УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук, С.А. ТЕМЧЕНКО, аспирант

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ ОСЕСИММЕТРИЧНОГО ПОТОКА В ТОРЦЕВОМ СЕЧЕНИИ КОЛЬЦЕВОГО КАНАЛА

Для осьових кільцевих каналів, що складається з послідовно розташованих ділянок двох типів: вільних ділянок і ділянок, зайнятих деякими пристроями, які здатні змінювати кути закручування потоку, пропонується метод розв'язання задачі розрахунку течії в торцевих перетинах вільних ділянок.

For axial circular channels that consist of the areas placed in series of two types: free areas and the areas that are occupied by some devices which are able to change the flow angles, the method of the problem's solution of the flow's calculation in the front sections of the free areas is offered.

Полагается, что кольцевой канал состоит из чередующихся участков двух типов: свободных участков и участков, загроможденных некоторыми устройствами, способными изменять углы закрутки потока. Расчёт течения производится в торцевом сечении свободного участка. Рабочее тело принимается сжимаемым, невязким, а течение – установившимся, адиабатическим, осесимметричным и безотрывным. При этом полные энтальпия, энтропия и показатель изоэнтропы остаются постоянными вдоль линии тока.

Выбрана неподвижная цилиндрическая система координат (z, r, θ), у которой ось z совпадает с осью канала, а r и θ – радиальное и окружное направления. Каждому свободному участку и плоскости $z = \text{const}$, рассекающей этот участок, присвоены одинаковые порядковые номера. А задача расчёта течения в сечении $z = z_i$ участка с номером i сформулирована следующим образом. Задаются:

1) радиусы корневой $R_H\left(z_{i\pm1}\right)$ и периферийной $R_T\left(z_{i\pm1}\right)$ границ сечения $z = z_{i\pm1}$ одного из соседних свободных участков: радиусы границ сечения участка с номером $i-1$ или радиусы границ сечения участка с номером $i+1$;

2) функции распределения вдоль радиуса полного давления $p^*\left(z_{i\pm1}, r\right)$, полного удельного объёма $v^*\left(z_{i\pm1}, r\right)$ и массового расхода $G\left(z_{i\pm1}, r\right)$ в сечении $z = z_{i\pm1}$, и при этом полагается, что массовый расход через сечение $z = z_i$ равен $m = G\left(z_{i\pm1}, R_T\right)$;

3) значения функций изменения корневого и периферийного радиусов канала $R_H(z)$, $R_T(z)$ и их производных первых и вторых производных dR_H/dz, dR_T/dz, d^2R_H/dz^2 и d^2R_T/dz^2 в расчетном сечении $z = z_i$;

4) функция распределения угла потока $\alpha(z_i, r)$ в абсолютном движении в сечении $z = z_i$, то есть, задано условие $C_U = C_Z \operatorname{ctg}\alpha\left(z_i, r\right)$.

Необходимо определить на всех радиусах расчетного сечения $z = z_i$ значения осевой, радиальной и окружной составляющих абсолютной скорости потока C_Z, C_R, C_U, давление p и удельный объём v рабочего тела.

Для описания осесимметричного абсолютного течения рабочего тела будем использовать следующие уравнения:

1) уравнение сохранения энергии

$$i_0^* = i + \frac{C^2}{2}; \qquad (1)$$

2) уравнение процесса

$$pv^k = \text{const}; \qquad (2)$$

3) система из трех уравнений, эквивалентная уравнению неразрывности, в которую введена функция массового расхода $G(z,r) = m\Psi(z,r)$, где $\Psi(z,r) \in [0,1]$ – безразмерная функция тока, m – заданный по условию задачи массовый расход через сечение свободного участка канала:

$$C_Z = \frac{v}{2\pi r}\frac{\partial G}{\partial r}; \qquad C_R = -\frac{v}{2\pi r}\frac{\partial G}{\partial z}; \qquad \text{tg}\gamma = -\frac{\partial G}{\partial z}\Big/\frac{\partial G}{\partial r}; \qquad (3)$$

4) проекции уравнения количества движения на радиальное и на осевое направления:

$$C_R\frac{\partial C_R}{\partial r} + C_Z\frac{\partial C_R}{\partial z} - \frac{C_U^2}{r} = -v\frac{\partial p}{\partial r}; \qquad (4)$$

$$C_R\frac{\partial C_Z}{\partial r} + C_Z\frac{\partial C_Z}{\partial z} = -v\frac{\partial p}{\partial z}. \qquad (5)$$

В уравнениях (4) и (5) вследствие осесимметричного характера течения опущены члены с производными от скоростей по окружной координате θ.

