

УДК 621.165

В.П. СУББОТОВИЧ, канд. техн. наук,
А.Ю. ЮДИН, канд. техн. наук, ФАН КОНГ ТАМ

Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт»,
г. Харьков, Украина

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ РЕШЕТОК НА ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ПОВЕРХНОСТИ ТОКА

Розглянута обернена задача про тривимірний потік в міжлопатковому каналі на поверхні течії, яка є поверхнею обертання, у шарі змінної товщини. Задача розглядається як така, що складається з незалежних задач розрахунку течії в окремих перетинах шару. Ці незалежні задачі можуть розв'язуватись як послідовно, одна за одною, так і одночасно. Обернена задача дозволяє визначати геометричні характеристики профілів лопаток за умов наявності аеродинамічних та геометрических обмежень.

The inverse problem about the three-dimensional flow in the blade channel on the surface which is the general surface of revolution was researched. The problem is researched as the one that consists of the independent problems of the flow's calculation in the separated cross-section of the stream filament. These independent problems can be solved either one after another or simultaneously. The inverse problem allows to obtain a geometrical characteristics of blade profiles when limitations of aerodynamic and geometrical parameters.

В практическом турбиностроении до настоящего времени почти всегда оптимальное проектирование профилей осуществляется на основе многовариантных решений прямой задачи. Существующие методы решения обратных задач решеток турбомашин при описании течения уравнениями Эйлера в своей основе были разработаны еще в 50-х годах минувшего столетия [1, 2] и получили свое достаточно полное развитие только с появлением мощных вычислительных машин. Использование этих методов для оптимального проектирования решеток связано с большими проблемами, вызванными и тем, что эти методы никак не учитывают особенности организации вычислительных процессов при решении задач оптимизации.

Для описания трехмерного установившегося относительного движения идеального газа в слое переменной толщины на поверхности вращения S_1 будем использовать следующую систему уравнений:

1) уравнение сохранения энергии

$$i_{W_l}^* = \frac{k}{k-1} p v + \frac{W^2}{2} - \frac{\Delta u^2}{2}; \quad (1)$$

2) уравнение изоэнтропийного процесса

$$p v^k = \text{const}; \quad (2)$$

3) уравнение количества движения в форме Эйлера в проекциях на окружное, радиальное и осевое координатные направления θ, r, z цилиндрической системы координат:

$$W_z \frac{\partial W_u}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \theta} + \frac{W_r W_u}{r} + 2\omega W_r = -v \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}, \quad (3)$$

$$W_z \frac{\partial W_r}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_r}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \theta} - \frac{W_u^2}{r} - \omega^2 r - 2\omega W_u = -v \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (4)$$

$$W_z \frac{\partial W_z}{\partial z} + W_r \frac{\partial W_z}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \theta} = -v \frac{\partial p}{\partial z}, \quad (5)$$

где ω – угловая скорость, рад/с;

4) уравнение неразрывности [1]:

$$\frac{\partial(\tau \rho W_l r)}{\partial l} + \frac{\partial(\tau \rho W_u)}{\partial \theta} = 0, \quad (6)$$

где $\tau = \tau(l)$ – нормальная толщина слоя; ρ – плотность рабочего тела; l – криволинейная координата, отсчитываемая вдоль линии пересечения поверхности тока S_1 с плоскостью $\theta = \text{const}$, то есть вдоль меридиана; W_l – проекция скорости потока на направление l (см. рисунок), причем $W_l^2 = W_z^2 + W_r^2$.

