Pi} \nabla z) + e_{\Pi}(z, t), \quad (57)$$

де  $D_{\Pi}$  - ефективний коефіцієнт переносу механічної енергії УЗП.

Так як ЕРС  $e_{\Pi}(z, t)$  змінюється за коливальним законом з частотою механічних коливань, то для неї можна записати наступне рівняння

$$L_E C_E \frac{d^2 e_{\Pi}(z, t)}{dt^2} + R_E C_E \frac{de_{\Pi}(z, t)}{dt} + e_{\Pi}(z, t) = R_E k_C z(t), \quad (58)$$

де  $R_E, L_E, C_E$  - еквівалентні: активний опір, індуктивність і ємність УЗП.

З врахуванням (58) рівняння (57) набуває вигляду

$$\frac{\partial z(e_{\Pi}, t)}{\partial t} + \operatorname{div}(D_{\Pi} \nabla z(e_{\Pi}, t)) = k_E \left( \tau_{2E} \frac{d^2 e_{\Pi}(z, t)}{dt^2} + \tau_{1E} \frac{de_{\Pi}(z, t)}{dt} + e_{\Pi}(z, t) \right). \quad (59)$$

Відповідно до фізичної моделі реологічного перетворення на границі розділу інтегральної імпульсної дельта-функції Дірака похідна  $\frac{de_{\Pi}(z, t)}{dt} = 0$  і

$\frac{dz(e_{\Pi}, t)}{dt} = 0$ . Тоді рівняння (59) розділяється на наступну систему рівнянь:

$$\frac{\partial z(e_{\Pi}, t)}{\partial t} + D_E \frac{d^2 z(e_{\Pi}, t)}{de_{\Pi}^2} = 0; \quad (60)$$

$$\tau_{2E} \frac{d^2 e_{\Pi}(z, t)}{dt^2} + \tau_{1E} \frac{de_{\Pi}(z, t)}{dt} + e_{\Pi}(z, t) = k_E z(e_{\Pi} t). \quad (61)$$

При граничних умовах:  $t=0$   $z=z_0$  і  $t=\infty$   $\frac{de_{\Pi}(z, \infty)}{dt}=0$  рішенням рівняння (60) буде

$$e_{\Pi}(z, t) = k_E e_0 \operatorname{erf}\left(z / 2\sqrt{D_E t}\right). \quad (62)$$

де  $D_E$  - ефективний коефіцієнт перенесення електромагнітної енергії в напрямку  $z$  за час  $t$ .

Розклавши функцію  $\operatorname{erf}\left(z / 2\sqrt{D_E t}\right)$  у ряд, наближено маємо

$$e_{\Pi}(z, t_0) = k_E e_{\Pi 0} z(t_0) / 2\sqrt{D_E t_0}, \quad (63)$$

де  $e_{\Pi 0}$  - максимальне відхилення ЕРС.

Позначимо  $k_{E0} = k_E e_{\Pi 0} / 2\sqrt{D_E t_0}$ , де  $t_0$  - тривалість дії руху мембрани. Підставивши (62) у рівняння (61), маємо

$$\tau_{2E}^2 \frac{d^2 e_{\Pi}(t)}{dt^2} + \tau_{1E} \frac{de_{\Pi}(t)}{dt} + e_{\Pi}(t) = k_{E0} z(t) / 2\sqrt{D_E t_0}. \quad (64)$$

При граничних умовах:  $t=0$   $e_{\Pi}(0)=0$ ,  $t=\infty$   $e_{\Pi}(\infty)=0$  маємо

$$e_{\Pi}(t) = k_{E0} z(t) \{1 - \exp(-\alpha_E t) [\cos(\omega_0 t)]\}, \quad (65)$$

де  $\alpha_E = -\tau_{1E} / 2\tau_{2E}^2$  - ступінь загасання електромагнітних коливань.

