

Ю.А. СИРОТИН, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПИ»

АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В ТРЕХПРОВОДНОЙ СХЕМЕ

Для трипроводной схемы предложен метод ортогонального разложения синусоидального тока на энергетические компоненты, связанные с активной, реактивной и разбалансированной мощностью. Приведенные примеры показывают, что даже при симметричном напряжении понятие сбалансированной и симметричной нагрузки не тождественны. Это подтверждает его ценность для анализа схем и синтеза компенсаторов с необходимыми энергетическими свойствами.

Для трехпроводной схемы предложен метод ортогонального разложения синусоидального тока на энергетические компоненты, которые связаны с активной, реактивной и разбалансированной мощностью. Приведенные примеры показывают, что даже при симметричном напряжении понятие сбалансированной и симметричной нагрузки не тождественны. Это подтверждает его ценность для анализа схем и синтеза компенсаторов с необходимыми энергетическими свойствами.

For three-wire circuits proposed the method of orthogonal decomposition of current on the energy component associated with the active, reactive and unbalanced power. Given examples show that even under a symmetrical voltage notion of balance and symmetrical load is not identical. This confirms its usefulness for circuit analysis and synthesis of compensators with the required energy properties

Мгновенная мощность (ММ), поставляемой энергии в нагрузку, подключенную по трехпроводной схеме (трехпроводную нагрузку), не зависит от выбора точки отсчета фазных напряжений (инвариантна). Это позволяет выбрать точку отсчета (искусственную точку заземления [1,2]) так, чтобы трехфазное напряжение не содержало последовательности нулевой составляющей (например, центр симметричной звезды, параллельно подключенной к рассматриваемой нагрузке). При синусоидальных токах и напряжениях все энергетические процессы полностью определены векторами комплексных действующих величин (д.в.) трехфазного мгновенного тока и напряжения. Так как эти токи и напряжения не содержат нулевой составляющей, то их вектора комплексных д.в. содержатся в одном и том же двумерном подпространстве [3]. Это позволяет для описания энергетических процессов применить геометрические понятия векторных пространств (скалярное и векторное произведение, коллинеарность, проекцию одного вектора на другой вектор, понятие базиса и т.д.) [4].

В статье выполнен математический анализ энергетических процессов в месте подключения трехпроводной линейной нагрузки к сети с

несимметричным синусоидальным напряжением. Показано как из полного трехфазного тока выделить ортогональные трехфазные компоненты тока, имеющие однозначный энергетический смысл (связанный с активной, реактивной и несбалансированной мощностью) и получить уравнение мощности. Анализ выполнен в фазных и симметричных координатах. Симметричные координаты вводятся с помощью ортогонального базиса, что позволяет получить матрицы модифицированного преобразования Фортесью [3]. Такие матрицы сохраняют скалярное произведение (длины и углы), все мощности инвариантны относительно таких преобразований. Полученные соотношения конкретизированы для нагрузки типа треугольник. Приведены примеры

Энергетические процессы в трёхпроводном сечении $\langle a, b, c \rangle$. В точке подключения 3-проводной нагрузки к распределительной сети с несимметричным напряжением в трёхпроводном сечении $\langle a, b, c \rangle$

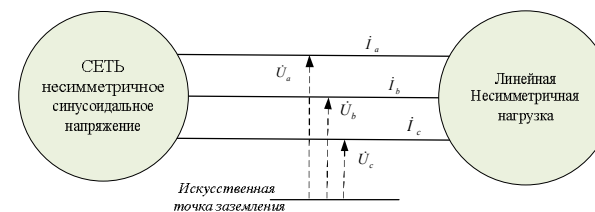


Рис. 1 – Трёхфазная трёхпроводная система

с синусоидальными процессами, мгновенные значения напряжения и тока

$$\mathbf{u}(t) = (u_a(t), u_b(t), u_c(t))^T = \sqrt{2} \Re e [\mathbf{U} e^{j\omega t}], \quad (1)$$

$$\mathbf{i}(t) = (i_a(t), i_b(t), i_c(t))^T = \sqrt{2} \Re e [\mathbf{I} e^{j\omega t}] \quad (2)$$

однозначно определены трехмерными комплексными векторами (3D-комплексами):

$$\mathbf{U} = [\dot{U}_a, \dot{U}_b, \dot{U}_c]^T = [U_a e^{j\varphi_a}, U_b e^{j\varphi_b}, U_c e^{j\varphi_c}]^T, \quad (3.a)$$

$$\mathbf{I} = [\dot{I}_a, \dot{I}_b, \dot{I}_c]^T = [I_a e^{j\varphi_a}, I_b e^{j\varphi_b}, I_c e^{j\varphi_c}]^T \quad (3.b)$$

– комплексными действующими величинами (д.в.) напряжения и тока (фазорами).

$$\mathbf{U} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \mathbf{u}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad \mathbf{I} = \frac{\sqrt{2}}{T} \int_0^T \mathbf{i}(t) e^{-j\omega t} dt, \quad (4)$$

где \top – знак транспонирования, T – период ($T\omega=2\pi$).