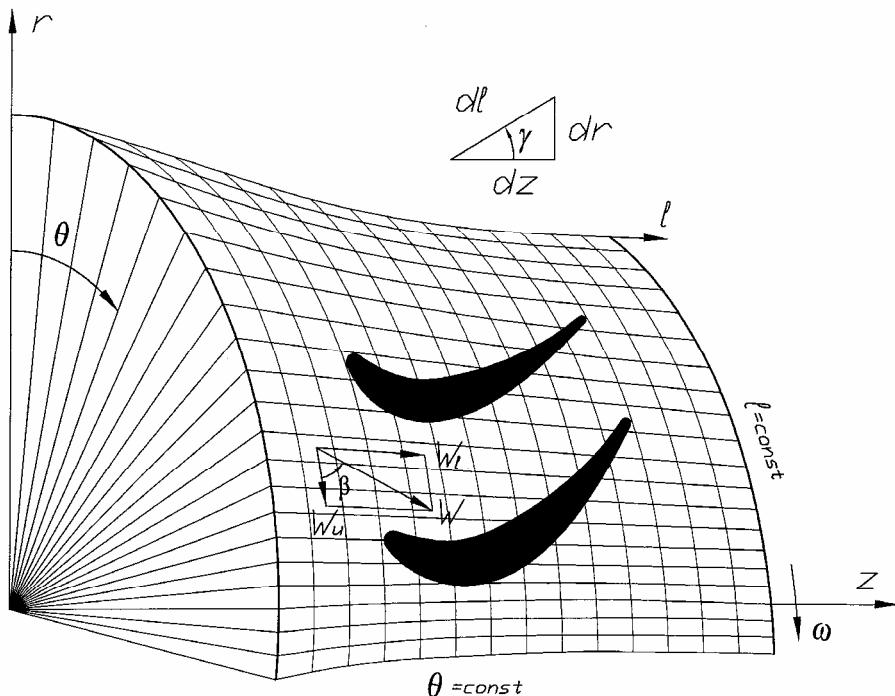


Рис. Ортогональная система координат (θ, l)

Если в приведенных выше уравнениях (1) – (6) полагать, что $\omega = 0$, $W = C$, $\beta = \alpha$, $i_{W_l}^* = i_{C_0}^*$, то получим систему уравнений, описывающих обтекание неподвижной решетки на осесимметричной поверхности тока S_1 .

Введем функцию тока $\Psi = m \bar{\Psi}$ и уравнение неразрывности (6) заменим эквивалентной системой уравнений:

$$W_l = \frac{v}{\tau r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}, \quad W_u = -\frac{v}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l}, \quad \frac{W_u}{W_l} = \operatorname{ctg} \beta = -\frac{\partial \Psi}{\partial l} \left/ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right., \quad (7)$$

где m – массовый расход через слой; $\bar{\Psi}$ – безразмерная функция тока; β – угол потока на поверхности S_1 .

Поскольку уравнения (6) и (3) – (5) записаны в различных системах координат, то перейдем от цилиндрической системы координат к системе ортогональных координат (θ, l) , как это было сделано в [3].

После введения функции тока и перехода от цилиндрической системы координат к системе ортогональных координат (θ, l) для описания трехмерного установившегося относительного движения идеального газа в слое переменной толщины на средней поверхности слоя S_1 мы имеем систему двух уравнений, которая включает в себя уравнение сохранения энергии и проекцию уравнения количества движения на координатное направление θ :

$$\frac{k}{k-1} p^* v^* = \frac{k}{k-1} p v + \frac{W^2}{2} + \frac{\Delta u^2}{2}, \quad (8)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(M_{W_l}^2 - 1\right) \frac{v}{\tau^2} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \left[\tau \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{\tau} \frac{\partial \Psi}{\partial l} \right) - \frac{\operatorname{ctg} \beta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta \partial l} + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial l} + \frac{2\omega}{v} \right) \sin \gamma \right]}{M_{W_l}^2 + M_{W_u}^2 - 1} - \\ & - \frac{M_{W_l}^2 \frac{v}{\tau^2} \left[\frac{\operatorname{ctg} \beta}{r} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + \tau r \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{1}{\tau r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) \right]}{M_{W_l}^2 + M_{W_u}^2 - 1} + \frac{r A \sin \gamma}{v} \frac{M_{W_l} M_{W_u}}{M_{W_l}^2 + M_{W_u}^2 - 1} = \frac{\partial p}{\partial \theta}, \end{aligned} \quad (9)$$

где γ – угол потока на меридианальной плоскости, $\operatorname{tg} \gamma = \frac{\partial r}{\partial z}$; M_{W_l} и M_{W_u} – числа Маха, определенные по компонентам скорости W_l и W_u , а удельный объем определяется из изоэнтропического соотношения $v = v^* \left(\frac{p^*}{p} \right)^{1/k}$.