Выразим производные от скоростей C_R и C_Z через производные функции массового расхода, используя систему уравнений (3):

$$\frac{\partial C_R}{\partial r} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{v}{2\pi r}\frac{\partial^2 G}{\partial z \partial r} + \frac{v^2}{2\pi r^2}\frac{\partial G}{\partial z};$$

$$\frac{\partial C_R}{\partial z} = -\frac{1}{2\pi r}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{v}{2\pi r}\frac{\partial^2 G}{\partial z^2};$$

$$\frac{\partial C_Z}{\partial r} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial v}{\partial r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{v}{2\pi r}\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} - \frac{v}{2\pi r^2}\frac{\partial G}{\partial r};$$

$$\frac{\partial C_Z}{\partial z} = \frac{1}{2\pi r}\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{v}{2\pi r}\frac{\partial^2 G}{\partial r \partial z};$$

а из уравнения процесса (2) определим связь между полными и частными производными функции давления и функции удельного объема. Для этого продифференцируем это уравнение:

$\frac{dv}{dz} = -\frac{v^2}{a^2}\frac{dp}{dz}$ или $\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial r}\mathrm{tg}\gamma = -\frac{v^2}{a^2}\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{tg}\gamma\right)$, где $a = \sqrt{kpv}$ – скорость звука.

Если обозначить $B_1 = \frac{\partial G}{\partial z}\frac{v^2}{a^2}$, $B_2 = v\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial r}\right)\mathrm{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right]$, $B_3 = \frac{\partial G}{\partial r}\frac{v^2}{a^2}$ и $B_4 = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)\mathrm{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial r}$, то проекции уравнения количества движения примут следующий вид:

$$\frac{v}{(2\pi r)^2}\frac{\partial G}{\partial r}\left[B_1\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{tg}\gamma\right) + B_2\right] - \frac{C_U^2}{r} = -v\frac{\partial p}{\partial r}; \tag{6}$$

$$-\frac{v}{(2\pi r)^2}\frac{\partial G}{\partial r}\left[B_3\left(\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial p}{\partial r}\mathrm{tg}\gamma\right) + vB_4\right] = -v\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{7}$$

Систему уравнений (6) и (7) сведем к одному дифференциальному уравнению путем исключения производной функции давления $\frac{\partial p}{\partial z}$:

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1 - \mathrm{M}_{C_Z}^2}{1 - \mathrm{M}_{C_Z}^2 - \mathrm{M}_{C_R}^2}\left\{\frac{\mathrm{M}_{C_Z}\mathrm{M}_{C_R}}{1 - \mathrm{M}_{C_Z}^2} vB_5 - B_6 + \frac{C_U^2}{vr}\right\}; \tag{8}$$

$$B_5 = \frac{1}{(2\pi r)^2}\frac{\partial G}{\partial r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial r} - \frac{\partial^2 G}{\partial r^2}\right)\mathrm{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial r}\right];$$

$$B_6 = \frac{v}{(2\pi r)^2}\frac{\partial G}{\partial r}\left[\left(\frac{1}{r}\frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial^2 G}{\partial z \partial r}\right)\mathrm{tg}\gamma - \frac{\partial^2 G}{\partial z^2}\right].$$

Таким образом, система уравнений (1) – (5), благодаря введению функции массового расхода, сведена к системе из трех уравнений (1), (2) и (8). Из этой системы уравнений будет вполне естественным исключить уравнение (2), используя исходные данные сформулированной выше задачи расчета течения: $v = v^*\left(p^* / p\right)^{1/k}$.