Для трехпроводной линейной нагрузки линейные токи (2) не содержат составляющую нулевой последовательности (первый закон Кирхгофа) и, следовательно, вектор линейных токов (3.б) ортогонален орту $\mathbf{e}_0 = (1,1,1)/\sqrt{3}$ нулевой последовательности

$$(\mathbf{I}, \mathbf{e}_0) = \mathbf{I}^\top \mathbf{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\dot{I}_a + \dot{I}_b + \dot{I}_c) = 0.$$

Вектор фазных напряжений, измеренный относительно искусственной точки заземления (Рис.2), также ортогонален орту нулевой последовательности

$$(\mathbf{U}, \mathbf{e}_0) = \mathbf{U}^\top \mathbf{e}_0 = \frac{1}{\sqrt{3}} (\dot{U}_a + \dot{U}_b + \dot{U}_c) = 0.$$

Таким образом, и вектор (3.а) и вектор (3.б) принадлежат двумерному подпространству 3D-комплексов

$$\{ \mathbf{F} : (\mathbf{F}, \mathbf{e}_0) = \mathbf{F}^\top \cdot \mathbf{e}_0 = 0 \}, \quad (5)$$

которое ортогонально орту нулевой последовательности ($\mathbf{F}^\top \mathbf{e}_0 = 0$), а сами процессы двумерны.

Если вектор напряжений $\mathbf{U}_0 = (\dot{U}_{0a}, \dot{U}_{0b}, \dot{U}_{0c})^\top$, измеряется относительно произвольной точки O то из него «исключается» нулевая последовательность с помощью процедуры приведения

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_0 - \dot{U}_0 \mathbf{e}_0. \quad (6)$$

Здесь $\dot{U}_0 = (\mathbf{U}_0, \mathbf{e}_0) = (\dot{U}_{0a} + \dot{U}_{0b} + \dot{U}_{0c})/\sqrt{3}$ – проекция вектора \dot{U}_0 на орт \mathbf{e}_0 .

Мгновенная и комплексная мощность. Средняя (активная) мощность за интервал наблюдения $[\tau, \tau + T]$

$$P = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} p(t) dt = \frac{1}{T} \int_\tau^{\tau+T} \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{i}(t) dt \quad (7)$$

определена мгновенной мощностью

$$p(t) = \mathbf{u}(t)^\top \mathbf{i}(t) = u_a(t)i_b(t) + u_b(t)i_b(t) + u_c(t)i_c(t). \quad (8)$$

В синусоидальном режиме активную мощность (8) можно вычислить как реальную часть $P = \Re e \dot{S}$ комплексной мощности (КМ)

$$\dot{S} = \mathbf{U}^\top \mathbf{I}^* = \dot{U}_a I_a^* + \dot{U}_b I_b^* + \dot{U}_c I_c^*, \quad \dot{S} = P + jQ. \quad (9)$$

Здесь знак * – операция комплексного сопряжения.

Квадратурные составляющие комплексной мощности

$$\dot{S} = P + jQ = \dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c$$

заданы мощностями фаз

$$P = \Re e \dot{S} = P_a + P_b + P_c, \quad Q = \Im m \dot{S} = Q_a + Q_b + Q_c \quad (10)$$

В комплексном пространстве 3D-комплексов определено стандартное комплексное скалярное произведение [4] и КМ (9) равна комплексному скалярному произведению векторов напряжения и тока

$$\dot{S} = \mathbf{U}^\top \mathbf{I}^* = (\mathbf{U}, \mathbf{I}), \quad \mathbf{S}^* = \mathbf{I}^\top \mathbf{U}^* = (\mathbf{I}, \mathbf{U}). \quad (11)$$

Сбалансированная компонента тока. Действующие величины 3-фазных синусоидальных токов и напряжений (1-2) равны нормам 3D-комплексов тока и напряжения

$$|\mathbf{i}| = I = |\mathbf{I}| = \sqrt{|\dot{I}_a|^2 + |\dot{I}_b|^2 + |\dot{I}_c|^2}, \quad (12.a)$$

$$|\mathbf{u}| = U = |\mathbf{U}| = \sqrt{|\dot{U}_a|^2 + |\dot{U}_b|^2 + |\dot{U}_c|^2} \quad (12.б)$$

В трёхпроводном сечении $\langle a, b, c \rangle$ между полной мощностью по Бухгольцу [5]

$$S_B = |\mathbf{U}| \cdot |\mathbf{I}| = U \cdot I \quad (13)$$

и геометрической мощностью [6,7]

$$S_G = |(\mathbf{U}, \mathbf{I})| = |\dot{S}_a + \dot{S}_b + \dot{S}_c| \quad (14)$$