Рівняння (65) з врахуванням (9), (21), (32), (38), (42), (44), (45) і (56), а також приймаючи до уваги, що  $\alpha_C \approx \alpha_E = \alpha_1$ ,  $\tau_x \approx \tau_{H\Pi}$ , а  $k_{\Gamma 0} \left(\frac{1+K_Y}{1-K_Y}\right) \approx 1$

отримуємо математичну модель ультразвукового ЗКР за реперним каналом у такій формі:

$$e_p(t) = K_P U_I \{1 - \exp(-\alpha_1 t) \cos(\omega_0 t)\}^2 * [\exp(-t / \tau_x)]^2 * \\ * \left\{1 - \exp\left(-\left[\left(\omega_0^3 t\right) \frac{x_0}{g} + 2\varepsilon J_P\right]\right) \cos(\omega_0 t)\right\} * \\ * \left\{1 - \exp\left(-\beta^3 x_0 t / m^3 g\right) [\cos(\beta t / m)]\right\}, \quad (66)$$

де  $K_P = k_{E0} k_{C0} k_{\Gamma 0} k_{x0} k_{H0} k_{U0}$  - загальний коефіцієнт передачі.

Реперний сигнал, який описується рівнянням (66), детектується і у формі випрямленого сигналу і сприймається електричною вимірювальною схемою.

Враховуючи, що коефіцієнт тертя  $\beta = 53,38\pi \sqrt{MT_C} / r$ , частота власних

коливань мембрани  $\omega_0 = 53,38\pi \frac{T_C}{rm} \sqrt{\frac{z\gamma_C}{P}}$ , ступінь загасання УЗК з врахуванням частоти власних коливань

$$\alpha_1 = -\omega_0^3 x_0 / g = \left[ (53,38\pi)^3 \frac{T_C^3}{r^3 m^3} \frac{z\gamma_C}{P} \sqrt{\frac{z\gamma_C}{P}} \right] x_0 / g,$$

максимальне відхилення мембрани  $x_0 = k_1 U_0 \exp(-t_1 / R_1 C_1)$  математична модель для реперного сигналу приймає вигляд

$$e_p = K_P U_0 \exp(-t_1 / R_1 C_1) \left\{ 1 - \exp\left( \begin{aligned} & \left[ -k_1 U_0 \exp(-t_1 / R_1 C_1) * \right. \\ & \left. * \left[ (53,38\pi)^3 \frac{T_C^3}{r^3 m^3} \frac{z\gamma_C}{P} \sqrt{\frac{z\gamma_C}{P}} t \right] \right] \right\}^2 * \\ * [\exp(-t / \tau_x)]^2 & \left\{ 1 - \exp\left( \begin{aligned} & \left[ \left[ \left[ 53,38\pi \frac{T_C}{rm} \sqrt{\frac{z\gamma_C}{P}} \right]^3 t \right] * \right. \right. \\ & \left. \left. * \left[ \frac{k_1 U_0 \exp(-t_1 / R_1 C_1)}{g} + 2\varepsilon J_P \right] \right] \right) \right\} * \\ * \left\{ 1 - \exp\left( \begin{aligned} & \left[ 53,38\pi \frac{\sqrt{MT_C}}{r} \right]^3 \right. \\ & \left. k_1 U_0 \exp(-t_1 / R_1 C_1) t / m^3 g \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

**Висновок.** У результаті теоретичних досліджень встановлено, що реперний сигнал залежить не тільки від амплітуди електричного збуджуючого сигналу, але й від електричних параметрів ПЕЕ як активний опір, ємність та індуктивність; механічних параметрів мембрани УЗП як жорсткість, пружність, маса тощо; лінійного відхилення мембрани, яка залежить від її матеріалу, діаметра, товщини та інших, а також від параметрів газового середовища як ступінь поглинання, тертя газового середовища, яке залежить від тиску та температури газового середовища, густини й складу.

**Список літератури:** 1. Стенцель Й.І., Томсон А.В., Рябіченко А.В. Математичні моделі ультразвукових рівнемірів рідин. МНТЖ „Вимірювальна та обчислювальна техніка в технологічних процесах. – Хмельницький, 2006. №2 (28). – с.55-58. 2. Бабинов О.И. Контроль уровня с помощью ультразвука. – Л.: Энергия, 1971. – 98 с. 3. Жданкин В.К. Ультразвуковые датчики для систем управления: [статья] // Современные технологии автоматизации. – М.: СТА-ПРЕСС, 2003. - №1. – С. 68 – 79; №4. – С. 48 – 62. 4. Рябіченко А.В., Стенцель Й.І. Математичні моделі ультразвукового рівнеміра рідини з компенсатором вихідних сигналів // Вісник національного технічного університету «ХП». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Прилади та методи неруйнівного контролю. – Харків: НТУ «ХП» - № 48. – 2008. – с. 61-65.

Поступила в редколегію 25.04.11