

УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук, А.Ю. ЮДИН, канд. техн. наук, ФАН КОНГ ТАМ

*Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,  
г. Харьков, Украина*

### **ОБТЕКАНИЕ ТРЕХМЕРНЫМ ПОТОКОМ РЕШЕТКИ ПРОФИЛЕЙ ТУРБОМАШИНЫ НА ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ**

Розглянута пряма задача про тривимірний потік в міжлопатковому каналі на поверхні течії, яка є поверхнею обертання, у шарі змінної товщини. Задача розглядається як така, що складається з незалежних задач розрахунку течії в окремих перетинах шару. Ці незалежні задачі можуть розв'язуватись як послідовно, одна за одною, так і одночасно.

The direct problem about the three-dimensional flow in the blade channel on the surface which is the general surface of revolution was researched. The problem is researched as the one that consists of the independent problems of the flow's calculation in the separated cross-section of the stream filament. These independent problems can be solved either one after another or simultaneously.

Впервые задача получения распределения скоростей и давлений в межлопаточном канале на поверхности вращения  $S_1$  в слое переменной толщины была исследована в работах [1, 2]. Для описания потока использовались только две проекции уравнения количества движения: проекции на осевое и окружное направления. Члены этих уравнений, содержащие производные в радиальном направлении, полагались известными из решения осесимметричной задачи, определяющей характер изменения параметров потока в радиальном направлении. То есть делалось допущение о том, что радиальная составляющая скорости и все производные в радиальном направлении являются однородными. Задача расчета потока на поверхности вращения была сформулирована как задача решения дифференциального уравнения в частных производных относительно функции тока. Функция тока задавалась в виде полиномов. Дальнейшее развитие этот метод получил во многих работах без изменения первоначальной формулировки задачи, но при более широком выборе методов ее решения.

Задачу расчета потока в слое переменной толщины на поверхности вращения  $S_1$  сформулируем следующим образом. Заданы: 1) массовый расход  $m$  через слой для одного канала; 2) полное давление  $p^*$  и полный удельный объем  $v^*$  перед каналом; 3) координаты границы стороны разрежения  $\varphi_s = \varphi_s(z)$  и границы стороны давления  $\varphi_p = \varphi_p(z)$ , где  $z$  – координатное направление, совпадающее с осью турбомашин. Найти в любой точке средней поверхности тока  $S_1$  слоя параметры рабочего тела.

Для описания трехмерного установившегося относительного движения идеального газа в слое переменной толщины на поверхности вращения  $S_1$  будем использовать следующую систему уравнений:

1) уравнение сохранения энергии

$$i_{w_1}^* = \frac{k}{k-1} p v + \frac{W^2}{2} + \frac{\Delta u^2}{2}; \quad (1)$$

2) уравнение изэнтропийного процесса

$$p v^k = \text{const}; \quad (2)$$

3) уравнение количества движения в форме Эйлера в проекциях на окружное, радиальное и осевое координатные направления  $\theta, r, z$  цилиндрической системы координат:

$$W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r = -v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (3)$$

$$W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u = -v \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4)$$

$$W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} = -v \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (5)$$

где  $\omega$  – угловая скорость, рад/с;

4) уравнение неразрывности [1]:

$$\frac{\partial(\tau \rho W_l r)}{\partial l} + \frac{\partial(\tau \rho W_u)}{\partial \theta} = 0, \quad (6)$$

где  $\tau = \tau(l)$  – нормальная толщина слоя;  $\rho$  – плотность рабочего тела;  $l$  – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль линии пересечения поверхности тока  $S_1$  с плоскостью  $\theta = \text{const}$ , то есть вдоль меридиана;  $W_l$  – проекция скорости потока на направление  $l$  (см. рисунок), причем  $W_l^2 = W_z^2 + W_r^2$ .