справедливо неравенство (Коши–Шварца)

$$|\mathbf{U} \parallel \mathbf{I}| \geq |\mathbf{I}^\top \mathbf{U}^*|, \quad S_B \geq S_G. \quad (15)$$

Равенство в (15) достигается тогда и только тогда когда вектор тока и напряжения (комплексно) коллинеарны ($\mathbf{I} \parallel \mathbf{U}$)

$$|\mathbf{U} \parallel \mathbf{I}| = |\mathbf{I}^\top \mathbf{U}^*| \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\dot{I}_a}{\dot{U}_a} = \frac{\dot{I}_b}{\dot{U}_b} = \frac{\dot{I}_c}{\dot{U}_c}. \quad (16)$$

При выполнении (16) будем говорить, что ток (комплексно) сбалансирован с напряжением. Если ток не сбалансирован с напряжением, то проекция вектора тока на вектор напряжения, определяет компоненту тока \mathbf{I}_b , не совпадающую с полным током

$$\mathbf{I}_b = \frac{(\mathbf{I}, \mathbf{U})}{|\mathbf{U}|^2} \mathbf{U} = \frac{S^*}{|\mathbf{U}|^2} \mathbf{U} = \dot{Y}_b \mathbf{U}, \quad \mathbf{I}_b \neq \mathbf{I}. \quad (17)$$

Компонента вектора тока (17) коллинеарна напряжению ($\mathbf{I}_b \parallel \mathbf{U}$) и определяет трехфазный ток $i_b(t) = \sqrt{2} \Re e[\mathbf{I}_b e^{j\omega t}]$ - ток баланса с такой же формой кривой как у напряжения (1). Комплексное число

$$\dot{Y}_b = G_b + jB_b = \frac{P}{U^2} - j \frac{Q}{U^2} \quad (18)$$

определяет эквивалентную проводимость тока баланса.

Ток баланса [2,5] имеет однозначный энергетический смысл: «При заданном напряжении ток баланса определяет ток, который, среди всех токов, которые могут поставлять в нагрузку энергию с такой же комплексной мощностью, что и полный ток, имеет минимальную д.в.»

$$(\mathbf{U}, \mathbf{I}_b) = (\mathbf{U}, \mathbf{I}) = \dot{S}; \quad |\mathbf{I}_b| < |\mathbf{I}|.$$

Точнее, такую же активную мощность $P = \Re e[\dot{S}]$ при заданном фазовом сдвиге между током и напряжением, равном $\arctg(B_b/G_b) = -\arctg(Q/P)$.

Для любой трехфазной нагрузки в сечении $\langle a, b, c \rangle$ справедливо ортогональное разложение

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_b + \underbrace{(\mathbf{I} - \mathbf{I}_b)}_{\mathbf{I}_u} = \mathbf{I}_b + \mathbf{I}_u, \quad \mathbf{I}_b \perp \mathbf{I}_u. \quad (19)$$

Компонента вектора тока $\mathbf{I}_u = \mathbf{I} - \mathbf{I}_b$ определяет ортогональное дополнение ($\mathbf{I}_u \perp \mathbf{U}$). Ток этой компоненты будем называть *током небаланса*. Можно показать, что для вектора тока небаланса справедливо выражение [4]

$$\mathbf{I}_u = \mathbf{I} - \mathbf{I}_b = \frac{(\mathbf{U} \times \mathbf{I}) \times \mathbf{U}^*}{|\mathbf{U}|^2}. \quad (20)$$

Векторное произведение комплексных векторов

$$\mathbf{U} \times \mathbf{I} = [\dot{U}_b \dot{I}_c - \dot{U}_c \dot{I}_b, \dot{U}_c \dot{I}_a - \dot{U}_a \dot{I}_c, \dot{U}_a \dot{I}_b - \dot{U}_b \dot{I}_a]^\top \quad (21)$$

вычисляется подобно векторному произведению обычных трехмерных векторов с вещественными координатами. Выражение (21) определяет вектор мощности небаланса $\mathbf{D} = \mathbf{U} \times \mathbf{I}$ [4]; Здесь $\mathbf{U}^* = (U_a^*, U_b^*, U_c^*)^\top$ - комплексно-сопряженный вектор напряжений.