Обратную задачу расчета потока в слое переменной толщины сформулируем следующим образом. Заданы: 1) массовый расход m через слой для одного канала; 2) полное давление p^* и полный удельный объем v^* ; 3) уравнение $\varphi = \varphi(l)$, задающее геометрию одной из линий тока вдоль всего межлопаточного канала; 4) уравнение $W = W(l)$, задающее распределение скорости вдоль выбранной линии тока. Найти геометрические границы стороны разрежения $\varphi_s = \varphi_s(l)$ и стороны давления $\varphi_p = \varphi_p(l)$ межлопаточного канала и параметры рабочего тела в любой точке средней поверхности тока S_1 слоя.

Обратную задачу разделим на две подзадачи. Первая подзадача: для части массового расхода через слой m_1 найти геометрическую границу стороны давления $\varphi_p = \varphi_p(l)$ и определить в любой точке слоя между линией тока, заданной уравнением $\varphi = \varphi(l)$, и границей канала $\varphi_p = \varphi_p(l)$ параметры рабочего тела. Вторая подзадача: для части массового расхода через слой m_2 найти геометрическую границу стороны разрежения канала $\varphi_s = \varphi_s(l)$ и определить в любой точке слоя между линией тока, заданной уравнением $\varphi = \varphi(l)$, и границей $\varphi_s = \varphi_s(l)$ параметры рабочего тела.

Будем полагать, что сформулированная обратная задача решена, если определены границы межлопаточного канала и известны параметры рабочего тела в любых точках сечений $l = \text{const}$ ($l_0 < l_1 < \dots < l_i < l_{i+1} < \dots$) поверхности тока S_1 , а сами эти сечения покрывают поверхность тока с достаточной густотой.

Ограничимся анализом только одной из подзадач, например, первой. Вторая подзадача будет решаться аналогично. Причем из всего межлопаточного канала

выберем только одно произвольное сечение $l = \text{const}$ и покажем, как для этого сечения решить первую подзадачу.

Задачу в отдельно взятом сечении $l = \text{const}$ назовем частной задачей и сформулируем ее так. В сечении $l = l_i$ заданы: 1) массовый расход через слой m_1 для межлопаточного канала решетки; 2) полное давление p^* и полный удельный объем v^* перед каналом; 3) значение функции $\varphi = \varphi(l)$ и значения ее производных $\frac{d\varphi(l)}{dl}, \frac{d^2\varphi(l)}{dl^2}, \frac{d^3\varphi(l)}{dl^3}$; 4) значение функции $W = W(l)$ и значения ее производных $\frac{dW(l)}{dl}, \frac{d^2W(l)}{dl^2}$.

Найти геометрическую границу стороны давления $\varphi_p = \varphi_p(l)$ межлопаточного канала и определить в любой точке сечения $l = l_i$ параметры рабочего тела.

В качестве безразмерной функции тока будем использовать функцию

$$\bar{\Psi}(0, l) = \frac{\bar{F}(\theta, l) + x(\theta, l) \bar{F}'(\theta, l)}{1 + x(\theta, l) \bar{F}'(\theta, l)}. \quad (10)$$

$\bar{F}(\theta, l) = \frac{\theta - \varphi(l)}{\varphi_p(l) - \varphi(l)}$, $\varphi(l) \leq \theta \leq \varphi_p(l)$ – относительная площадь сечения слоя

плоскостью $l = \text{const}$. В приведенной формуле относительная площадь отсчитывается от стороны разрежения.

$x(\theta, l) = f(\theta, a_0(l), a_1(l), \dots, a_h(l))$ – непрерывная вместе со своими производными дважды дифференцируемая функция с областью изменения $-1 < x(\theta, l) < \infty$. Для заданного сечения $l = l_i$ значения функций $a_0(l_i), a_1(l_i), \dots, a_h(l_i)$ и их производных $\frac{da_0(l_i)}{dl}, \frac{da_1(l_i)}{dl}, \dots, \frac{da_h(l_i)}{dl}, \frac{d^2a_0(l_i)}{dl^2}, \frac{d^2a_1(l_i)}{dl^2}, \dots, \frac{d^2a_h(l_i)}{dl^2}$ – вещественные числа, и, таким образом, функция $\bar{\Psi}(0, l)$ – функция 3($h+1$) вещественных переменных. Если, например, $h = 0$, то вектор независимых переменных функции $\bar{\Psi}(0, l)$, который назовем X , имеет три компоненты, равные величинам $a_0(l_i)$, $\frac{da_0(l_i)}{dl}$ и $\frac{d^2a_0(l_i)}{dl^2}$ соответственно.

