УДК 536.24 : 519.63

В.Н. ПУСТОВАЛОВ, канд. техн. наук, С.П. НАУМЕНКО

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», г. Харьков, Украина

ОБ ОДНОМ ВАРИАНТЕ МЕТОДА ПРОГОНКИ ПРИ ЧИСЛЕННЫХ РЕШЕНИЯХ ТЕПЛОФИЗИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Запропоновано деякі уточнені способи дискретизації граничних умов 2-го і 3-го родів при чисельному розв'язані теплофізичних задач, що сумісні з методом прогонки при порушенні тридіагональності матриці коефіцієнтів СЛАР.

Some methods which define more exactly the boundary conditions of the 2d and 3d kinds discretization are proposed. They are compatible with the TDMA method with the tri-diagonal coefficients matrix of the algebraic equations violations.

Общие замечания

Лишь небольшое количество инженерных теплофизических задач, к которым, в частности, относится определение температурных полей в элементах теплоэнергетических установок, могут иметь аналитические решения. Задачи такого типа в подавляющем большинстве решаются численными методами, основными из которых являются различные варианты метода конечных разностей (МКР) и метода конечных элементов (МКЭ). В результате применения численных методов решение представляется в виде множества значений искомых функций, определенных в узлах сетки, накладываемой на расчётную область.

Практическое использование МКР и МКЭ в инженерных теплофизических задачах состоит в общих чертах из следующих этапов:

1) формулировка математический модели (ММ) явления или процесса в виде системы дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП);

2) дискретизация, т.е. переход от системы ДУЧП к системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ);

3) решение СЛАУ;

4) анализ полученного решения с возможным возвратом к первому этапу для уточнения ММ, если полученные результаты неадекватны натуре по каким-либо параметрам.

Решение СЛАУ является самостоятельной математической проблемой, слабо связанной с физическим содержанием теплофизический задачи.

Нестационарная задача теплопроводности

В качестве характерного примера рассмотрим одномерную нестационарную задачу теплопроводности в твердом теле, описываемую линейным ДУЧП вида [1, 2]

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x}\right) + S, \tag{1}$$

где ρ – плотность среды, c – теплоёмкость, T – температура, t – время, λ – теплопроводность, S – объёмная мощность распределенных источников теплоты.

Численные методы, разработанные для этой задачи, применимы и к другим процессам переноса физических субстанций, определяемым аналогичным уравнением. Это потенциальное течение жидкости, диффузия, течение через пористую среду, течение смазки и т.д.

Проводя дискретизацию уравнения (1) в рамках МКР с помощью замены производных разностными отношениями или, как в [2], интегрируя (1) по контрольному объёму (КО) и по времени от t до $t + \Delta t$, можно получить сеточное уравнение, определяющее двухслойную неявную разностную схему на одномерной в общем случае неравномерной сетке с N узлами $x_i \in [0, \ell]$, $i = \overline{0, N}$, ℓ – размер расчётной области:

$$a_i T_i = b_i T_{i+1} + c_i T_{i-1} + d_i, \tag{2}$$

где T_i, T_{i+1}, T_{i-1} – температуры в узлах пространственно-временной разностной сетки в момент времени $t + \Delta t$; a_i, b_i, c_i – коэффициенты; $d_i = d_i\left(T_i^0\right)$; T_i^0 – температура в i-ой точке в момент времени t.

Шаблон сеточного уравнения (2) представлен на рис. 1.

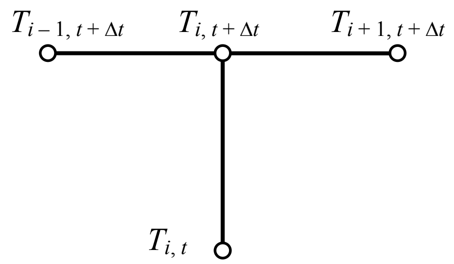

Рис. 1.

При дискретизации граничных условий второго и третьего рода (ГУ-2, ГУ-3) на границах одномерной расчетной области обычно используют одностороннюю конечно-разностную аппроксимацию производной $\partial T/\partial x$: слева – с шагом вперед, справа – с шагом назад. В результате получаются уравнения вида

$$a_0 T_0 = b_0 T_1 + d_0, \tag{3}$$

$$a_N T_N = c_N T_{N-1} + d_N. \tag{4}$$

Для удобообозримости рассмотрим в качестве примера одномерную расчётную область с 5-ю узлами (рис. 2).