Таким образом, условия: равенство нулю тока небаланса, коллинеарность векторов тока и напряжения и совпадение формы кривых тока и напряжения эквивалентны

$$\mathbf{I}_u = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} \parallel \mathbf{U} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = \dot{Y}_b \mathbf{U}. \quad (22)$$

При выполнении (22) будем говорить, что нагрузка комплексно сбалансирована. Если проводимость тока баланса (18) чисто активная $\dot{Y}_b = G_b$ (чисто реактивная $\dot{Y}_b = jB_b$), то будем говорить, что нагрузка активно (реактивно) сбалансирована

При этом, активно-сбалансированная нагрузка (даже при симметричном напряжении) может быть не только несимметричной, но и содержать реактивные элементы (как в схеме симметризации Штейнитца [8], см. также пример 2).

Уравнение мощности.

Так как $I_b \perp I_u$ то, для введенных токов, справедлива теорема Пифагора

$$|I_b|^2 + |I_u|^2 = |I|^2, \quad I_b^2 + I_u^2 = I^2. \quad (23)$$

Умножение (23) на квадрат $\partial.в.$ напряжения приводит к уравнению мощности

$$S_B^2 = S_G^2 + D_u^2, \quad (24)$$

где

$S_G = |I_b| \cdot |U| = I_b \cdot U$ - ранее определенная геометрическая мощность, обусловленная током баланса,

$D_u = |I_u| \cdot |U| = I_u \cdot U$ - мощность небаланса (определена как произведение $\partial.в.$ напряжения и $\partial.в.$ тока небаланса).

Проводимость тока баланса (18) определяет разложение вектора тока баланса

$$I_b = I_a + I_r = G_b U + jB_b U \quad (25)$$

на две компоненты: вектор *активного тока* и вектор *реактивного тока*:

$$I_a = G_b U = \frac{P}{|U|^2} U, \quad I_r = B_b U = \frac{-jQ}{|U|^2} U. \quad (26)$$

Имеем выражения для вычисления мощностей соответствующих $\partial.в.$ энергетических компонент тока (активного, реактивного и несбалансированного)

$$P = U \cdot I_a, \quad Q = \text{sign}(Q) \cdot U \cdot I_r, \quad D_u = U \cdot I_u \quad (27)$$

Здесь

$$\text{sign}(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

- функция знака.

Поэтому уравнения для токов (26) и мощностей (10)

$$I_u^2 = I_a^2 + I_r^2 \quad \Leftrightarrow \quad S_G^2 = P^2 + Q^2 \quad (28)$$

равносильны.

Подстановка (28) в (24) дает уравнение мощности (квадратичное разложение полной мощности)

$$S_B^2 = P^2 + Q^2 + D_u^2 \quad (29)$$

Коэффициент мощности

$$\lambda^2 = \lambda_p^2 = \frac{P^2}{S_B^2} = \frac{I_a^2}{I_a^2 + I_r^2 + I_u^2} \quad (30)$$

равен единице только, если полный ток равен активному току. При этом нагрузка со стороны источника «видна» как чисто активная и симметричная (дополнительные потери отсутствуют).

Базис симметричных координат

Для трехпроводной нагрузки произвольный 3D-комплекс F , характеризующий энергетические процессы в ней (в частности вектор напряжений и вектор полного тока и вектора введенных токов баланса (17) и небаланса (20), активного и реактивного (26) тока), ортогонален орту нулевой последовательности, и принадлежит двумерному подпространству (5). Соответствующий энергетический процесс $f(t) = \sqrt{2} \Re e[F e^{j\omega t}]$ не содержит нулевой последовательности (двумерен).

Если 3D-комплекс удовлетворяет условию (5), то он однозначно раскладывается по ортам [3]

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha^* \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \\ \alpha^* \end{pmatrix} \quad (31)$$

прямой и обратной последовательности ($\alpha = e^{j2\pi/3}$). При этом

$$1 + \alpha + \alpha^* = 0, \quad \alpha^2 = \alpha^*, \quad \alpha \alpha^* = 1 \quad (32)$$

Справедлива импликация

$$(F, e_0) = F^T e_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad F = \dot{F}_1 e_1 + \dot{F}_2 e_2. \quad (33)$$

Так как орты (31) образуют ортонормированный базис

$$(\mathbf{e}_l, \mathbf{e}_m) = \mathbf{e}_l^\top (\mathbf{e}_m)^* = \begin{cases} 1, & l = m \\ 0, & l \neq m \end{cases}, \quad (34)$$

то

$$\dot{F}_k = (\mathbf{F}, \mathbf{e}_k) = \mathbf{F}^\top \mathbf{e}_k^*, \quad (k=1,2). \quad (35)$$

Матрицы преобразований между фазными и симметричными координатами

3D-вектор напряжения и тока в симметричных координатах

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 = \dot{I}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{I}_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 + \mathbf{U}_2 = \dot{U}_1 \mathbf{e}_1 + \dot{U}_2 \mathbf{e}_2 \quad (36)$$

запишем в векторно-матричной форме

$$\mathbf{I} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{U} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}, \quad (37)$$

