УДК 621.165

В.С. ГАПОНОВ, д-р техн. наук; проф. НТУ «ХПИ», г. Харьков
Ю.А. ОСТАПЧУК, канд. техн. наук; доц. НТУ «ХПИ», г. Харьков

УПРУГАЯ СИСТЕМА КВАЗИНУЛЕВОЙ ЖЕСТКОСТИ ОПОР ПОДШИПНИКОВ

Розглядається пружна система квазінульової жорсткості опор швидкісних роторів Приведені розрахунки елементів системи на міцність.

Resilient quasi-zero stiffness system of the speed rotors supports is considered. The calculations of the elements on durability are resulted.

Упругая система [1] состоит из силовой (несущей) части, корректора и регулятора жесткости. Корректор жесткости представляет собой упругую систему, находящуюся на границе устойчивости. Суммарная жесткость несущей части подвески и корректора может быть сколь угодно малой. Регулятор жесткости управляет положением корректора в зависимости от величины постоянной и низкочастотной составляющих внешней нагрузки для обеспечения квазинулевой жесткости упругой системы. Опора относится к классу пассивных виброзащитных систем. Регулирование жесткости позволяет следить за изменениями спектра частот возбуждения.

Упругая система квазинулевой жесткости (рис. 1) содержит корректор жесткости, выполненный в виде пластин (стержней), шарнирно закрепленных по концам.

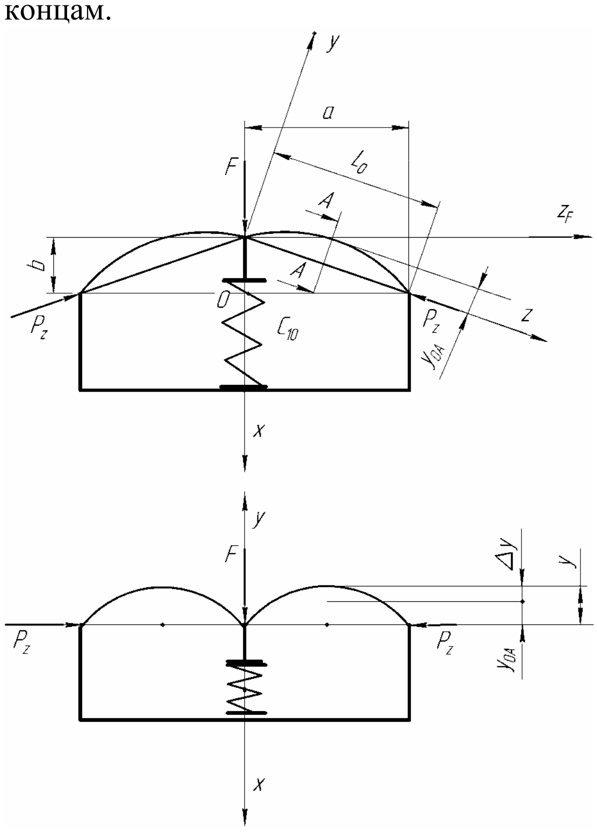

Рис. 1. Схема системы квазинулевой жёсткости

Силовая характеристика упругой системы квазинулевой жесткости может быть найдена как сумма проекций на ось *X* сил, действующих со стороны несущего упругого элемента жесткости C_{10} и корректора жесткости.

Корректор (рис. 2) представим в виде стержня с начальным прогибом y_{0A} и находящимся под действием продольной силы P_Z.

Так как сжимающая сила приложена с эксцентриситетом, то с самого начала нагружения возникает изгибающий момент $M_0 = -P_Z\, y_0$ (рис. 2) и уравнение изгиба для деформированного состояния имеет вид

$$EI\frac{d^2(y-y_0)}{dZ^2} = P_Z y\,, \qquad (1)$$

где $I = b_c d^3/12$ – момент инерции сечения стержня (рис. 1).

