

УДК 533.6

**С.В. ЕРШОВ**, д-р техн. наук; проф. ИПМаш НАНУ, г. Харьков  
**А.И. ДЕРЕВЯНКО**, аспирант ИПМаш НАНУ, г. Харьков

## НИЗКОРЕЙНОЛЬДСОВАЯ МОДЕЛЬ ТУРБУЛЕНТНОСТИ С ОГРАНИЧИТЕЛЕМ ПРОИЗВОДСТВА КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ

Розглянуто низкорейнольдсову модель турбулентності з обмежувачем генерування кінетичної енергії. Метод моделювання ламінарно-турбулентного переходу реалізовано в пакеті прикладних програм *FlowER-Y* на основі двопараметричної  $k-\omega$  SST моделі Ментера. Виконано розрахунки, результати яких порівнюються з експериментальними даними з бази даних *ERCRAFT* щодо течії газу вздовж плоскої пластини. Показано, що низкорейнольдсова модифікація двопараметричної моделі  $k-\omega$  SST дозволяє описувати перехідну течію.

The Low-Reynolds turbulence model with the kinetic energy production limiter is considered. The laminar-turbulent transition method is implemented in the solver *FlowER-Y* on the base of the  $k-\omega$  SST model. The results of the calculations were compared with experimental data from *ERCRAFT* database for gas flow along a flat plate. It is shown that the low-Reynolds modification of the  $k-\omega$  SST model allows an approximate simulation of a transitional flow.

### Введение

Последние достижения вычислительной газовой динамики (*CFD* – Computational Fluid Dynamics) позволили качественно и количественно точно рассчитывать широкий круг течений в турбомашинах. Тем не менее, до сих пор существуют течения, не поддающиеся моделированию. И если пару десятилетий назад основной проблемой *CFD* была недостаточная точность численных методов, то сегодня согласно Уилкокку [1] главным фактором, сдерживающим дальнейшее развитие *CFD*, является неадекватность современных моделей турбулентности.

Как известно, большинство реальных течений в турбинах низкого давления являются переходными, т.е. в них происходит переход от ламинарной к турбулентной форме движения [2]. Тем не менее, при моделировании течений в турбинных решетках в большей части работ данное явление не рассматривается. В то же время локальные максимумы пристеночного трения, температуры стенки и теплопередачи часто оказываются около конца зоны ламинарно-турбулентного перехода [3], а так как переходная область может быть достаточно большой по сравнению с длиной хорды лопатки, то правильное моделирование перехода при проектировании турбинных решеток оказывается важным. Пренебрежение ламинарно-турбулентным переходом и обратным процессом, называемым реламинаризацией, может приводить к большим погрешностям в определении потерь, коэффициента трения, интенсивности теплообмена.

В настоящей работе рассматривается низкорейнольдсовая  $k-\omega$  SST модель турбулентности [4, 5], а также ее модификация, позволяющая улучшить результаты расчетов. Приводятся данные численного моделирования эксперимента по течению газа вдоль плоской пластини.

### Построение модели

Моделирование осредненного турбулентного течения в рамках уравнений *RANS* (Reynolds Averaged Navier–Stokes – осредненные по Рейнольдсу уравнения Навье–Стокса) стало общепринятой практикой двух последних десятилетий. За это время

удалось с помощью данного подхода решить многие задачи, которые ранее были неразрешимы. Распространенным подходом описания ламинарно-турбулентного перехода в рамках уравнений *RANS* является использование низкорейнольдсовой модели Уилкокса [2]. Этот метод не требует внесения значительных изменений в исходную, высокорейнольдсовую, модель и не нуждается в дополнительных эмпирических константах и соотношениях. Запишем общий вид модифицированной низкорейнольдсовой *k- $\omega$  SST* модели турбулентной вязкости:

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho u_j k - (\mu + \sigma_k \mu_t) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] = \alpha_{\text{PTM}} P_k - \beta^* \rho \omega k ;$$

$$\frac{\partial \rho \omega}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \rho u_j \omega - (\mu + \sigma_\omega \mu_t) \frac{\partial \omega}{\partial x_j} \right] = \frac{\alpha \rho}{\mu_t} P_k - \beta \rho \omega^2 + (1 - F_1) \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j} ,$$