где

$$[\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha^* & \alpha \\ \alpha & \alpha^* \end{bmatrix} = \mathcal{F}_0 \quad (38)$$

- усеченная матрица [9] модифицированной матрицы преобразования Фортексю [10]

$$\mathcal{F} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \mathbf{e}_0] = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha^* & \alpha \\ 1 & \alpha & \alpha^* \end{bmatrix}. \quad (39)$$

Обозначим вектор координат прямой и обратной последовательности тока и напряжений

$$\tilde{\mathbf{I}} = [\dot{I}_1, \dot{I}_2]^\top, \quad \tilde{\mathbf{U}} = [\dot{U}_1, \dot{U}_2]^\top. \quad (40)$$

Тогда в компактном виде выражения (36) запишутся как

$$\mathbf{I} = \mathcal{F}_0 \tilde{\mathbf{I}}, \quad \mathbf{U} = \mathcal{F}_0 \tilde{\mathbf{U}}. \quad (41)$$

Эрмитово-сопряженная матрица

$$\mathcal{F}_0^H = (\mathcal{F}_0^\top)^* = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^\top \\ \mathbf{e}_1^\top \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha^* \\ 1 & \alpha^* & \alpha \end{bmatrix} \quad (42)$$

определяет обратное преобразование из фазовых координат в симметричные координаты

$$\tilde{\mathbf{I}} = \mathcal{F}_0^H \mathbf{I}, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \mathcal{F}_0^H \mathbf{U} \quad (43)$$

Знак H обозначает последовательное выполнение операций * - комплексного сопряжения и \top -транспонирования (в любом порядке)

Так как базис (31) ортонормирован (33), то произведение матриц (37) и (41) дает единичную матрицу 2-порядка.

$$\mathcal{F}_0^H \cdot \mathcal{F}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^\top \\ \mathbf{e}_1^\top \end{bmatrix} \cdot [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^\top \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^\top \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^\top \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (44)$$

Матрица (39) ортогональная и поэтому сохраняет скалярное произведение векторов и их коллинеарность. Поэтому, ток баланса инвариантен относительно преобразований (38) и (42).

$$\tilde{\mathbf{I}}_b = \mathcal{F}_0^H \mathbf{I}_b = \dot{Y}_b \mathcal{F}_0^H \mathbf{U} = \dot{Y}_b \tilde{\mathbf{U}}$$

Отметим, что если напряжение симметрично (прямой последовательности $\mathbf{U} = \mathbf{U}_1 = \dot{U}_1 \mathbf{e}_1$), то ток баланса совпадает с током прямой последовательности, а ток небаланса совпадает с током обратной последовательности

$$\mathbf{U} = \dot{U}_1 \mathbf{e}_1 \Rightarrow \mathbf{I}_b = \mathbf{I}_1 = \dot{I}_1 \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{I}_u = \mathbf{I}_2 = \dot{I}_2 \mathbf{e}_2.$$

Так как при этом $\mathbf{I}_u = (\Re \dot{I}_1) \cdot \mathbf{e}_1$, $\mathbf{I}_r = (\Im \dot{I}_1) \cdot \mathbf{e}_1$, то дополнительно к введенной ранее проводимости тока баланса можно ввести и проводимость тока небаланса, которые при симметричном напряжении совпадают с проводимостями прямой и обратной последовательности

$$\dot{Y}_b = \dot{I}_1 / \dot{U}_1, \quad \dot{Y}_u = \dot{I}_2 / \dot{U}_1. \quad (45)$$

При несимметричном напряжении это не верно.

Энергетические процессы в Δ -нагрузке

Применим полученные результаты для нагрузки типа треугольник (Δ -нагрузки, Рис.1).

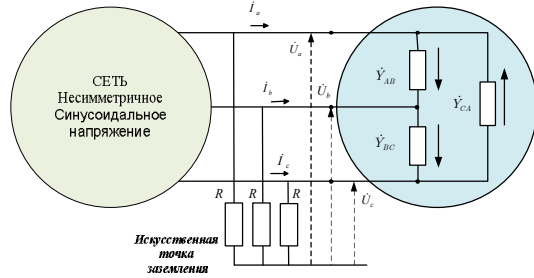


Рис.2 – Трехфазная система с Δ -нагрузкой

Для векторов межфазных токов и напряжений Δ -нагрузки

$$\mathbf{I}_{\Delta} = (\dot{I}_{ab}, \dot{I}_{bc}, \dot{I}_{ca})^T, \quad \mathbf{U}_{\Delta} = (\dot{U}_{ab}, \dot{U}_{bc}, \dot{U}_{ca})^T \quad (46)$$

справедливо векторно-матричное соотношение

$$\mathbf{I}_{\Delta} = \mathcal{Y}_{\Delta} \mathbf{U}_{\Delta}, \quad (47)$$

– обобщенный закона Ома для межфазных координат. Здесь

$$\mathcal{Y}_{\Delta} = \text{diag}\{\dot{Y}_{AB}, \dot{Y}_{BC}, \dot{Y}_{CA}\} \quad (48)$$

диагональная матрица межфазных проводимостей.

