

Т.А. БАРАНОВА, асист., НТУ «ХП», Харків
О.М. ЛИТВИН, д.ф.-м.н., проф., УПА, Харків

ОПТИМАЛЬНІ БАЗИСНІ ФУНКЦІЇ В МЕТОДІ СКІНЧЕННИХ ЕЛЕМЕНТІВ

В статті пропонуються методи знаходження оптимальних базисних координатних функцій в методі скінченних елементів. З кожним вузлом розбиття пов'язана своя система координатних функцій. Розглянуто наближений та аналітичний розв'язки.

In article methods of a finding of optimal basis coordinate functions in the finite-element method are offered. The system of coordinate functions is connected to each node of a partition. The approximate and analytical solutions are considered.

Історія питання. Метод скінченних елементів (МСЕ) здобув загальне визнання як ефективний метод розв'язання найрізноманітніших задач математичної фізики. Одна з основних ідей МСЕ – спеціальний вибір координатних функцій та застосування варіаційних методів.

Широке розповсюдження методу скінченних елементів (МСЕ) визвало чисельні дослідження з побудови повних систем координатних функцій, які забезпечують:

- 1) потрібний клас диференційовності шуканого наближеного розв'язку в області інтегрування;
- 2) необхідний порядок збіжності наближеного розв'язку до точного;
- 3) точне задовільнення граничним умовам.

При цьому в залежності від способів розбиття області інтегрування на елементи (прямокутні і т.п.) при побудови повних систем одержали розповсюдження кусково-ермітові інтерполянти Р.Варга, Ж.Деклу, Г.И.Марчук, С.Г.Міхлін, Л.А.Оганесян та Л.А.Руховець, С.Б.Стечкін та Ю.Н.Суботін, Г.Стренг та Д.Фікс; Ф.С'ярле; Г.Біркгофф, М.Шульц, Р.Варга; Ю.Н.Суботін), багатоточкові формули Тейлора (О.М.Литвин та В.Л.Рвачов), атомарні функції (В.Л.Рвачов та В.А.Рвачов) та інші (М.Зламал, А.Женішек, А.Мітчел та Д.Маршал, А.Діас, Н.Кікухі, Ж.Тейлор, В.Г.Корнеєв).

Така велика кількість методів побудови координатних функцій методу скінченних елементів наводить на думку, що для кожної задачі існує оптимальна система координатних функцій (в деякому сенсі), яка відповідає вибраному способу розбиття області інтегрування на елементи та диференціальному операторові граничної задачі.

Вперше метод скінченних елементів з оптимальними базисними функціями, тобто оптимальний метод скінченних елементів (ОМСЕ), був викладений в 1978 році О. М. Литвином в роботі [1].

Постановка задачі. Викладемо ОМСЕ на прикладі тестової задачі: для самоспряженого еліптичного оператора другого порядку:

$$Au(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G, \quad (1)$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \overline{G} \quad (2)$$

де
$$Au(x, y) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(p_1(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p_2(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) + cu.$$

У варіаційній постановці задача (1)-(2) еквівалентна знаходженню мінімуму функціоналу

$$J(u) = \iint_G \left(p_1(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + p_2(x, y) \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + cu^2 - 2fu \right) dx dy \quad (3)$$

на класі функцій $W_2^1(G)$, що задовольняють граничній умові (2).

У цій роботі вважаємо, що область G складена з прямокутних елементів, $G \subset W = [0, a] \times [0, b]$. Введемо таку сітку:

$$\left\{ (x_k, y_l) \in G : x_k = \frac{ak}{M}, y_l = \frac{bl}{N}, k = \overline{0, M}, l = \overline{0, N} \right\}$$

$\Pi_{kl} = \{(x, y) : x_k \leq x \leq x_{k+1}; y_l \leq y \leq y_{l+1}\}$ - елемент розбиття. Будемо шукати наближений розв'язок задачі у вигляді:

$$\tilde{u}(x, y) = \sum_{(k,l) \in \mathfrak{S}} u_{kl} h_{kl}(x) H_{kl}(y) \quad (4)$$