где  $\rho$  – плотность,  $k$  – кинетическая энергия турбулентности (КЭТ),  $\omega$  – удельная скорость диссипации,  $\mu$  – молекулярная вязкость,  $P_k = \tau_{ij} S_{ij}$  – производство КЭТ,  $\tau_{ij}$  – тензор рейнольдсовых напряжений,  $S_{ij}$  – тензор скоростей деформаций среднего течения. Переключающие функции  $F_1, F_2$  позволяют переходить от уравнений *k- $\omega$*  у стенки к *k- $\epsilon$*  во внешнем потоке:

$$F_1 = \max(\text{th}(arg_1^4); \exp(-(R_y/120)^8)) ;$$

$$arg_1 = \min \left( \max \left( \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}, \frac{500 \mu}{\rho \omega y^2} \right); \frac{4 \rho \sigma_{\omega 2} k}{CD_{k\omega} y^2} \right) ;$$

$$CD_{k\omega} = \max \left( 2 \rho \sigma_{\omega 2} \frac{1}{\omega} \frac{\partial k}{\partial x_j} \frac{\partial \omega}{\partial x_j}; 10^{-20} \right) ;$$

$$\mu_t = \min \left( \alpha^* \frac{\rho k}{\omega}; \frac{0,31 \rho k}{SF_2} \right) ;$$

$$S = \sqrt{2 S_{ij} S_{ij}} ; F_2 = \text{th}(arg_2) ;$$

$$arg_2 = \min \left( 2 \frac{\sqrt{k}}{\beta^* \omega y}; \frac{500 \mu}{\rho \omega y^2} \right) ,$$

где  $y$  – расстояние до ближайшей стенки,  $R_y = \rho y \sqrt{k} / \mu$  – турбулентное число Рейнолдса, вычисленное по расстоянию до стенки и величине КЭТ.

Используется два набора констант, которые объединяются переключающей функцией  $F_1$ :  $\phi = F_1 \phi_1 + (1 - F_1) \phi_2$ . При этом набор  $\phi_1$  связан с *k- $\omega$*  моделью и содержит скорректированные выражения для моделирования перехода:

$$\sigma_{k1} = 0,85; \quad \beta_1^* = 0,09 \frac{5/18 + (R_t/8)^4}{1 + (R_t/8)^4}; \quad \alpha_1^* = \frac{1/40 + R_t/6}{1 + R_t/6};$$

$$\sigma_{\omega 1} = 0,5; \quad \beta_1 = 0,075; \quad \alpha_1 = \frac{5}{9} \frac{1/10 + R_t/2,7}{1 + R_t/2,7},$$

где  $R_t = \frac{\rho k}{\mu \omega}$  – турбулентное число Рейнольдса, представляющее собой отношение коэффициентов турбулентной и молекулярной вязкости.

Константы  $\phi_2$ , соответствующие уравнениям  $k$ – $\epsilon$  имеют вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{k2} &= 1,0; & \beta_2^* &= 0,09; & \alpha_2^* &= 1; \\ \sigma_{\omega 2} &= 0,856; & \beta_2 &= 0,0828; & \alpha_2 &= 0,4403. \end{aligned}$$

В уравнении КЭТ содержится множитель  $\alpha_{\text{PTM}}$  (Production Term Modifier – ограничитель производства турбулентности), который уменьшает производство КЭТ в ламинарной части пограничного слоя. В турбулентной области для правильного вычисления параметров потока данный множитель должен равняться единице. Вид модификатора  $\alpha_{\text{PTM}}$  взят из источника [6]:

$$\begin{aligned} \alpha_{\text{PTM}} &= 1 - 0,94 P_{im}(Re_v) F_3 \text{th}((y^+/17)^2); \\ F_3 &= e^{-(R_t/c_a)^2} [1 - P(R_t) + 1/2 P(R_t)], \end{aligned}$$

где  $Re_v = \rho y^2 S / \mu$  – турбулентное число Рейнольдса, рассчитанное по расстоянию от стенки и величине тензора скоростей деформации,  $c_a$  – константа, функции  $P(R_t), P_{im}(Re_v)$  приведены в [6]. Преимуществом указанного метода является то, что при формулировке множителя  $\alpha_{\text{PTM}}$  используются только локально вычисляемые величины. Использование интегральных величин, таких как толщина потери импульса, влечет за собой увеличение счетного времени и потерю общности для сложных течений. Множитель  $\text{th}((y^+/17)^2)$  введен для отключения ограничителя в турбулентной области и вычисляется с помощью безразмерного расстояния до стенки:

$$y^+ = \frac{y \sqrt{\tau_w / \rho_w}}{\mu / \rho},$$

где  $\tau_w$  и  $\rho_w$  – параметры течения, вычисленные у стенки.