В сечении $l = l_i$ для точки $\theta_1 = \varphi(l)$ на линии тока, заданной уравнением $\varphi = \varphi(l)$, по условию подзадачи известна функция $W = W(l)$, определяющая скорость потока. Для функции скорости потока справедливы три равенства

$$W^2 = W_l^2 + W_u^2, \quad \frac{d}{dl}W^2 = \frac{d}{dl}(W_l^2 + W_u^2), \quad \frac{d^2}{dl^2}W^2 = \frac{d^2}{dl^2}(W_l^2 + W_u^2).$$

В этих равенствах компоненты вектора скорости и их производные выражим через производные безразмерной функции тока (10).

Если полагать, что для сечения $l = l_i$ вектор независимых переменных X функции (10) задан, тогда мы имеем систему трех алгебраических уравнений с тремя неизвестными $\varphi_p, \frac{d\varphi_p}{dl}, \frac{d^2\varphi_p}{dl^2}$. Следует отметить, что эта система уравнений решается

аналитически. После нахождения $\varphi_p, \frac{d\varphi_p}{dl}, \frac{d^2\varphi_p}{dl^2}$ выберем в сечении $l = l_i$

равноотстоящие точки θ_j , $j = \overline{1, N}$, $\theta_1 = \varphi(l_i)$, $\theta_N = \varphi_p(l_i)$. При заданном (случайным образом) векторе X вычислим значения безразмерной функции тока (10), вычислим значения ее частных производных до второго порядка включительно и рассмотрим путь решения частной задачи первой подзадачи.

В одной из точек θ_j с номерами $j=1$ или $j=N$ найдем такое давление p_1 или p_N , которое обеспечивает заданный по условию первой подзадачи массовый расход m_1 . Для этого решим задачу поиска минимума функции одной переменной:

$$g(p_j) = \left\{ \frac{2k}{k-1} (p^* v^* - p_j v_j) - \left(m \frac{v_j}{\tau_i} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)_j^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_j^2 \right] - \Delta u_i^2 \right\}^2 \rightarrow \min. \quad (11)$$

Эта задача поиска минимума функции $g(p_j)$ эквивалентна задачам нахождения корней p_1 или корня p_N уравнения (8), записанного для точек θ_j с номерами $j=1$ или $j=N$

с учетом формул (7) при условии, что $W^2 = W_u^2 + W_l^2 = \left(m_1 \frac{v_j}{\tau_i} \right)^2 \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)_j^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_j^2 \right]$.

Решение дифференциального уравнения (9) для сечения $l=l_i$ – решение задачи Коши $\frac{dp}{d\theta} = f(\theta, p)$ на интервале $[\varphi(l_i), \varphi_p(l_i)]$. Границное условие задачи Коши определим из решения задачи (11) в одной из двух точек на границах сечения, а именно: $\theta_1 = \varphi(l_i)$ или $\theta_N = \varphi_p(l_i)$.

Следовательно, при заданных значениях независимых переменных X безразмерной функции тока (10) для определения распределения параметров потока вдоль сечения $l=l_i$ необходимо решить задачу поиска минимума функции одной переменной (11) для точки на одной из границ сечения $l=l_i$, решить задачу Коши, т.е. найти величины давлений в оставшихся $(N-1)$ точках, и вычислить недостающие параметры потока. Однако для решения частной задачи этого не достаточно, так как решение этой задачи – это решение системы двух уравнений (8) и (9). Выполнение же уравнения сохранения энергии (12) гарантировано только в единственной точке, в которой было найдено граничное условие задачи Коши: точке $\theta_1 = \varphi(l_i)$ или в точке $\theta_N = \varphi_p(l_i)$. Во всех других точках θ_j выполнение уравнения (8) зависит от выбора компонентов вектора X . Поэтому для нахождения решения частной задачи предлагается решать эквивалентную ей задачу нелинейного программирования. В качестве независимых переменных такой задачи выбраны компоненты вектора X . А при построении целевой функции будем руководствоваться требованием выполнения уравнения (8) во всех точках θ_j , $j = \overline{1, N}$, а именно: массовый расход через слой, ожидаемый из уравнения (12) для точки с номером j