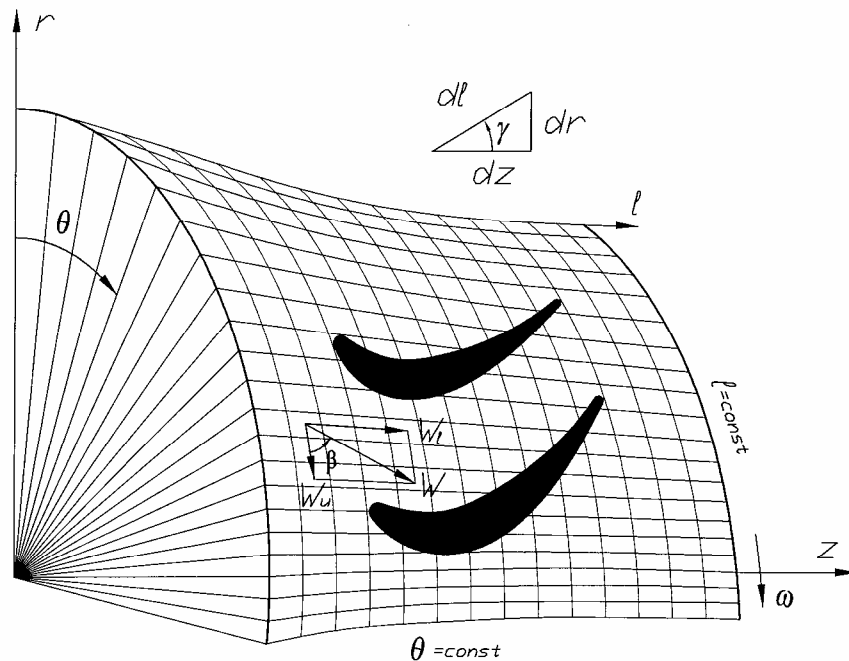


Рис. Ортогональная система координат ( $\theta, l$ )

Уравнение процесса (2) устанавливает однозначную связь между удельным объемом и давлением. Поэтому одну из этих величин можно не рассматривать как независимую переменную. В данной статье в качестве независимой переменной выбрано давление, а удельный объем будет определяться из изоэнтропического соотношения  $v = v^* \left( \frac{p^*}{p} \right)^{1/k}$ .

Если в приведенных выше уравнениях (1) – (6) полагать, что  $\omega = 0$ ,  $W = C$ ,  $\beta = \alpha$ ,  $i_{w_1}^* = i_{c_0}^*$ , то получим систему уравнений, описывающих обтекание неподвижной решетки на поверхности  $S_1$ .

Введем функцию тока  $\Psi = m\bar{\Psi}$  и уравнение неразрывности (6) заменим эквивалентной системой уравнений:

$$W_l = \frac{v}{\tau r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad W_u = -\frac{v}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l}, \quad \frac{W_u}{W_l} = \text{ctg} \beta = -\frac{\partial \Psi}{\partial l} \bigg/ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right), \quad (7)$$

где  $m$  – массовый расход через слой;  $\bar{\Psi}$  – безразмерная функция тока;  $\beta$  – угол потока на поверхности вращения  $S_1$ .

Перейдем от цилиндрической системы координат к системе ортогональных координат  $(\theta, l)$ . Для этого сначала воспользуемся соотношениями между производными скоростей в этих двух системах координат для преобразования проекций уравнения количества движения (3), (4) и (5):

$$\begin{aligned} W_l \frac{\partial W_l}{\partial l} &= W_z \frac{\partial W_z}{\partial l} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial l}, & \frac{\partial W_z}{\partial l} &= \frac{\partial W_z}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\partial W_z}{\partial r} \sin \gamma, \\ \frac{\partial W_r}{\partial l} &= \frac{\partial W_r}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\partial W_r}{\partial r} \sin \gamma, & \frac{\partial W_u}{\partial l} &= \frac{\partial W_u}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\partial W_u}{\partial r} \sin \gamma. \end{aligned}$$

А потом проекции уравнения количества движения на радиальное (4) и осевое (5) направления умножим на  $\sin \gamma$  и на  $\cos \gamma$  соответственно и сложим. После сложения

следует учесть, что  $\frac{\partial p}{\partial l} = \frac{\partial p}{\partial z} \cos \gamma + \frac{\partial p}{\partial r} \sin \gamma$ . В результате получим проекции уравнения количества движения на координатные направления  $\theta$  и  $l$  в следующем виде:

$$W_l \frac{\partial W_u}{\partial l} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{W_l W_u \sin \gamma}{r} + 2\omega W_l \sin \gamma = -v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (8)$$

$$W_l \frac{\partial W_l}{\partial l} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_l}{\partial \theta} - A \sin \gamma = -v \frac{\partial p}{\partial l}, \quad (9)$$

