УДК 536.2

В.Б. ВЕСЕЛОВСЬКИЙ, канд. фіз.-мат. наук; доц. ДНУ ім. О. Гончара, Дніпропетровськ;
Р.О. САМУНЬ, аспірант ДНУ ім. О. Гончара, Дніпропетровськ

ДОСЛІДЖЕННЯ ТА ВІДНОВЛЕННЯ ФУНКЦІЇ ТЕПЛОВИДІЛЕННЯ В ВУЗЛАХ ТЕРТЯ ЗА ТЕМПЕРАТУРНИМИ ДАНИМИ

Представлена математична модель в узагальнених змінних в задачах нестаціонарної теплопровідності для складеної системи з неідеальним тепловим контактом на стиках. Метою даного дослідження є розробка математичних моделей вузлів тертя та визначення параметрів тепловиділення із розв’язку обернених задач теплопровідності за температурними даними. Отриманні результати дозволяють оцінювати різноманітні сполучення параметрів багатошарової системи пластин, функції тепловиділення і при заданих функціонально-технічних обмеженнях керувати тепловим станом системи. Наведені результати обчислювальних експериментів.

Ключові слова: теплопровідність, вузли тертя, фрикційна взаємодія, нелінійна обернена задача, фізико-механічні властивості, граничні умови теплообміну.

Вступ. Неруйнівні методи визначення теплофізичних та механічних властивостей елементів конструкцій під час їх експлуатації застосовуються у різних галузях техніки. В основу методів діагностування теплових процесів часто покладаються розв’язки відповідних обернених задач теплообміну, а в окремих випадках вони є практично єдиним способом одержання прийнятного результату [1]. Однак обернені задачі належать до класу некоректних задач, що зокрема проявляється у їх нестійкості щодо вихідних даних [1, 2].

Економічність, довговічність, надійність та конкурентноздатність конструкцій – основні критерії сучасного розвитку техніки. Статистика свідчить, що більшість відмов у техніці та передчасних виходів з ладу машин і обладнання відбувається в результаті зношування їх деталей та вузлів. На ремонтні роботи, що пов’язані із зношуванням витрачаються величезні кошти та матеріальні ресурси. Тому проблема підвищення зносостійкості і довговічності деталей машин є надзвичайно актуальною і її вирішення можливе лише при поєднанні науки про тертя та зношування з розробкою нових технологій поверхневої обробки.

Елементи сучасних конструкцій часто мають неоднорідну структуру і експлуатуються за умов комплексного теплового і механічного навантаження. Контактна взаємодія тіл з тепловиділенням від тертя є однією з найпоширеніших. Під час інтенсивної фрикційної взаємодії можуть змінюватись властивості їх приповерхневих шарів, що зумовлює необхідність введення до розгляду так званого «третього тіла» міжтрибологічної пари [3]. Урахування неоднорідності структури тіл і математична нестійкість задач параметричної ідентифікації вимагають розробки адекватних методів дослідження термопружних процесів і визначення теплофізичних характеристик трибологічних з’єднань [4–6].

Одним з основних триботехнічних параметрів вузлів тертя є потужність тертя, яка характеризує затрати механічної енергії на тертя. Прилади безпосереднього заміру потужності тертя не можуть бути розміщенні у компактні реальні вузли тертя. У зв’язку з цим найбільш вигідним є відновлення функції фрикційного тепловиділення по температурним даним, реєстрація яких легко здійснюється при стендових чи експлуатаційних дослідах техніки. Суть такого метода теплової діагностики тертя викладена у [5, 7].

У роботі [7] пропонується розвиток метода теплової діагностики тертя шляхом зняття обмежуючих умов. Розроблений алгоритм розв'язку граничної зворотної задачі по відновленню функції фрикційного тепловиділення, яка залежить від кутової координати і часу, по температурним даним шляхом ітераційної регуляризації на основі градієнтних методів мінімізації функціонала нев'язки. У якості функціонала нев'язки обрано середнє квадратичне відхилення розрахункових і експериментальних температур у одній точці втулки. Розв'язком тестових задач показана стійкість розв'язку зворотної задачі до похибок у температурних даних.