$$m_{w_j} = \frac{\tau_i}{v_j} \sqrt{\left[\frac{2k}{k-1} (p^* v^* - p_j v_j) - \Delta u_i^2 \right] / \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial l} \right)_j^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right)_j^2 \right]} \quad (12)$$

и массовый расход через слой m_1 , заданный по условию частной задачи первой подзадачи, не должны различаться.

Целевая функция задачи нелинейного программирования позволяет количественно оценить правильность выбора значений компонент вектора X , если вычислять ее, например, по следующей схеме:

1) в каждой точке θ_j , $j = \overline{1, N}$ сечения $l = l_i$ вычисляем функцию (10) и все ее производные до второго порядка включительно;

2) для точки с номером $j = 1$ решаем задачу поиска минимума функции одной переменной (11);

3) в точках $j = 2, 3, \dots, N$ определяем давления p_j (решаем задачу Коши) и вычисляем ожидаемые массовые расходы $m_{Wj}^{(1)}$ из формулы (12);

4) выполняем шаг 2 для точки с номером $j = N$ и выполняем шаг 3 для точек с номерами $j = N - 1, N - 2, \dots, 1$ и вычисляем ожидаемые массовые расходы $m_{Wj}^{(2)}$;

5) вычисляем целевую функцию задачи нелинейного программирования, которая построена по принципу критерия метода наименьших квадратов:

$$S(X) = \frac{1}{2(N-1)} \left(\sum_{j=2}^N \left(\frac{m_{Wj}^{(1)} - m_1}{m_1} \right)^2 + \sum_{j=1}^{N-1} \left(\frac{m_{Wj}^{(2)} - m_1}{m_1} \right)^2 \right).$$

Итак, обратная задача теории решеток разделена на две, независимые друг от друга, подзадачи, а решение любой из двух подзадач рассматривается как решение задаваемого множества частных задач. Частные задачи могут решаться в любой последовательности, независимо от принадлежности к первой или второй подзадачам, или одновременно.

В соответствии с планом работ по усовершенствованию профилей направляющих лопаток мощных паровых турбин ТЭС и АЭС ОАО «Турбоатом» были спроектированы и испытаны решетки новых профилей. Оптимальное проектирование было выполнено на основе описанной выше обратной задачи, которая позволяет в процессе проектирования иметь данные для оценки заданных аэродинамических, геометрических и прочностных ограничений. Сравнительные экспериментальные исследования прямых решеток стандартных и усовершенствованных профилей с относительно короткими лопатками $b/l = 1,5 - 3,0$ подтвердили результаты теоретических решений, а именно: у решеток усовершенствованных профилей коэффициенты суммарных потерь (профильные + концевые) ниже на 0,5–2,0 %.

Литература

1. Wu C-H., Brown C.A. Method of analysis for compressible flow past arbitrary turbomachine blades on general surface of revolution: Tech. Note № 2407 / NACA. – 1951. – 43 с.
2. Wu C-H. A General theory of three-dimensional flow in subsonic and supersonic turbomachines of axial-, radial-, and mixed-flow types: Tech. Note № 2604 / NACA. – 1952. – 96 с.
3. Субботович В.П. Обтекание трехмерным потоком решетки профилей турбомашины на поверхности вращения / В.П. Субботович, А.Ю. Юдин, Фан Конг Там // Энергетические и теплотехнические процессы и оборудование. Вестник НТУ «ХПИ»: Сб. научн. трудов. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – № 6. – С. 41-46.

© Субботович В.П., Юдин А.Ю., Фан Конг Там, 2009