Для выбранных направлений токов между токами в линиях и межфазовыми токами (Рис.2) в узлах подключения нагрузки справедливы соотношения

$$\begin{aligned} \dot{I}_A &= \dot{I}_{ab} - \dot{I}_{ca} \\ \dot{I}_B &= \dot{I}_{bc} - \dot{I}_{ab} \\ \dot{I}_C &= \dot{I}_{ca} - \dot{I}_{bc} \end{aligned}, \quad \mathbf{I} = \mathcal{M} \mathbf{I}_{\Delta}, \quad (49)$$

где матрица инцидентности Δ нагрузки (связи межфазных ветвей в узлы)

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (50)$$

определена для выбранных направлений ветвей (токов).

Из второго закона Кирхгофа следует, что межфазные и фазными величины напряжения связаны соотношения

$$\begin{aligned} \dot{U}_{ab} &= \dot{U}_a - \dot{U}_b \\ \dot{U}_{bc} &= \dot{U}_b - \dot{U}_c \\ \dot{U}_{ca} &= \dot{U}_c - \dot{U}_a \end{aligned} \quad \mathbf{U}_{\Delta} = \mathcal{M}^T \mathbf{U} \quad (51)$$

где \mathcal{M}^T – матрица, транспонированная к \mathcal{M} .

Для векторов линейных токов (3.a) и узловых напряжений (3.b) справедлив обобщенный закон Ома

$$\mathbf{I} = \mathcal{Y} \mathbf{U} \quad (52)$$

Матрица узловых проводимостей Δ -нагрузки

$$\mathcal{Y} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{CA} & -\dot{Y}_{AB} & -\dot{Y}_{CA} \\ -\dot{Y}_{AB} & \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{CB} & -\dot{Y}_{CB} \\ -\dot{Y}_{CA} & -\dot{Y}_{CB} & \dot{Y}_{CA} + \dot{Y}_{CB} \end{bmatrix} \quad (53)$$

вычисляется прямым перемножением задающих ее матриц $\mathcal{Y} = \mathcal{M} \mathcal{Y}_{\Delta} \mathcal{M}^T$.

Обобщенный закон Ома в симметричных координатах.

Подстановка (40) в закон Ома для Δ нагрузки (52) дает

$$\mathcal{F}_0 \tilde{\mathbf{I}} = \mathcal{Y} \mathcal{F}_0 \tilde{\mathbf{U}}. \quad (54)$$

Умножим выражение (55) слева на \mathcal{F}_0^H . Из (44) следует

$$\tilde{\mathbf{I}} = \underbrace{\mathcal{F}_0^H \mathcal{Y} \mathcal{F}_0}_{\tilde{\mathcal{Y}}} \tilde{\mathbf{U}} \quad , \quad \tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathcal{Y}} \cdot \tilde{\mathbf{U}} \quad . \quad (55)$$

Найдем коэффициенты матрицы (второго порядка) узловых проводимостей в симметричных координатах

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^\top \\ \mathbf{e}_1^\top \end{bmatrix} \cdot \mathcal{Y} \cdot [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_2^\top \mathcal{Y} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^\top \mathcal{Y} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_1^\top \mathcal{Y} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_1^\top \mathcal{Y} \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (56)$$

Из векторно-матричных соотношений

$$\mathbf{M}^\top \mathbf{e}_1 = \sqrt{3} e^{j\pi/6} \mathbf{e}_1 \quad , \quad \mathbf{M}^\top \mathbf{e}_2 = \sqrt{3} e^{-j\pi/6} \mathbf{e}_2 \quad . \quad (57)$$

следует

$$\tilde{\mathcal{Y}} = \begin{bmatrix} 3\mathbf{e}_2^\top \mathcal{Y}_\Delta \mathbf{e}_1 & e^{-j\pi/3} 3\mathbf{e}_2^\top \mathcal{Y}_\Delta \mathbf{e}_2 \\ e^{j\pi/3} 3\mathbf{e}_1^\top \mathcal{Y}_\Delta \mathbf{e}_1 & 3\mathbf{e}_1^\top \mathcal{Y}_\Delta \mathbf{e}_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Окончательно для элементов матрицы (57) имеем

$$\dot{Y}_{11} = \dot{Y}_{22} = \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{CA} \quad , \quad (59.a)$$

$$\dot{Y}_{21} = e^{j\pi/3} \dot{Y}_{AB} - \dot{Y}_{BC} + e^{-j\pi/3} \dot{Y}_{CA} \quad , \quad (59.б)$$

$$\dot{Y}_{12} = e^{-j\pi/3} \dot{Y}_{AB} - \dot{Y}_{BC} + e^{j\pi/3} \dot{Y}_{CA} \quad . \quad (59.в)$$