Аналіз публікацій. Аналіз літератури по проблемі, що розглядається, показав, що розвиток методів розв'язування задач параметричної ідентифікації теплових процесів в деформованих твердих тілах є складною і водночас актуальною проблемою [4]. Додаткові труднощі розв'язування таких задач зумовлюються дискретністю вимірів за часом температури і неминучістю їх похибок. Як відомо, обернені задачі теплопровідності, до яких належать задачі параметричної ідентифікації, є чутливими до похибок вимірювань, що в математичному плані проявляється у їх нестійкості щодо вхідних даних [1, 8]. Намагання покращити ситуацію збільшенням об'єму вхідної інформації за допомогою подрібнення часових інтервалів часто спричинює зворотній ефект – посилює нестійкість розв'язків [1, 2, 8]. Для розв'язування обернених задач запропоновано різні методи [1, 2, 5, 6, 8–11], серед яких значну частину складають чисельні підходи. Однак поєднання аналітичних і чисельних методів [1, 2, 7, 9] є досить успішним.

Метою даного дослідження є розробка математичних моделей вузлів тертя та визначення параметрів тепловиділення у вузлах тертя із розв'язку обернених задач теплопровідності за температурними даними.

Постановка задачі. Розглядаються моделі вузлів тертя у вигляді довгого циліндричного валу, який обертається в жорсткій обоймі за рахунок тепловиділення від тертя. Особливістю перебігу теплових процесів і деформування тіл за фрикційного тепловиділення є їх взаємозалежність: розподіл температури залежить від величини радіальних напружень на ділянці контакту і навпаки. Вважаємо, що тонкий приповерхневий шар циліндра має неоднакові з основним матеріалом теплофізичні властивості. Одним із ефективних підходів до моделювання тонких неоднорідностей є заміна їх оболонками, чи пластинками з усередненням фізико-механічних властивостей і одночасним спрямуванням товщини до нуля [4]. Після цього одержується ідеалізована фізична поверхня, наділена певними концентрованими зведеними характеристиками, які відображають властивості тонкої неоднорідності. Під час постановки крайових задач вплив такої поверхні на поведінку тіла, чи пари тіл враховується за допомогою узагальнених класичних гранично-контактних умов [4]. Характерною їх особливістю є нестаціонарність, що дає можливість враховувати кінетику теплофізичних процесів на межових поверхнях. Взаємозалежність фізико-механічних процесів і нестаціонарність гранично-контактних умов приводить до постави некласичних крайових задач, методи розв'язання яких поки що недостатньо розвинені.

Основна частина. Математична модель в узагальнених змінних в задачах нестаціонарної теплопровідності для складеної системи з неідеальним тепловим контактом на стиках має вигляд:

$$\begin{cases} \alpha_2 \left.\dfrac{\partial T_\nu(x,\mathrm{Fo})}{\partial x}\right|_{x=1} = R^*_{\nu,\nu+1}\left[T_{\nu+1}(0,\mathrm{Fo}) - T_\nu(1,\mathrm{Fo})\right]; \\ \left.\dfrac{\partial T_\nu(x,\mathrm{Fo})}{\partial x}\right|_{x=1} - \mu_{\nu+1,\nu}\left.\dfrac{\partial T_{\nu+1}(x,\mathrm{Fo})}{\partial x}\right|_{x=0} = f_2(\mathrm{Fo}), \end{cases} \tag{1}$$

де $\beta_\nu = \dfrac{a_\nu}{a_0}\cdot\dfrac{R_0^2}{R_\nu^2}$; $\beta^*_\nu = \beta_\nu\dfrac{R_\nu^2}{\lambda_\nu}$; $\mu_{\nu+1,\nu} = \dfrac{\lambda_{\nu+1}}{\lambda_\nu}\cdot\dfrac{R_\nu}{R_{\nu+1}}$; $R^*_{\nu,\nu+1} = \dfrac{R_\nu}{R_{\nu,\nu+1}\cdot\lambda_\nu}$,

з урахуванням безрозмірних параметрів

$$\mathrm{Fo} = \frac{a_0}{R_0^2}\tau;\quad x = \frac{x_\nu}{R_\nu};\quad \mathrm{Bi}_0 = \frac{\alpha_0^*}{\lambda_1}R_1;\quad \mathrm{Bi}_1 = \frac{\alpha_1^*}{\lambda_m}R_m, \tag{2}$$

де a_0, R_0 – деякі довільні параметри: коефіцієнт температуропровідності і лінійний розмір.