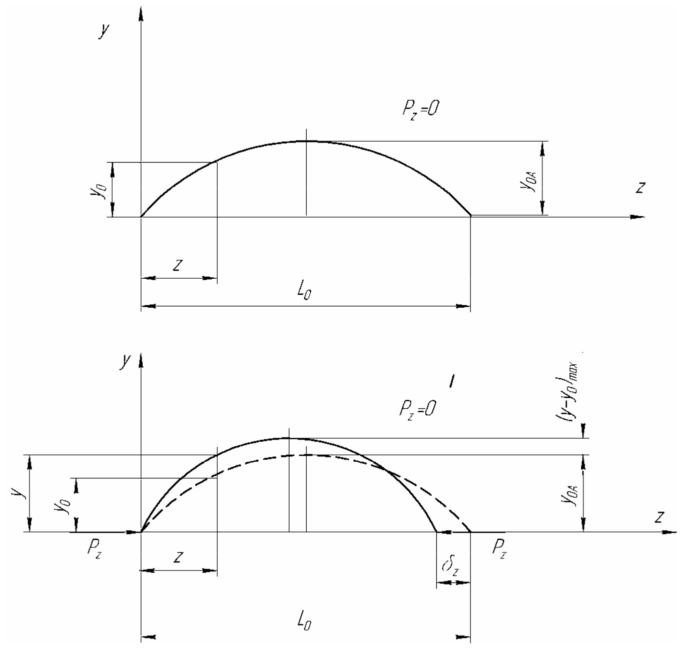

Рис. 2. Расчетная схема корректора жесткости

Положив

$$y_0 = y_{0A} \cdot \sin\frac{\pi Z}{L_0} \qquad (2)$$

получим из (1)

$$\frac{d^2 y}{dZ^2} + k^2 y = -y_{0A}\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2 \cdot \sin\frac{\pi Z}{L_0}, \qquad (3)$$

где $k^2 = P_Z / EI$.

Найдем общее решение уравнения (3). Его можно представить как сумму двух решений

$$y = y^* + y^{**},$$

где y^* – общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^2 y}{dZ^2} + k^2 y = 0;$$

y^{**} – частное решение уравнения (3)

$$\left.\begin{aligned} y^* &= C_1 \cos kZ + C_2 \sin kZ; \\ y^{**} &= A\cos\frac{\pi}{L_0}Z + B\sin\frac{\pi}{L_0}Z; \\ \frac{dy^{**}}{dZ} &= -A\frac{\pi}{L_0}\sin\frac{\pi}{L_0}Z + B\frac{\pi}{L_0}\cos\frac{\pi}{L_0}Z; \\ \frac{d^2 y^{**}}{dZ^2} &= -A\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\cos\frac{\pi}{L_0}Z - B\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\sin\frac{\pi}{L_0}Z. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получим

$$-A\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\cos\frac{\pi}{L_0}Z - B\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\sin\frac{\pi}{L_0}Z + k^2\left(A\cos\frac{\pi}{L_0}Z + B\sin\frac{\pi}{L_0}Z\right) = -y_{0A}\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\sin\frac{\pi}{L_0}Z,$$

после тождественных преобразований

$$\left[k^2 - \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\right]A\cos\frac{\pi}{L_0}Z + \left[k^2 - \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\right]B\sin\frac{\pi}{L_0}Z = -y_{0A}\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2\sin\frac{\pi}{L_0}Z.$$

Это равенство обращается в тождество, если $A = 0$,

$$B = -y_{0A}\frac{\left(\dfrac{\pi}{L_0}\right)^2}{k^2 - \left(\dfrac{\pi}{L_0}\right)^2}. \qquad (5)$$

Таким образом, общее решение (3) имеет вид

$$y = C_1 \cos kZ + C_2 \sin kZ + B \sin \frac{\pi}{L_0} Z .$$

Произвольные постоянные C_1 и C_2 определим из начальных условий

$$y(0) = 0; \quad y(L_0) = 0 .$$

$$Z = 0 \Rightarrow C_1 = 0; \quad Z = L_0 \Rightarrow C_2 = 0 .$$

В итоге имеем

$$y = -y_{0A} \frac{\left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2}{k^2 - \left(\frac{\pi}{L_0}\right)^2} \sin \frac{\pi}{L_0} Z = \frac{y_{0A}}{1 - \left(\frac{kL_0}{\pi}\right)^2} \sin \frac{\pi}{L_0} Z . \tag{6}$$

Наименьшее значение продольной силы P_Z, при которой становится возможным продольный изгиб $P_{\text{кр}} = EI\pi^2 / L_0^2$ тогда (6) можно записать с учетом $k^2 = P_Z / (EI)$

$$y = \frac{y_{0A}}{1 - \frac{P_Z L_0^2}{EI \cdot \pi^2}} \sin \frac{\pi}{L_0} Z = \frac{y_{0A}}{1 - \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}} \sin \frac{\pi}{L_0} Z . \tag{7}$$