В качестве безразмерной функции тока для свободных участков канала предлагается использовать функцию следующего вида:

$$\Psi(z,r) = \frac{\overline{F}(z,r) + x(z,r)\overline{F}(z,r)}{1 + x(z,r)\overline{F}(z,r)}, \tag{9}$$

где $\overline{F}(z, r) = \left(r^2 - R_H^2\right) / \left(R_T^2 - R_H^2\right)$ – относительная торцевая площадь сечения участка канала, отсчитываемая от корневого радиуса до текущего радиуса r, а $x(z, r)$ – некоторая непрерывная дважды дифференцируемая функция с областью изменения $-1 < x(z, r) < \infty$. Полагается, что эта функция представима следующим образом

$x(z, r) = f(r,\ a_0(z),\ a_1(z), ...,\ a_l(z))$. Тогда для $z = z_i$ величины $a_0(z_i),\ a_1(z_i), ...,\ a_l(z_i)$, $\frac{\partial a_0(z_i)}{\partial z}, \frac{\partial a_1(z_i)}{\partial z}, ..., \frac{\partial a_l(z_i)}{\partial z}$, и $\frac{\partial^2 a_0(z_i)}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 a_1(z_i)}{\partial z^2}, ..., \frac{\partial^2 a_l(z_i)}{\partial z^2}$ – это вещественные числа, компоненты вектора независимых переменных, который назовем X, а функция $\Psi(z_i, r, X)$ – функция $3(l + 1)$ вещественных переменных.

Задачу решения системы уравнений (1) и (8) для сечения $z = z_i$ заменим эквивалентной задачей нелинейного программирования, независимыми переменными которой выступают компоненты вектора X.

Выберем в сечении $z = z_i$ равноотстоящие точки r_j, $j = \overline{1, N}$, $r_1 = R_H(z)$, $r_N = R_T(z)$. Зададим компоненты вектора X. Теперь уравнение (8) – обыкновенное дифференциальное уравнение вида $\frac{dp}{dr} = f(r,\ p)$. Граничное условие для его решения, давление p_1, находим в точке r_1 из уравнения сохранения энергии (1):

$$\frac{2k}{k-1}\left[p_1^* v_1^* - p_1 v_1^* \left(\frac{p_1^*}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}\right] = \left[\frac{m}{2\pi r_1} v_1^* \left(\frac{p_1^*}{p_1}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_1^2 \left(\mathrm{ctg}^2 \alpha_1 + 1\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_1^2\right].$$

Для точек r_j, $j = \overline{2, N-1}$ из уравнения $G(z_{i\pm 1,}\ r) = G(z_i, r_j)$ определим радиус, на котором поверхность тока, проходящая через точку r_j, пересекает сечение $z = z_{i\pm 1}$. Благодаря знанию этого радиуса станут известными величины v_j^*, p_j^*, $j = \overline{2, N}$. Далее решим уравнение (8) и найдем давления p_j.

Уравнение сохранения энергии (1) гарантировано обратиться в тождество только в точке r_1. Однако во всех других точках можно найти количественную оценку (невязку) ε_j выполнения условия (1), зависящую от выбора компонентов вектора X:

$$\varepsilon_j = \sqrt{\frac{2}{k-1}\left[p_j^* v_j^* - p_j v_j^* \left(\frac{p_j^*}{p_j}\right)^{\frac{1}{k}}\right] \left[\frac{v_j^*}{2\pi r_j}\left(\frac{p_j^*}{p_j}\right)^{\frac{1}{k}}\right]^{-2} \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right)_j^2 \left(\mathrm{ctg}^2 \alpha_j + 1\right) + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z}\right)_j^2\right]^{-1}} - m.$$

Поэтому необходимо найти такой вектор X, чтобы величины давлений p_j, полученные в результате решения уравнения (8), обращали уравнение (1) в тождество во всех точках r_j, $j = \overline{2, N}$ сечения $z = z_i$.

Итак, задача расчета течения в сечении $z = \mathrm{const}$ свободного участка кольцевого канала – задача нелинейного программирования, независимыми переменными которой выступают вещественные коэффициенты функции тока (9), а целевая функция – сумма квадратов невязок ε_j, $j = \overline{2, N}$.