При $\alpha_2 = 0, f_2(\mathrm{Fo}) = 0$ умова (1) відповідає умовам ідеального теплового контакту на стиках шарів; при $\alpha_2 = 1$, $f_2(\mathrm{Fo}) = \omega^*_{\nu,\nu+1}(\mathrm{Fo}) = \dfrac{R_\nu}{\lambda_\nu}\omega_{\nu,\nu+1}(R_\nu,\mathrm{Fo})$ – умова (1) відповідає умовам неідеального теплового контакту; при $\alpha_2 = 0$, $f_2(\mathrm{Fo}) = A_{\nu,\nu+1}\left.\dfrac{\partial T_{\nu+1}(x,\mathrm{Fo})}{\partial \mathrm{Fo}}\right|_{x=0}$ $A_{\nu,\nu+1} = \dfrac{\delta_{\nu,\nu+1}R_\nu}{R_0^2}\cdot\dfrac{\lambda_0}{\lambda_\nu}\cdot\dfrac{c_{\nu,\nu+1}}{c_0}$ умова (1) відповідає умовам неідеального теплового контакту у вигляді теплової ємності.

Потужність внутрішніх джерел тепла являє собою суперпозицію потужності джерел тепла, які є наслідком дії на конструкцію полів різної фізичної природи [9, 12, 13]:

$$w_{\nu,j}(x,\mathrm{Fo}) = \sum_{j=1}^{N}\Theta_{\nu,j}(x,\mathrm{Fo}), \tag{3}$$

де N – кількість взаємодій.

Для розв’язку нелінійних задач теплопровідності пропонують зведення цих задач до комбінації лінійних [14]. Розв’язок визначає розподіл температури у нестаціонарному тепловому режимі:

$$T_\nu(x,\mathrm{Fo}) = \sum_{r=1}^{2m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[\mu^\nu_{n,r}(x),\varphi_n\right]g_r^{(n)}(\mathrm{Fo}) + \right.$$
$$\left. + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{g_r(p_k)}{\Psi'(\varphi_n,p_k)}Q\left[p_k,\mu^\nu_{n,r}(x)\right]\exp\left(-\gamma^2\mathrm{Fo}\right)\right\} + z^*_\nu(x,\mathrm{Fo}),$$

де
$$z^*_\nu(x,\mathrm{Fo}) = \sum_{n=0}^{\infty}\beta_\nu^n\frac{\mathrm{Fo}^n}{n!}\varphi_\nu^{(2n)}(x) + \beta^*_\nu\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\beta_\nu^n}{n!}\int_0^{\mathrm{Fo}}(\mathrm{Fo}-\Theta)^n\frac{\partial^{2n}}{\partial x^{2n}}w_\nu(x,\Theta)d\Theta. \tag{4}$$

$g_r(\mathrm{Fo})$ – компоненти впливу, які формуються за рахунок граничних умов та умов неідеального теплового контакту на стиках шарів [12]. Також розв’язок (4) дозволяє виділити квазістаціонарний

$$T_\nu(x,\mathrm{Fo}) = \sum_{r=1}^{2m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[\mu^\nu_{n,r}(x),\varphi_n\right]g_r^{(n)}(\mathrm{Fo})\right\} \tag{5}$$

і регулярні режими нагріву

$$T_\nu(x,\mathrm{Fo})=\sum_{r=1}^{2m}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\Omega_n\left[\mu_{n,r}^{\nu}(x),\varphi_n\right]g_r^{(n)}(\mathrm{Fo})+\frac{\overline{g}_1(P_1)}{\Psi'(\varphi_n,P_1)}Q\left[\mu_{n,r}^{\nu}(x),P_1\right]\exp\left(-\gamma^2\mathrm{Fo}\right)\right\}. \qquad (6)$$

Розв’язок (4) можливо використовувати для визначення температурних полів багатошарових тіл та для розв’язку обернених задач теплопровідності (ОЗТ) [9, 11].

Розв’язок ОЗТ полягає у визначенні граничних умов теплообміну (температура поверхні, тепловий потік, що підводиться, коефіцієнти тепловіддачі), у визначенні параметрів тепловиділення та визначенні теплофізичних характеристик матеріалів шарів по експериментальним замірам температур по перетину багатошарових тіл.