Таким образом, при *несимметричном* напряжении линейные токи и фазовые (узловые) напряжения в симметричных координатах связаны векторно-матричным соотношением

$$\tilde{\mathbf{I}} = \tilde{\mathcal{Y}} \tilde{\mathbf{U}} \quad , \quad \begin{bmatrix} \dot{I}_1 \\ \dot{I}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{Y}_{11} & \dot{Y}_{12} \\ \dot{Y}_{21} & \dot{Y}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} \quad . \quad (60)$$

Если напряжение *симметрично*, то

$$\dot{I}_1 = Y_{11} \dot{U}_1 \quad , \quad \dot{I}_2 = Y_{21} \dot{U}_1 \quad . \quad (61)$$

Тем самым, при симметричном напряжении введенные ранее проводимости (45) тока баланса и небаланса можно вычислить через межфазные проводимости

$$\dot{Y}_b = \dot{Y}_{11} = \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{CA} \quad (61.a)$$

$$\dot{Y}_u = \dot{Y}_{21} = e^{-j\pi/3} (\dot{Y}_{AB} + \alpha \dot{Y}_{BC} + \alpha^* \dot{Y}_{CA}) \quad (62.б)$$

Коэффициент мощности при симметричном напряжении вычисляется через эти проводимости

$$\lambda^2 = \frac{I_a^2}{I_a^2 + I_r^2 + I_u^2} = \frac{(\Re \dot{Y}_b)^2}{Y_b^2 + Y_u^2} \quad (63)$$

Примеры. Все примеры сбалансированных нагрузок рассмотрены для *симметричного* напряжения.

Пример 1. Симметризатор-компенсатор Steinmetz [8].

Схема Штейнитца симметризует одноплечевую нагрузку с активной проводимостью G_{AB} путем добавления в два остальных плеча индуктивности и емкости, так что Δ – нагрузка, определена межфазными проводимостями

$$\dot{Y}_{AB} = G_{AB} \quad , \quad \dot{Y}_{BC} = j G_{AB} / \sqrt{3} \quad , \quad \dot{Y}_{CA} = -j G_{AB} / \sqrt{3} \quad .$$

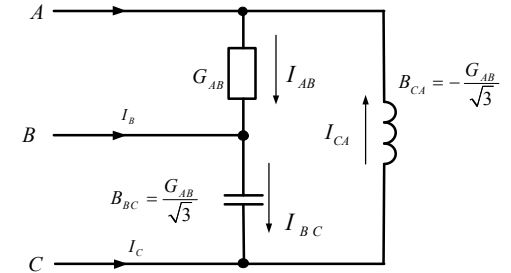


Рис.3 – Схема симметризации Штейнитца

Проводимость тока баланса чисто активная и совпадает с активной проводимостью плеча AB . $\dot{Y}_b = G_{AB}$. Проводимость тока небаланса равна нулю, так как $\dot{Y}_{AB} + \alpha \dot{Y}_{BC} + \alpha^* \dot{Y}_{CA} = G_{AB} \{1 + j(\alpha - \alpha^*)/\sqrt{3}\} = 0$.

Нагрузка схемы Штейнитца активно сбалансирована.

Пример 2. Реально сбалансированная нагрузка.

Δ – нагрузка (Рис.4.) задана межфазными проводимостями

$$\dot{Y}_{AB} = e^{-j30^\circ} \quad , \quad \dot{Y}_{BC} = e^{j30^\circ} \quad , \quad \dot{Y}_{CA} = 0 \quad .$$

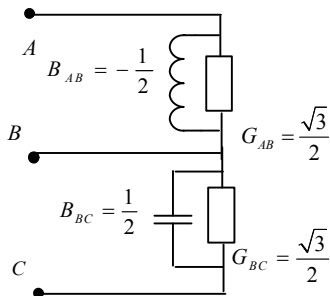


Рис.4 – Реально-сбалансированная нагрузка

Проводимость тока баланса чисто активная $\dot{Y}_b = \dot{Y}_{AB} + \dot{Y}_{BC} + \dot{Y}_{CA} = 2 \cos 30^\circ = 1$. Проводимость тока небаланса равна нулю $\dot{Y}_u = e^{j60^\circ} \dot{Y}_{AB} - \dot{Y}_{BC} + e^{j60^\circ} \dot{Y}_{CA} = 0$.

Также как и в схеме Штейнметца полный ток совпадает с активным током ($\lambda = 1$). Не смотря на то, что нагрузка несимметрична и имеет реактивные элементы, она со стороны источника «видна» как чисто активная и симметричная (как реально сбалансированная).