де u_{kl} - невідомі сталі, $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ -- невідомі функції з властивостями:

$$h_{kl}(x_i) = \delta_{ik}, \quad H_{kl}(y_j) = \delta_{jl}, \quad \text{а} \quad \mathfrak{S} = \{(k, l) | (x_k, y_l) \in G\} \subset \{k = \overline{1, M-1}, l = \overline{1, N-1}\}.$$

Інтерполяційні властивості (4): $\tilde{u}(x_k, y_l) = u_{kl}$. Якщо покласти $\tilde{u}(x_k, y_l) = 0, (x_k, y_l) \in \partial G$, то $\ddot{u}(x, y)$ задовольняє граничній умові (2)

Методи розв'язку.

Для спрощення викладу матеріалу розглянемо випадок, коли $p_1(x, y) = 1, p_2(x, y) = 1, c = 0$, задача (1)-(2) має вигляд

$$\Delta u(x, y) = f(x, y), \quad (x, y) \in G,$$

$$u(x, y) = 0, \quad (x, y) \in \partial \overline{G},$$

та у варіаційній постановці еквівалентна знаходженню мінімуму функціоналу

$$J(u) = \iint_G \left(\left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u(x, y)}{\partial y} \right)^2 - 2fu \right) dx dy.$$

В роботі О.М.Литвина [1], див. також [2, с.306-307], коли вважається, що $h_{kl}(t) = H_{kl}(t) = h(t)$, тобто з усіма вузлами розбиття зв'язується одна базисна координатна функція, знайдено явний вигляд цієї функції ($f(x, y) = -2$):

$$h(t) = \frac{1 - 2\gamma}{2} \frac{ch\mu(t - 0.5)}{ch0.5\mu} - \frac{sh\lambda(t - 0.5)}{sh0.5\lambda} + \gamma,$$

яка є розв'язком симетрично-граничної задачі:

$$R_1 h''(t) + R_2 h''(1-t) - R_3 h(t) - R_4 h(1-t) = g, \quad 0 < t < 1, \quad h(0) = 1, \quad h(1) = 0,$$

де $\gamma = \frac{-g}{R_3 + R_4}$, а числа λ, μ знаходяться із системи $(R_1 + R_2)\mu^2 - (R_3 + R_4) = 0$,

$(R_1 - R_2)\lambda^2 - (R_3 - R_4) = 0$, R_1, R_2, R_3, R_4 функціонали, що залежать від $\int_0^1 (h^{(s)}(t))^2 dt$, $\int_0^1 h^{(s)}(t)h^{(s)}(1-t)dt$, $s=0,1$ та невідомих C_{ij} .

Далі розглянемо розв'язок задачі, коли $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ – різні невідомі функції.

1. Базисні координатні функції у вигляді кусково-лінійних сплайнів.

В даній статті використовується випадок (див. [3]), коли $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ симетричні в околі точки (x_k, y_l) (в загальному випадку $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ не симетричні). $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ мають такі властивості: $h_{kl}(0) = 1$, $h_{kl}(1) = 0$, $H_{kl}(0) = 1$, $H_{kl}(1) = 0$.

Будемо шукати $h_{kl}(x)$ і $H_{kl}(y)$ у вигляді:

$$h_{k,l}(x) = \left(\left(-\frac{MR}{a}x + r + 1 + (k-1)R \right) h_{k,l,r} + \left(\frac{MR}{a}x - r - (k-1)R \right) h_{k,l,r+1} \right),$$

$$x \in [x_{k-1,r}, x_{k-1,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, M-1};$$

$$h_{kl}(x) = \left(\left(-\frac{MR}{a}x + r + 1 + kR \right) h_{k,l,R-r} + \left(\frac{MR}{a}x - r - kR \right) h_{k,l,R-r-1} \right),$$

$$x \in [x_{k,r}, x_{k,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, M-1};$$