У табл. приведені результати розрахунку товщини багатошарової системи пластин з неідеальним тепловим контактом у вигляді теплової ємності. У якості максимально допустимих у розрахунках приймалися значення температури, отриманні із розв’язку прямої задачі теплопровідності у точках $x_\nu = 0,5$ при початкових даних:
$m = 2$; $a_0 = h_1 = M_1 = 1$; $a_1 = h_0 = M_0 = 0$; $a_1 = 0,90864\cdot10^{-4}$ м^2/с; $\lambda_1 = 93,04$ Вт/(м·град); $\lambda_2 = 116,3$ Вт/(м·град); $\lambda_{1,2} = 116,3$ Вт/(м·град); $f_1(\mathrm{Fo}) = 0,0025\cdot\mathrm{Fo} + 0,0075\cdot(\mathrm{Fo})^3 - 0,00025\cdot(\mathrm{Fo})^4$; $a_2 = 0,6945\cdot10^{-4}$ м^2/с; $a_{1,2} = 0,46281\cdot10^{-4}$ м^2/с.

Отриманні результати дозволяють оцінювати різноманітні сполучення параметрів багатошарової системи пластин, функції тепловиділення і при заданих функціонально-технічних обмеженнях керувати тепловим станом системи.

Таблиця

Визначення функції тепловиділення при управлінні тепловим режимом системи

Параметри системи	Вихідні дані для прямої задачі	Обмеження на параметри системи	Результати		
			1	2	3
R_1, м	$1\cdot10^{-3}$	$(1–4)\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-3}$
R_2, м	$5\cdot10^{-3}$	$(1–7)\cdot10^{-3}$	$1\cdot10^{-2}$	$1,9\cdot10^{-3}$	$2,3\cdot10^{-3}$
$\delta_{1,2}$, м	$8\cdot10^{-3}$	$(5–9,5)\cdot10^{-4}$	$1\cdot10^{-3}$	$7,84\cdot10^{-4}$	$5,32\cdot10^{-4}$
Fo	22	0–25	23,8	23,4	23,4
M	11	–	13,25	9,74	9,57

Із розв’язку прямої задачі теплопровідності було знайдено зміну температури у точках $x_\nu = 0,5$. Визначення функції тепловиділення зазвичай пов’язано з реєстрацією експериментальної температури у певних точках системи двошарових пластин.

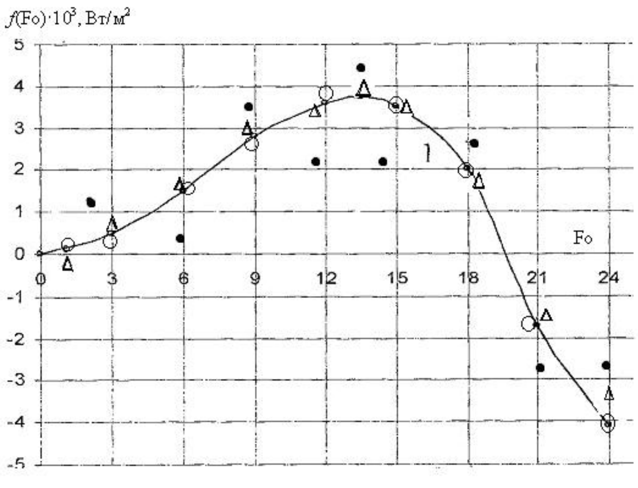
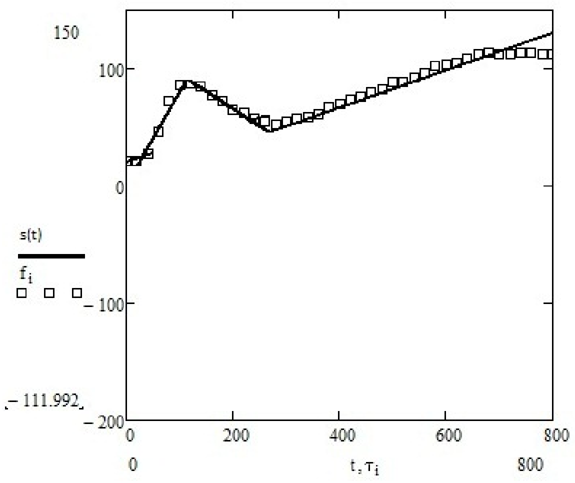