где 
$$A = \frac{W_u^2}{r} + \omega^2 r + 2\omega W_u.$$

Теперь воспользуемся формулами (7) для определения частных производных компонент скорости потока по координатным направлениям  $\theta$  и  $l$  через производные функции тока по этим направлениям:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W_l}{\partial l} &= \frac{1}{\tau r} \left[ \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \tau r v \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right], & \frac{\partial W_l}{\partial \theta} &= \frac{1}{\tau r} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + v \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} \right], \\ \frac{\partial W_u}{\partial l} &= -\frac{1}{\tau} \left[ \frac{\partial v}{\partial l} \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \tau v \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right) \right], & \frac{\partial W_u}{\partial \theta} &= -\frac{1}{\tau} \left[ \frac{\partial v}{\partial \theta} \frac{\partial \Psi}{\partial l} + v \frac{\partial^2 \Psi}{\partial l \partial \theta} \right]. \end{aligned}$$

И подставим полученные выражения для производных компонент скорости в проекции уравнения количества движения (8) и (9):

$$-\frac{v}{r \tau^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial l} \frac{dv}{dl} + \frac{v \text{ctg} \beta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial l \partial \theta} + \tau v \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right) + \frac{v}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial l} \sin \gamma + 2\omega \sin \gamma \right] = -v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (10)$$

$$\frac{v}{(r \tau)^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \left[ \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \frac{dv}{dl} + \frac{v \text{ctg} \beta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \tau r v \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right] - A \sin \gamma = -v \frac{\partial p}{\partial l}, \quad (11)$$

где 
$$\frac{dv}{dl} = \frac{\partial v}{\partial l} + \text{ctg} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \quad A = \frac{v^2}{r \tau^2} \left( \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)^2 + \omega^2 r - 2\omega \frac{v}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l}.$$

Из уравнения процесса (2) следует, что  $\frac{d(pv^k)}{dl} = 0$  или  $\frac{v^k dp}{dl} + kp v^{k-1} \frac{dv}{dl} = 0$ .  
 Последнее уравнение позволяет получить связь между производными удельного объема и давления:  $\frac{dv}{dl} = -\frac{v^2}{a^2} \left( \frac{\partial p}{\partial l} + \text{ctg} \beta \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \right)$ , где  $a = \sqrt{kp v}$  – скорость звука.

Теперь в системе уравнений (10) и (11) можно заменить производные удельного объема на производные давления. А саму систему свести к одному уравнению путем исключения из нее производной давления  $\frac{\partial p}{\partial l}$ .

Таким образом, после того как введена функция тока и сделан переход от цилиндрической системы координат к системе ортогональных координат  $(\theta, l)$ , для описания трехмерного установившегося относительного движения идеального газа в слое переменной толщины на средней поверхности слоя  $S_1$  мы имеем систему двух уравнений, которая включает в себя уравнение сохранения энергии и проекцию уравнения количества движения на координатное направление  $\theta$ :

$$\begin{aligned} \frac{k}{k-1} p^* v^* &= \frac{k}{k-1} p v + \frac{W^2}{2} + \frac{\Delta u^2}{2}, & (12) \\ \frac{(M_{W_l}^2 - 1) \frac{v}{\tau^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \left[ \tau \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right) - \frac{\text{ctg} \beta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial l} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \frac{2\omega}{v} \right) \sin \gamma \right]}{M_{W_l}^2 + M_{W_u}^2 - 1} & - \\ - \frac{M_{W_l}^2 \frac{v}{\tau^2} \left[ \frac{\text{ctg} \beta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \tau r \frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{1}{\tau r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right]}{M_{W_l}^2 + M_{W_u}^2 - 1} & + \frac{r A \sin \gamma}{v} \frac{M_{W_l} M_{W_u}}{M_{W_l}^2 + M_{W_u}^2 - 1} = \frac{\partial p}{\partial \theta}, & (13) \end{aligned}$$

где  $M_{W_l}$  и  $M_{W_u}$  – числа Маха, определенные по компонентам скорости  $W_l$  и  $W_u$ .

Будем полагать, что сформулированная в начале статьи задача расчета потока в межлопаточном канале решетки турбомшины решена, если известны параметры рабочего тела в любых точках сечений  $l = \text{const}$  ( $l_0 < l_1 < \dots < l_i < l_{i+1} < \dots$ ) поверхности тока  $S_1$ , а сами эти сечения покрывают поверхность тока с достаточной густотой.