Максимальный прогиб при $Z = 0{,}5L_0$

$$y_{\max} = \frac{y_{0A}}{1 - \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}} . \tag{8}$$

Максимальный упругий прогиб при $Z = 0{,}5L_0$, здесь $y_0 = y_{0A}$

$$(y - y_0)_{\max} = \frac{y_{0A}}{1 - \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}} - y_{0A} = y_{0A} \left(\frac{\frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}}{1 - \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}} \right). \tag{9}$$

Обозначив

$$\varepsilon = \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}} \text{ или } \varepsilon = \frac{\sigma}{\sigma_{\text{кр}}} , \tag{10}$$

уравнения (8) и (9) можно записать в виде

$$y_{\max} = \frac{y_{0A}}{1 - \varepsilon} ; \tag{11}$$

$$(y - y_0)_{\max} = y_{0A} \left(\frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \right). \tag{12}$$

Максимальное напряжение в изогнутом стержне при начальном (неупругом) прогибе y_{0A}

$$\sigma_{\max} = \sigma + \sigma_{\text{изг}} = \frac{P_Z}{S} + \frac{P_Z \cdot y_{\max}}{W},$$

где $S = b_{\text{с}} d$; $W = b_{\text{с}} d^2 / 6$.

$$\sigma_{\max} = \frac{P_Z}{S}\left(1 + \frac{S \cdot y_{\max}}{W}\right) = \sigma\left(1 + \frac{S}{W}\frac{y_{0A}}{1-\varepsilon}\right) = \sigma\left(1 + \frac{S}{W}\frac{y_{0A}}{1 - \dfrac{\sigma}{\sigma_{\text{кр}}}}\right). \tag{13}$$

При $(\sigma_{\max} \to \sigma_T) \Rightarrow (\sigma \to \sigma_{\lim})$. Обозначив

$$\varphi = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma_{\text{Т}}} \le 1, \tag{14}$$

уравнение (13) запишем

$$\sigma_{\text{Т}} = 1 + \frac{S}{W}\frac{y_{0A}}{1 - \dfrac{\sigma_{\lim}}{\sigma_{\text{кр}}}};$$

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{6 y_{0A}}{d\left(1 - \varphi\sigma_{\text{Т}}\dfrac{12 L_0^2}{E\pi^2 d^2}\right)} = 1 + \frac{6 y_{0A}}{d\left(1 - \varphi\sigma_{\text{Т}}\dfrac{\lambda^2}{E\pi^2}\right)}, \tag{15}$$

где

$$\lambda^2 = 12\left(\frac{L_0}{d}\right)^2. \tag{16}$$

С учетом необходимого коэффициента запаса прочности n (для стали обычно $n = 1{,}6$) допускаемые максимальные напряжения при сжатии

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{Т}}}{n}, \tag{17}$$

уравнение (15) с учетом (17) запишется

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{6 y_{0A}}{d\left(1 - [\sigma]\dfrac{\lambda^2}{E\pi^2}\varphi\right)};$$

$$\frac{1}{\varphi} = 1 + \frac{\rho}{1 - K_M \lambda^2 \varphi}, \tag{18}$$

где

$$K_M \overset{def}{=} \frac{[\sigma]}{E\pi^2}; \quad \rho = 6\frac{y_{0A}}{d}. \tag{19}$$

Преобразуем уравнение (18) к виду

$$1 = \varphi + \frac{\rho}{1 - K_M\lambda^2\varphi}\varphi; \quad 1 - K_M\lambda^2\varphi = \varphi - K_M\lambda^2\varphi^2 + \rho\varphi;$$

$$K_M\lambda^2(\varphi - 1)\varphi = (1+\rho)\varphi - 1; \quad K_M\lambda^2 = \frac{(1+\rho)\varphi - 1}{(\varphi - 1)\varphi};$$

$$K_M\lambda^2 = \frac{1 - (1+\rho)\varphi}{(1-\varphi)\varphi}. \tag{20}$$

Проектный расчет корректора (стержня, пластины) на прочность.