Если схема Штейнметца является схемой полной компенсации реактивного и неуравновешенного тока для одноплечевой нагрузки, то схема (Рис.4) является схемой полной компенсации для двухплечевой активной нагрузки.

Пример 3. Комплексно сбалансированная нагрузка.

Межфазные проводимости равны $\dot{Y}_{AB} = e^{j30^\circ}$, $\dot{Y}_{BC} = j = e^{j90^\circ}$, $\dot{Y}_{AC} = 0$.

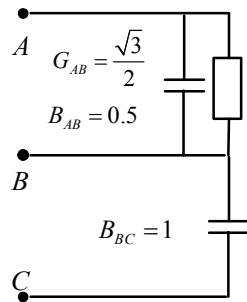


Рис. 5 – Комплексно-сбалансированная нагрузка

Проводимость тока баланса комплексная и равна: $\dot{Y}_b = \sqrt{3}e^{j60^\circ}$, $G_b = \sqrt{3}/2$, $B_b = j3/2$. Нагрузка комплексно-сбалансирована $I = I_b = \dot{Y}_b U$, однако реально не сбалансирована ($B_b \neq 0$). Между полным (сбалансированным) током и напряжением имеется фазовый сдвиг $\varphi = \arccos(P/S_G) = 60^\circ$, который оценивается коэффициентом мощности $\lambda = P/S_G = G_b/Y_b = 0.5$.

Различные примеры сбалансированных и разбалансированных нагрузок при несимметричном напряжении представлены в [11].

Выводы

1. Для трехпроводной нагрузки в синусоидальном несбалансированном режиме проведен математический анализ энергетических процессов, связанных с активной, реактивной мощностью и мощностью небаланса.

2. Показано, как корректно ввести векторное двумерное пространство и ортонормированный базис симметричных компонент для такого анализа.

3. Приведенные примеры показывают, что сбалансированная Δ -нагрузка может быть несимметричной, а предложенный анализ применим для синтеза Δ -компенсаторов с требуемыми энергетическими характеристиками.

Список литературы: 1. Зевеке Г.В. Основы теории цепей / Г.В. Зевеке, П.А. Ионкин. – М. - Л. : «Госэнергоиздат», 1955.–216с. 2. Czarnecki L. S. Powers of asymmetrically supplied loads in terms of the CPC power theory / L. S. Czarnecki // Electrical Power Quality and Utilization Journal. – 2007. – Vol. XIII.–No.1.–P.–97–103. 3. Sirotin Iu. A. LC – Fryze’s compensator under asymmetrical voltage / Iu. A. Sirotin // Proceed. of the 10-th Conference-Seminar, ISNCC-2010,–Lagow, Poland. – 2010. – P. 160-165. [Электронный ресурс]. – Режим доступа : <http://www.isncc2010.iee.uz.zgora.pl/html/program.html>. 4. Сиротин Ю. А. Сбалансированная и разбалансированная составляющие тока в трехфазной системе / Ю. А. Сиротин // Вестник ПДТУ. – 2008. – Вип.18.– С. 81-87 [Электронный ресурс]. – Режим доступа: www.nbu.gov.ua/portal/Natural/VPDTU/2008_18_2/C2/18.pdf. 5. Buchholz F. Die Drehstrom-Scheinleistung bei ungleich-mepiger Belastung drei Zweige / F. Buchholz // Licht und Kraft. – 1922.– no. 2.– P. 9-11. 6. Emanuel A. On the definition of power factor and apparent power in unbalanced polyphase circuits with sinusoidal voltage and currents / A. Emanuel // IEEE Trans. Power Del. – 1993.– Vol.8, no.3. – P. 841–852. 7. Emanuel A. E. On the physical meaning of nonactive powers in three-phase systems / Z. Cekareski, A.E Emanuel // Power Engineering Review IEEE. – 1999. – Vol.19, no.7. – P. 46-47. 8. Steinmetz C. P. Lectures on Electrical Engineering / C. P. Steinmetz. – New York: Dover, 1897. 9. Fortescue C.L. Method of symmetrical components as applied to the solution of polyphase networks / C.L Fortescue // Trans. AIEE. – 1918. – Vol. 37. – P.1027–1040. 10. Сиротин Ю. А. Схема симметризации Штейнметца как частный случай оптимального компенсатора Фризе / Ю. А. Сиротин // Электрика.– 2011.– №1. – С. 16 – 21. [Электронный ресурс].– Режим доступа: <http://www.kudrinbi.ru/public/20464/index.htm>. 11. Sirotin Iu. A. Fryze’s compensator and Fortescue transformation / Iu. A. Sirotin // Przegląd Elektrotechniczny (Electrical Review).– 2011. – Vol. 1. – P.101-106.

Поступила в редколлегию 30.09.2011