Задачу расчета потока в отдельно взятом сечении  $l = \text{const}$  назовем частной задачей расчета потока и сформулируем ее следующим образом.

В сечении  $l = l_i$  заданы: 1) массовый расход через слой  $m$  для одного межлопаточного канала решетки; 2) полное давление  $p^*$  и полный удельном объеме  $v^*$  перед каналом; 3) координата границы стороны разрежения  $\varphi_s = \varphi_s(l_i)$  и координата границы стороны давления  $\varphi_p = \varphi_p(l_i)$ ; 4) производные функций, задающих координаты границ сечения, а именно:  $\frac{d\varphi_s(l_i)}{dl}$ ,  $\frac{d\varphi_p(l_i)}{dl}$ ,  $\frac{d^2\varphi_s(l_i)}{dl^2}$ ,  $\frac{d^2\varphi_p(l_i)}{dl^2}$ . Найти в любой точке сечения  $l = l_i$  параметры рабочего тела: меридиональную  $W_l$  и окружную  $W_u$  компоненты скорости потока, давление и удельный объем рабочего тела.

В качестве безразмерной функции тока будем использовать функцию

$$\bar{\Psi}(\theta, l) = \frac{\bar{F}(\theta, l) + x(\theta, l) \bar{F}(\theta, l)}{1 + x(\theta, l) \bar{F}(\theta, l)}. \quad (14)$$

$$\bar{F}(\theta, l) = \frac{\theta - \varphi_s(l)}{\varphi_p(l) - \varphi_s(l)}, \quad \varphi_s(l) \leq \theta \leq \varphi_p(l) - \text{относительная площадь сечения слоя}$$

плоскостью  $l = \text{const}$ . В приведенной формуле относительная площадь отсчитывается от стороны разрежения.

$x(\theta, l) = f(\theta, a_0(l), a_1(l), \dots, a_h(l))$  – непрерывная вместе со своими производными дважды дифференцируемая функция с областью изменения  $-1 < x(\theta, l) < \infty$ . Для заданного сечения  $l = l_i$  значения функций  $a_0(l_i), a_1(l_i), \dots, a_h(l_i)$  и их производных

$$\frac{da_0(l_i)}{dl}, \frac{da_1(l_i)}{dl}, \dots, \frac{da_h(l_i)}{dl}, \frac{d^2a_0(l_i)}{dl^2}, \frac{d^2a_1(l_i)}{dl^2}, \dots, \frac{d^2a_h(l_i)}{dl^2} -$$

вещественные числа, и, таким образом, функция  $\bar{\Psi}(\theta, l)$  – функция  $3(h+1)$  вещественных переменных. Если, например,  $h = 0$ , то вектор независимых переменных функции  $\bar{\Psi}(\theta, l)$ , который назовем  $X$ , имеет три компоненты, равные величинам  $a_0(l_i)$ ,

$$\frac{da_0(l_i)}{dl} \text{ и } \frac{d^2a_0(l_i)}{dl^2} \text{ соответственно.}$$

Выберем в сечении  $l = l_i$  равноотстоящие точки  $\theta_j, j = \overline{1, N}, \theta_1 = \varphi_s(l_i), \theta_N = \varphi_p(l_i)$ . Зададим вектор  $X$  случайным образом, вычислим значения безразмерной функции тока (14), вычислим значения ее частных производных до второго порядка включительно и рассмотрим путь решения частной задачи расчета потока.

В одной из точек  $\theta_j$  с номерами  $j = 1$  или  $j = N$  найдем такое давления  $p_1$  или  $p_N$ , которое обеспечивают заданный по условию частной задачи массовый расход  $m$ . Для этого решим задачу поиска минимума функции одной переменной:

$$g(p_j) = \left\{ \frac{2k}{k-1} (p^* v^* - p_j v_j) - \left( m \frac{v_j}{\tau_i} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)_j^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_j^2 \right] - \Delta u_i^2 \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (15)$$