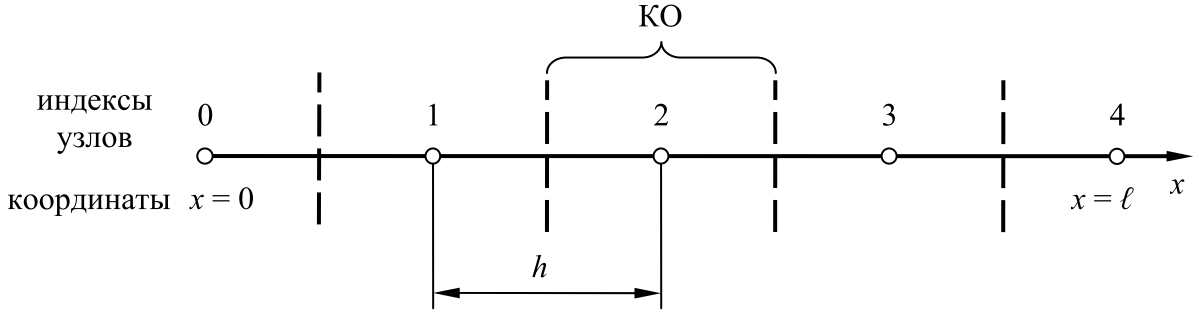

Рис. 2.

Если записать сеточные уравнения для всех трёх КО согласно структуре уравнения (2) и добавить к ним уравнения (3) и (4), то используя традиционные для линейной алгебры обозначения, будем иметь СЛАУ вида

$$\left.\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + 0\cdot T_3 + 0\cdot T_4 + 0\cdot T_5 = b_1,\\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + a_{23}T_3 + 0\cdot T_4 + 0\cdot T_5 = b_2,\\ 0\cdot T_1 + a_{32}T_2 + a_{33}T_3 + a_{34}T_4 + 0\cdot T_5 = b_3,\\ 0\cdot T_1 + 0\cdot T_2 + a_{43}T_3 + a_{44}T_4 + a_{45}T_5 = b_4,\\ 0\cdot T_1 + 0\cdot T_2 + 0\cdot T_3 + a_{54}T_4 + a_{55}T_5 = b_5. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Система уравнений (5) характеризуется трехдиагональной матрицей коэффициентов при неизвестных T_i, $i = \overline{1,5}$:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & 0\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 0\\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & 0\\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} & a_{45}\\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Процесс решения СЛАУ такого вида носит название «метод прогонки» (МП). В англоязычной литературе, соответственно, часто используется термин TDMA (Tri-Diagonal-Matrix Algorithm) – алгоритм трехдиагональный матрицы. МП, по сути, является специальным вариантом метода Гаусса, наиболее полно учитывающим специфику структуры сеточных уравнений. Анализ решения системы (5) методом Гаусса позволяет утверждать возможность представления любой из предыдущих температур сеточной области через последующую линейными уравнениями вида

$$T_{i-1} = P_{i-1}T_i + Q_{i-1}, \tag{7}$$

$$T_i = P_iT_{i+1} + Q_i \tag{8}$$

с помощью так называемые прогоночных коэффициентов.

Различные модификации МП описаны, в частности, в [1–4].

Преимуществом метода прогонки по сравнению с общими матричными методами решения СЛАУ заключаются в том, что он требует машинной памяти и времени пропорциональных N а не N^2.

Разработанной первоначально для одномерных расчетных областей, метод прогонки явился составной частью алгоритмов численных решений многомерных теплофизических задач, например, метода переменных направлений [2].

МП при нарушении трехдиагональности матрицы коэффициентов СЛАУ

Использование односторонней конечно-разностной аппроксимации производной $\partial T/\partial x$ при дискретизации граничных условий может иметь следствием заметные погрешности при расчете значений искомых функций в узлах сетки, особенно при больших шагах по координате.

Ниже нами предлагаются способы уточненной дискретизации граничных условий с использованием не двух, а трех узлов сетки, которые, несмотря на нарушение трехдиагональности матрицы коэффициентов СЛАУ (6) в первом и последнем уравнениях, совместимы с МП.

Пусть на левой границе расчетной области заданы ГУ-2, а на правой – ГУ-3 в виде

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = 0, \tag{9}$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\ell} = -\frac{\alpha}{\lambda}\left(T_\ell - T_f\right), \tag{10}$$

где α – коэффициент теплопередачи, T_f – температура жидкости.