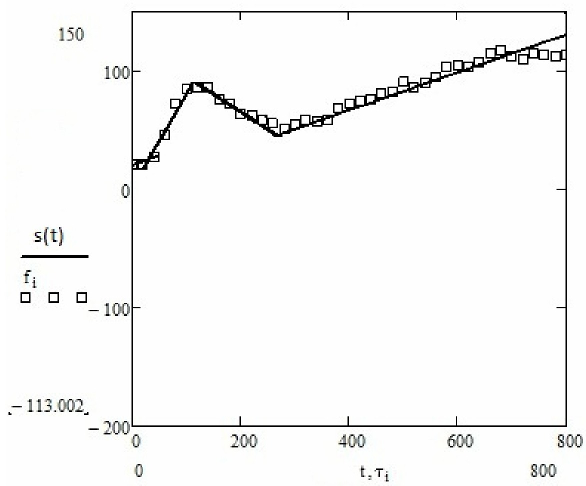
Рис. 1 – Відновлення функції тепловиділення:
• – розв’язок без регуляризації; ○ – помилки у експериментальній температурі при ε = 5 %, Δ – при ε =10 %

На рис. 1 приведені значення функції $f_2(\mathrm{Fo})$ які задаються при розв’язку прямої задачі теплопровідності (суцільна лінія) і обчислена із розв’язку ОЗТ. Вихідна функція $f_\nu^*(\mathrm{Fo})$ збуджувалася по закону $f_\nu^*(\mathrm{Fo}) = \overline{f}_\nu^*(\mathrm{Fo})(1+n_j\varepsilon)$ ($\overline{f}_\nu^*(\mathrm{Fo})$ – детермінована температура, n_j – випадкове число, яке виробляється датчиком випадкових чисел з нормальним законом розподілення, ε – збудження, що вноситься.

Висновки. Підставивши тепловий потік f_2(Fo) і похідну від температури поверхні за часом, можна визначити параметри термічно тонкого шару між пластинами. При цьому припускалося, що експериментальні дані задані з похибкою ε = 2 % та ε = 5 %. Аналіз показує, що відновлена температура та температура, яку заміряли на внутрішній поверхні пластини практично співпадають, що підтверджує можливість апроксимації тонкої оболонки тепловою ємністю. Збіг відновлених теплових потоків, отриманих за використанням різних розв'язків граничних обернених задач теплопровідності свідчить про достовірність отриманих результатів. Отримані результати можна використовувати при дослідженні температурних режимів тонкостінних елементів конструкцій, а також при обробці експериментальних даних з метою визначення функції тепловиділення $f_2(\tau)$ при терті. Методом послідовних інтервалів були виконані числові експерименти по відновленню експериментальної температури лінійною функцією за допомогою пакету програм Mathcad 13. Результати експерименту представлені на рис. 2.



а



б

Рис. 2 – Результати експерименту:
а – ε = 2 %; *б* – ε = 5 %
($s(t)$ – график линейной функции; f_i – експериментальна температура, що згладжена лінійно; перші похідні – константи)