Эта задача поиска минимума функции  $g(p_j)$  эквивалентна задачам нахождения корней  $p_1$  или корня  $p_N$  уравнения (12), записанного для точек  $\theta_j$  с номерами  $j = 1$  или  $j = N$  с учетом формул (7) при условии, что

$$W^2 = W_u^2 + W_i^2 = \left( m \frac{v_j}{\tau_i} \right)^2 \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)_j^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_j^2 \right].$$

Решение дифференциального уравнения (13) для сечения  $l = l_i$  – решение задачи Коши  $\frac{dp}{d\theta} = f(\theta, p)$  на интервале  $[\varphi_s(l_i), \varphi_p(l_i)]$ . Граничное условие задачи Коши определим из решения задачи (15) в одной из двух точек на границах сечения, а именно:  $\theta_1 = \varphi_s(l_i)$  или  $\theta_N = \varphi_p(l_i)$ .

Следовательно, при заданных значениях независимых переменных  $X$  безразмерной функции тока (14) для определения распределения параметров потока вдоль сечения  $l = l_i$  необходимо решить задачу поиска минимума функции одной переменной (15) для точки на одной из границ сечения  $l = l_i$ , решить задачу Коши, т.е.

найти величины давлений в оставшихся  $(N-1)$  точках, и вычислить недостающие параметры потока. Однако для решения частной задачи расчета потока этого не достаточно, так как решение этой задачи – это решение системы двух уравнений (12) и (13). Выполнение же уравнения сохранения энергии (12) гарантировано только в единственной точке, в которой было найдено граничное условие задачи Коши: точке  $\theta_1 = \varphi_s(l_i)$  или в точке  $\theta_N = \varphi_p(l_i)$ . Во всех других точках  $\theta_j$  выполнение уравнения (12) зависит от выбора компонентов вектора  $X$ . Поэтому для нахождения решения частной задачи расчета потока предлагается решать эквивалентную ей задачу нелинейного программирования. В качестве независимых переменных такой задачи выбраны компоненты вектора  $X$ . А при построении целевой функции будем руководствоваться требованием выполнения уравнения (12) во всех точках  $\theta_j, j = \overline{1, N}$ , а именно: массовый расход через слой, ожидаемый из уравнения (12) для точки с номером  $j$

$$m_{Wj} = \frac{\tau_i}{v_j} \sqrt{\left[ \frac{2k}{k-1} (p^* v^* - p_j v_j) - \Delta u_i^2 \right] / \left[ \left( \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)_j^2 + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_j^2 \right]} \quad (16)$$

и массовый расход через слой  $m$ , заданный по условию частной задачи расчета потока, не должны различаться.

Алгоритм вычисления значений целевой функции как количественной оценки выбираемых вещественных переменных безразмерной функции тока (14):

1) в каждой точке  $\theta_j, j = \overline{1, N}$  сечения  $l = l_i$  вычисляем функцию (14) и все ее производные до второго порядка включительно;

2) для точки с номером  $j = 1$  решаем задачу поиска минимума функции одной переменной (15);

3) в точках  $j = 2, 3, \dots, N$  определяем давления  $p_j$  (решаем задачу Коши) и вычисляем ожидаемые массовые расходы  $m_{Wj}^{(1)}$  из формулы (16);

4) выполняем шаг 2 для точки с номером  $j = N$  и выполняем шаг 3 для точек с номерами  $j = N-1, N-2, \dots, 1$  и вычисляем ожидаемые массовые расходы  $m_{Wj}^{(2)}$ ;

5) вычисляем целевую функцию задачи нелинейного программирования, которая построена по принципу критерия метода наименьших квадратов:

$$S(X) = \frac{1}{2(N-1)} \left( \sum_{j=2}^N \left( \frac{m_{Wj}^{(1)} - m}{m} \right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \left( \frac{m_{Wj}^{(2)} - m}{m} \right)^2 \right).$$

Итак, задача расчета потока в межлопаточном канале рассматривается как ограниченное счетное множество независимых друг от друга частных задач расчета потока, которые могут решаться в любой последовательности или одновременно.

### Литература

1. Wu C-H., Brown C.A. Method of analysis for compressible flow past arbitrary turbomachine blades on general surface of revolution. NASA Tech. Note, 2407 (1951). 43 с.
2. Wu C-H. A General theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial-, radial-, and mixed-flow types. NASA Tech. Note, 2604 (1952). 96 с.

© Субботович В.П., Юдин А.Ю., Фан Конг Там, 2008