Оригинальная низкорейнольдсовая модель  $k$ – $\omega$  SST может быть получена из представленной, если приравнять множитель  $\alpha_{\text{PTM}}$  единице. Для перехода к стандартной высокорейнольдсовой модели  $k$ – $\omega$  SST модели, нужно также переопределить следующие константы:

$$\beta_1^* = 0,09; \quad \alpha_1^* = 1; \quad \alpha_1 = 0,553.$$

**Тестирование моделей, выводы**

Тестирование предложенного подхода проводилось на основе серии экспериментов, результаты которых доступны в базе данных *ERCRAFT* [7]. Эксперименты представляют собой течение газа вдоль плоской пластины. Измерения проводились при различных значениях степени турбулентности и скорости основного потока.

Таблица

Параметры тестов *ERCRAFT*

Тест	Скорость основного потока, м/с	Степень турбулентности, %
ТЗА	5,4	3,0
ТЗВ	9,4	6,0
ТЗА-	19,8	0,9

Указанные эксперименты отличаются по положению зоны ламинарно-турбулентного перехода. Условия подобраны таким образом, чтобы в тесте ТЗВ переход возникал у входной кромки, в ТЗА – примерно посередине пластины, в то время как для теста ТЗА- ламинарное течение сохранялось практически по всей длине. В результате экспериментальных замеров получены профили скорости в различных точках, а также величина пристеночного трения вдоль пластины.

Для численного моделирования в настоящей работе использовалась расчетная сетка следующего размера: вдоль пластины 120 ячеек, 80 – перпендикулярно ее плоскости (общее количество 9600). Безразмерное расстояние до центра ближайшей к стенке ячейки  $y^+$  приблизительно равно 4, а количество ячеек в пограничном слое около 40.

На рис. 1–3 изображены графики распределения коэффициента трения  $c_f$  вдоль пластины (в направлении роста числа Рейнольдса  $Re = \frac{\rho x U_0}{\mu}$ , где  $x$  – расстояние от входной кромки до рассматриваемой точки,  $U_0$  – скорость основного потока). На всех рисунках приняты следующие обозначения для модификаций  $k-\omega SST$  модели: HR – высокорейнольдсовая, LR – низкорейнольдсовая, PTM – низкорейнольдсовая с ограничителем  $\alpha_{PTM}$ . Обозначение LAM использовалось для результатов расчета ламинарного течения, а точками показаны результаты экспериментов.

Видно, что переход к турбулентному пограничному слою при расчете по высокорейнольдсовой модели  $k-\omega SST$  навязывается в начале пластины для всех тестов. Низкорейнольдсовая модель позволяет приблизительно рассчитать положение перехода, но имеет ряд недостатков: в полностью турбулентном пограничном слое степень турбулизации оказывается существенно ниже, и величина пристеночного трения является недооцененной. Кроме того, в случае теста ТЗА- получить переходное течение с помощью данной модели не удалось. При использовании  $\alpha_{PTM}$  модификатора результаты расчетов оказываются ближе к экспериментальным данным: величина пристеночного трения в ламинарной области вычисляется точнее, а применение переключателя  $F_3 \text{ th}((y^+/17)^2)$  позволяет лучше рассчитать  $c_f$  в турбулентной области. Корректируя значения константы  $c_a$  при вычислении функции  $F_3$  можно регулировать положение точки начала перехода. Для тестов ТЗА и ТЗА- данная константа принималась равной 4,45, для теста ТЗВ – 4,0. В работе [6] рекомендуется значение

константы  $c_a = 3$  для произвольного течения. В этом случае численное решение остается качественно правильным, но расхождения результатов расчета и эксперимента несколько выше.