$$H_{kl}(y) = \left(\left(-\frac{NR}{b}y + r + 1 + (l-1)R \right) H_{k,l,r} + \left(\frac{NR}{b}y - r - (l-1)R \right) H_{k,l,r+1} \right),$$

$$y \in [y_{l-1,r}, y_{l-1,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, N-1}.$$

$$H_{kl}(y) = \left(\left(-\frac{NR}{b}y + r + 1 + lR \right) H_{k,l,R-r} + \left(\frac{NR}{b}y - r - lR \right) H_{k,l,R-r-1} \right),$$

$$y \in [y_{lr}, y_{l,r+1}], \quad r = \overline{0, R-1}, \quad l = \overline{1, N-1}.$$

де $x_{k,r} = x_k + \frac{ar}{MR}$, $y_{l,r} = y_l + \frac{br}{NR}$. На першому етапі $h_{klr} = \frac{r}{R}$, $H_{klr} = \frac{r}{R}$, $r = \overline{0, R}$. Таким чином, наші базисні функції - це сплайни степеня 1. Невідомі u_{kl} , h_{klr} і H_{klr} пропонується знаходити ітераційними методами за схемою:

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial u_{kl}} = 0, \quad (h_{klr} \text{ і } H_{klr} - \text{відомі}), \quad \frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial h_{klr}} = 0, \quad (u_{kl} \text{ і } H_{klr} - \text{відомі}),$$

$$\frac{\partial J(\tilde{u})}{\partial H_{klr}} = 0, \quad (u_{kl} \text{ і } h_{klr} - \text{відомі}), \quad k = \overline{1, M-1}, \quad l = \overline{1, N-1}, \quad r = \overline{1, R-1}.$$

Тобто, в даному випадку система Ритця є системою лінійних алгебраїчних рівнянь.

Результати роботи обчислювальних програм, складених за даними алгоритмами, свідчать, що для досягнення похибки розв'язку порядку $o(\varepsilon^4)$ потрібно набагато менше елементів розбиття.

Таблиця 1

Характеристики функції для випадку $N=M=2$ на квадраті $G = \{[0, a] \times [0, a]\}$ для розв'язку задачі (1)-(2) ($a = 1$, $f(x, y) = -2$).

	$\tilde{u}\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$	$\iint_G u(x, y) dx dy$	$\tau_x(G\theta) = \frac{\partial u(x, y)}{\partial x}$	Значення R
Наближений ОМСЕ	0.147395	0.069189	0.599352	5
Точний розв'язок	0.147355	0.070319	0.675314	

Таблиця 2

Кількість вузлів сітки (N) та похибка (ε) при розв'язанні задачі (1) – (2) для кута $G = \{[0, a] \times [0, a]\} \setminus \{[c, a] \times [c, a]\}$.

a/c	N		ε	Кількість ітерацій
	МСЕ	Наближений ОМСЕ	Похибка	
2	261	9	$4 \cdot 10^{-3}$	10
2.5	351	16	$2 \cdot 10^{-3}$	12
3	897	25	$8 \cdot 10^{-4}$	16
4	2125	49	$2 \cdot 10^{-4}$	20

2. Аналітичний вигляд оптимальних базисних координатних функцій.

Знову розглянемо випадок (див.[4]), коли область G складена з прямокутників $\Pi_{kl} = \{(x, y) : x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}\}$, отриманих розбиттям області G прямими $x = x_i, i = \overline{0, m}; y = y_j, j = \overline{0, n}$.

Шукаємо оптимальні базисні функції у вигляді

$$\tilde{h}_{ij}(x) = \begin{cases} h_{0,i,j}(x), & x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ h_{1,i,j}(x), & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases}, \quad \tilde{H}_{ij}(y) = \begin{cases} H_{0,i,j}(y), & y_{j-1} \leq y \leq y_j \\ H_{1,i,j}(y), & y_j \leq y \leq y_{j+1} \\ 0, & y \notin [y_{j-1}, y_{j+1}] \end{cases}.$$

Вважаючи $\tilde{h}_{i,j}(x), \tilde{H}_{i,j}(y)$ відомими, знаходимо невідомі $u_{i,j}$ із системи

Рітця. $\frac{\partial J(u)}{\partial u_{i,j}} = 0, (i, j) \in \mathfrak{Z}$.