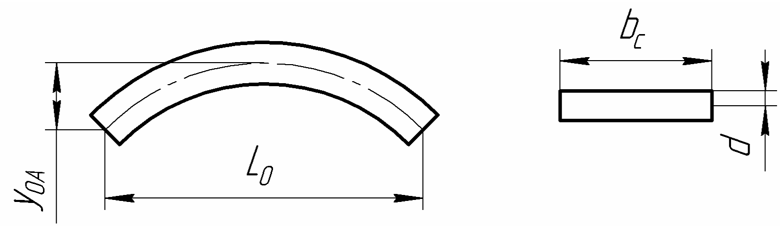

Рис. 3. Расчетная схема пластины корректора

Назначаются: марка стали. Следовательно

$$K_M = \frac{\sigma_T}{nE\pi^2}; \qquad \varphi = \frac{\sigma_{\lim}}{\sigma_T}.$$

Для заданных K_M и φ решается функциональная зависимость

$$\frac{L_0}{d} = f\left(\frac{y_{0A}}{d}\right).$$

Расчетная модель: брус с начальной кривизной; поперечное сечение мало в сравнении с радиусом кривизны.

Перемещение точки приложения силы P_Z в направлении этой силы

$$\delta_Z = \frac{du}{dP_Z},$$

где u – потенциальная деформация при изгибе, равная $u = \int_0^S \frac{M_{\text{изг}}^2}{2EI} dS$; S – длина кривой бруса.

Изгибающий момент в каком-либо поперечном сечении

$$M_{\text{изг}} = -P_Z y = -P_Z \frac{y_{0A}}{1 - \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}} \sin\frac{\pi}{L_0} Z.$$

Проинтегрировав уравнение (9), получим

$$u = 0{,}25\frac{L_0}{EI} - \left(\frac{y_{0A}}{1 - \frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}} P_Z\right)^2.$$

Продольная деформация корректора жесткости

$$\delta_Z = 0{,}5\frac{L_0 y_{0A}^2}{EI}\cdot\frac{P_Z}{\left(1-\dfrac{P_Z}{P_{\text{кр}}}\right)^3} = \frac{L_0 y_{0A}^2}{2EI}P_{\text{кр}}\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3} = \frac{y_{0A}^2}{2}\frac{\pi^2}{L_0}\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3},$$

где $\varepsilon = P_Z / P_{\text{кр}}$; $P_{\text{кр}} = EI\pi^2 / L_0^2$.

На основании численного исследования $\dfrac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)^3} = 12\varepsilon^2$, тогда

$$\delta_Z = \frac{y_{0A}^2\pi^2}{2L_0}\cdot 12\varepsilon^2 = 6\pi^2\frac{y_{0A}^2}{L_0}\left(\frac{P_Z}{P_{\text{кр}}}\right)^2 = 6\pi^2\frac{y_{0A}^2}{L_0}P_Z^2\frac{L_0^2}{EI\pi^2} = 6\frac{y_{0A}^2 L_0}{EI}P_Z^2.$$

Определим продольную податливость корректора жесткости

$$C_Z^{-1} = \frac{d\delta_Z}{dP_Z} = 12\frac{y_{0A}^2 L_0}{EI}P_Z.$$

Продольная жесткость корректора от деформации изгиба (деформация сжатия не учитывается)

$$C_Z = \frac{EI}{12 y_{0A}^2 L_0 P_Z}.$$

Жесткость в безразмерной системе координат

$$\frac{dF}{d\bar{x}} = C_{10}b - 2\frac{P_Z}{\bar{h}^2}\left[\frac{\sin^{-2}\alpha_0 - 1}{\bar{h}} + \frac{\sin\alpha_0(1-\bar{x})^2}{2(1-\bar{h}\sin\alpha_0)}\right],$$

где $\bar{h} = \sqrt{\bar{x}^2 - 2\bar{x} + \sin^{-2}\alpha_0}$; $\sin\alpha_0 = b/L_0$; $\bar{x} = x/b$.

Необходимое и достаточное условие квазинулевой жесткости в окрестности точки $\bar{x} = 1$ (рис. 1).

$$C_{10}b = \frac{2\pi}{\sqrt{6}}\cdot\frac{EI}{L_0 y_A}\cdot\sqrt{\frac{1}{\sin^{-2}\alpha_0 - 1} - \sin\alpha_0}.$$

Список литературы: 1. *Гапонов В.С., Калінін П.М.* Пасивна віброзахисна система з керованою квазінульовою жорсткістю. Патент на винахід 62934 Україна. – 2004. Бюл. № 1.

Поступила в редколлегию 14.02.11