Для момента времени $t + \Delta t$ проведём через точки 0, 1, 2 равномерной расчетной сетки с координатами 0, h, $2h$ параболу вида $T = ax^2 + bx + c$, проходящую через T_0, T_1, T_2. Коэффициенты a, b, c при этом оказываются равными

$$a = \frac{T_2 - 2T_1 + T_0}{2h^2}, \quad b = \frac{4T_1 - T_2 - 3T_0}{2h}, \quad c = T_0,$$

откуда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=0} = b = \frac{4T_1 - T_2 - 3T_0}{2h} = 0,$$

а

$$T_0 = e_0 T_1 + e_1 T_2, \tag{11}$$

где

$$e_0 = 4/3, \quad e_1 = -1/3.$$

Записав сеточную формулу для 1-ой точки

$$a_1 T_1 = b_1 T_2 + c_1 T_0 + d_1,$$

получим, разрешив это уравнение относительно T_2,

$$T_2 = \frac{a_1}{b_1} T_1 - \frac{c_1}{b_1} T_0 - \frac{d_1}{b_1}. \tag{12}$$

Подставив (12) в (11) и разрешив полученное уравнение относительно T_0, будем иметь

$$T_0 = g_0 T_1 + g_1, \tag{13}$$

где

$$g_0 = \frac{e_0 + \dfrac{a_1 e_1}{b_1}}{1 + \dfrac{c_1 e_1}{b_1}}, \tag{14}$$

$$g_1 = -\frac{\dfrac{d_1 e_1}{b_1}}{1 + \dfrac{c_1 e_1}{b_1}}. \qquad (15)$$

С другой стороны, если использовать прогоночные коэффициенты, то

$$T_0 = P_0 T_1 + Q_0. \qquad (16)$$

Тогда из сопоставления (16) и (13) получим

$$P_0 = g_0, \quad Q_0 = g_1. \qquad (17)$$

Теперь, используя известные рекуррентные формулы [1–4],

$$P_i = \frac{b_i}{a_i - c_i P_{i-1}}, \quad Q_i = \frac{d_i + c_i Q_{i-1}}{a_i - c_i P_{i-1}},$$

двигаясь слева-направо по узлам сетки (прямая прогонка) можно рассчитать прогоночные коэффициенты P_i, Q_i, $i = \overline{0, N}$.

Идея описанного выше алгоритма может быть использована и для ГУ-3 на правой границе сетки.

Парабола, проходящая через точки с координатами $(N-2)h$, $(N-1)h$, Nh и T_{N-2}, T_{N-1}, T_N имеет вид

$$T = Ax^2 + Bx + C,$$

где

$$A = \frac{T_N - 2T_{N-1} + T_{N+2}}{2h^2}, \quad B = \frac{4T_{N-1} - T_N - 3T_{N-2}}{2h}, \quad C = T_{N-2},$$

откуда после преобразований

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\ell} = \frac{1}{2h} T_{N-2} - \frac{2}{h} T_{N-1} + \frac{3}{2h} T_N. \qquad (18)$$

Для N-ой точки сетки согласно ГУ-3

$$-\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{x=\ell} = \alpha\left(T_N - T_f\right).$$

С учётом (18) последнее уравнение преобразуется к выражению

$$T_{N-2} = 4T_{N-1} - (2\mathrm{Bi}^* + 3)T_N + 2\mathrm{Bi}^* T_f, \qquad (19)$$

где $\mathrm{Bi}^* = \alpha h/\lambda$ – сеточное число Био.

Согласно сеточному уравнению (2) для $(N-1)$-ой точки сетки

$$a_{N-1}T_{N-1} = b_{N-1}T_N + c_{N-1}T_{N-2} + d_{N-1}, \qquad (20)$$

а подстановка (19) в (20) дает

$$T_{N-1} = fT_N + g, \qquad (21)$$

где

$$f = \frac{b_{N-1} - 2c_{N-1}\mathrm{Bi}^* - 3c_{N-1}}{a_{N-1} - 4c_{N-1}}, \quad g = \frac{2c_{N-1}\mathrm{Bi}^* T_f}{a_{N-1} - 4c_{N-1}}. \qquad (22)$$

С другой стороны

$$T_{N-1} = P_{N-1}T_N + Q_{N-1}. \qquad (23)$$

Совместив (21) и (23) и разрешив полученное уравнение относительно T_N, получим

$$T_N = \frac{Q_{N-1} - g}{f - P_{N-1}}. \qquad (24)$$

Имея выражение для температуры T_N в последнем узле сетки, температуры в остальных узлах можно определить, двигаясь по узлам сетки справа-налево (обратная прогонка), последовательно используя формулу (7).

Опыт использования изложенных приёмов уточнения ГУ-2 и ГУ-3 в сочетании с МП при решении ряда теплофизических задач показал их целесообразность и эффективность.

Литература

1. *Власова Е.А.* Приближенные методы математической физики: Учеб. Для вузов / Е.А. Власова, В.С. Зарубин, Г.Н. Кувыркин / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Кришенко. – М.: Из-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

2. *Патанкар С.* Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости: Пер. с англ. – М.: Энергоатомиздат, 1984.

3. *Самарский А.А.*, *Вабишевич П.Н.* Вычислительная теплопередача. – М.: УРСС, 2003.

4. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1977.