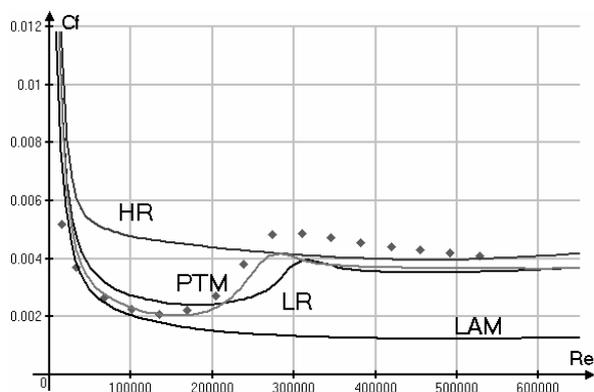


Рис. 1. Эксперимент Т3А

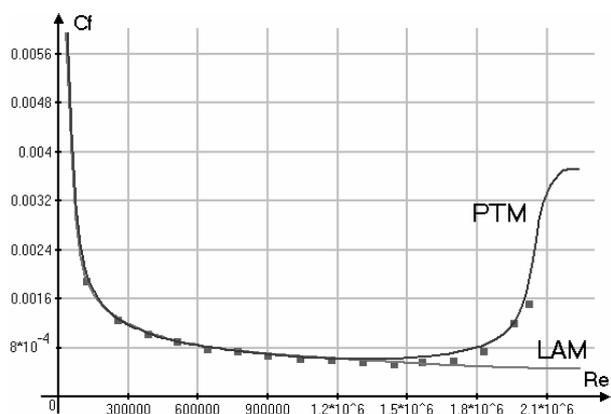


Рис. 2. Эксперимент Т3А-

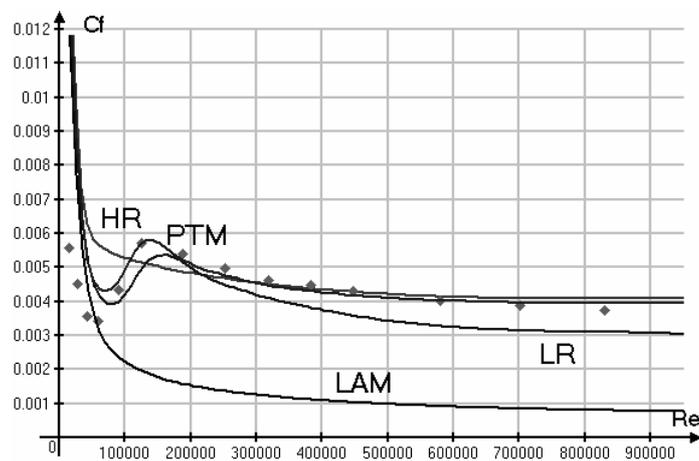


Рис. 3. Эксперимент Т3В

**Список литературы:** 1. Wilcox D.C. Turbulence Modeling for CFD. Second Edition. Palm Drive: DCW Industries, 2004. – 540 p. 2. Suzen Y.B. Modeling of Flow Transition Using an Intermittency Transport Equation / Y.B. Suzen, P.G. Huang // J. Fluids Eng. – 2000. – 122, № 2. – P. 273-284. 3. Singer B.A. Modeling the Transition Region – NASA Contractor Report. – 1993. – 88 p. 4. Wilcox D.C. Simulation of Transition with a Two-Equation Turbulence Model // AIAA J. – 1994. – 32, № 2. – P. 247-255. 5. Menter F.R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications // AIAA J. – 1994. – 32, № 8. – P. 1598–1605. 6. Denissen N.A. Implementation and Validation of a Laminar-to-Turbulent Transition Model in the Wind-US Code / N.A. Denissen, D.A. Yorden, N.J. Georgiadis // NASA TM № 215451. – 2008. – 36 p. 7. ERCOFTAC Classic Collection database, [http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/database/cases/case20/Case\\_data/](http://cfd.mace.manchester.ac.uk/ercoftac/database/cases/case20/Case_data/).

© Ершов С.В., Деревянко А.И., 2010  
Поступила в редколлегию 12.02.10