Список літератури: **1.** *Алифанов, О.М.* Обратные задачи как методологическая основа идентификации тепловых механических моделей [Текст] / О.М. Алифанов // 4-й Минский междун. форум по тепло- и массообмену. – Минск, 2000. – Т. 3. – С. 3-13. **2.** *Мацевитый, Ю.М.* Обратные задачи теплопроводности [Текст]: в 2-х томах / Ю.М. Мацевитый. – К.: Наук. думка, 2003. – Т.1. – 460 с; Т. 2.– 392 с. **3.** *Підстригач, Я.С.* Умови теплового контакту твердих тіл [Текст] / Я.С. Підстригач. – доп. АН УРСР. – 1963. – № 7. – С. 872-874. **4.** *Підстригач, Я.С.* Вибрані праці [Текст] / Я.С. Підстригач. – К.: Наук. думка, 1995. – 460 с. **5.** *Кушнір, Р.М.* Ідентифікація температурних поля і напружень термочутливого циліндра за поверхневими деформаціями [Текст] / Р.М. Кушнір, А.В. Ясинський // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 2007. – № 6. – С. 55-61. **6.** *Чекурін, В.Ф.* До ідентифікації параметрів багатошарових покривів за термопружними переміщеннями поверхні нагрівання [Текст] / В.Ф. Чекурін, Б.В. Процюк // Фіз.-хім. механ. матеріалів. – 2004. – № 1. – С. 7-15. **7.** *Яцків О.І.* Деякі підходи до розв'язання задачі нагріву суцільного пружного циліндра за нестаціонарної граничної умови [Текст] / О.І. Яцків, Р.М. Швець, В.Я. Бобик // Прикл. проблеми механ. і матем. – 2007. – Вип. 5. – С. 186-194. **8.** *Бек Дж.* Некорректные задачи теплопроводности [Текст] / Дж. Бек, Б. Блакуэл, Ч. Сент-Клэр мл. – М.: Мир, 1989. – 312 с. **9.** *Веселовский, В.Б.* Расчет температурных полей и восстановление граничных условий для составных элементов конструкций [Текст] / В.Б. Веселовский, А.В. Берлов, В.В. Никуленко // Металлургическая теплотехника. Национальная металлургическая академия Украины: Сб. науч. трудов. – Днепропетровск: Пороги, 2004. – С. 238-249. **10.** *Веселовский, В.Б.* Решение задач теплопроводности для многослойных сред при неидеальном тепловом контакте [Текст] / В.Б. Веселовский // Тезисы докладов 2 Республиканской конференции. Выч. матем. в современном научно-тех. прогрессе. – К.: Наук. думка, 1978. – С. 51. **11.** *Веселовский, В.Б.* Решение прямых задач теплопроводности для многослойных пластин и построение алгоритмов восстановления граничных условий [Текст] / В.Б. Веселовский // Тезисы докладов 2 Республиканского симпозиума по дифференциальным и интегральным уравнениям. – О.: Одесский гос. ун-т, 1978. – С. 43-44. **12.** *Веселовский, В.Б.* Решение задач нестационарной теплопроводности для многослойных плоских тел с неидеальным тепловым контактом: [Текст] / В.Б. Веселовский // Прикладные вопросы аэродинамики летательных аппаратов. – К.: Наук. думка, 1984. – С. 140-144. **13.** *Веселовский, В.Б.* Математическое моделирование влияния полей различной физической природы на тепловые режимы элементов конструкций [Текст] / В.Б. Веселовский // Техническая механика. – 1993. – Вып. 1. – С. 114-117. **14.** *Веселовский, В.Б.* Метод последовательных интервалов в исследовании теплофизических процессов [Текст] / В.Б. Веселовский // Металлургическая теплотехника. Национальная металлургическая академия Украины: Сб. науч. трудов. – Днепропетровск: Пороги, 2004. – С. 225-265.

Надійшла до редколегії 23.01.13

УДК 536.2

Дослідження та відновлення функції тепловиділення в вузлах тертя за температурними даними [Текст] / **В.Б. Веселовський, Р.О. Самунь** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Енергетичні та теплотехнічні процеси й устаткування. – Х.: НТУ «ХПІ», 2013. – № 13(987). – С. 125-130. – Бібліогр.: 14 назв. – ISSN 2078-774X.

Представлена математическая модель в задачах нестационарной теплопроводности для системы с неидеальным тепловым контактом на стыках в обобщенных переменных. Целью данного исследования есть разработка математических моделей узлов трения и определение параметров тепловыделения из решения обратных задач теплопроводности по температурным данным. Полученные результаты позволяют оценить разнообразные сочетания параметров многослойной системы пластин, функций тепловыделения, а также управлять тепловым состояние системы. Приведены результаты вычислительных экспериментов.

Ключевые слова: теплопроводность, узлы трения, фрикционное взаимодействие, нелинейная обратная задача, физико-механические свойства, краевые условия теплообмена.

A mathematical model of the generalized variables in non stationary heat conduction for system with imperfect thermal contact at the joints is presented. The purpose of this study is the development of mathematical models of friction units and dimensioning of heat release from the solution of inverse heat conduction problems. The Obtained results allow us to estimate a varied combinations of the parameters multilayer system of plates, heat release functions, and control the thermal state of the system. Results of computational experiments are given.

Keywords: thermal conductivity, friction units, frictional interaction, non-linear inverse problem, the physical and mechanical properties, heat transfer boundary conditions.