Для знаходження невідомих функцій розв'язуємо систему інтегродиференціальних рівнянь

$$\delta_{h_{p,y}(x)} J(u) = 0, \quad (u_{i,j} \text{ і } \tilde{H}_{i,j}(y) - \text{відомі}), \quad p = 0, 1,$$

$$\delta_{H_{q,y}(y)} J(u) = 0, \quad (u_{i,j} \text{ і } \tilde{h}_{i,j}(x) - \text{відомі}), \quad q = 0, 1.$$

Якщо введемо позначення $A_{ijkl} = u_{i,j} \int_{a_2}^{b_2} \tilde{H}_{i,j}(y) \tilde{H}_{k,l}(y) dy,$

$$B_{ijkl} = u_{i,j} \int_{a_2}^{b_2} \tilde{H}'_{i,j}(y) \tilde{H}'_{k,l}(y) dy, \quad F_{ij}(x) = \int_{a_2}^{b_2} f(x, y) \tilde{H}_{i,j}(y) dy, \quad k = \overline{i-1, i+1},$$

$l = \overline{j-1, j+1}$ то система інтегро-диференціальних рівнянь прийме вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial h_{1,ij}(x)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial h'_{1,ij}(x)} &= (h_{1,ij}(x) B_{ijkl} + h_{0,i+1,j}(x) B_{i+1,jkl} + h_{1,i,j+1}(x) B_{ij+1kl} + \\ &+ h_{0,i+1,j+1}(x) B_{i+1,j+1kl} + h_{1,i,j-1}(x) B_{ij-1kl} + h_{1,i+1,j-1}(x) B_{i+1,j-1kl}) + F_{i,j}(x) - \\ &-(h''_{1,i,j}(x) A_{ijkl} + h''_{0,i+1,j}(x) A_{i+1,jkl} + h''_{1,i,j+1}(x) A_{ij+1kl} + h''_{0,i+1,j+1}(x) A_{i+1,j+1kl} + \\ &+ h''_{1,i,j-1}(x) A_{ij-1kl} + h''_{1,i+1,j-1}(x) A_{i+1,j-1kl}) = 0. \\ \frac{\partial F}{\partial h_{0,ij}(x)} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial h'_{0,ij}(x)} &= (h_{1,i,j}(x) B_{ijkl} + h_{0,i-1,j}(x) B_{i-1,jkl} + h_{1,i-1,j+1}(x) B_{i-1,j+1kl} + \\ &+ h_{0,i,j+1}(x) B_{ij+1kl} + h_{1,i,j-1}(x) B_{ij-1kl} + h_{1,i-1,j-1}(x) B_{i-1,j-1kl}) + F_{i,j}(x) - \\ &-(h''_{1,i,j} A_{ijkl} + h''_{0,i-1,j}(x) A_{i-1,jkl} + h''_{1,i-1,j+1}(x) A_{i-1,j+1kl} + h''_{0,i,j+1}(x) A_{ij+1kl} + \end{aligned}$$

$$+h''_{1,i,j-1}(x)A_{ij-1kl} + h''_{1,i-1,j-1}(x)A_{i-1j-1kl} = 0.$$

Якщо функції $h_{p,i,j}(x)$, $p = 0, 1$, $i = 1 \dots N-1$, $j = 1 \dots N-1$ записати у вигляді вектора

$$\vec{h}(x) = (h_{0,11}(x), h_{0,12}(x), \dots, h_{0,1N-1}(x), h_{1,11}(x), \dots, h_{1,1N-1}(x), \dots, h_{1,N-1N-1}(x))^T$$

та відповідно перенумерувати коефіцієнти A_{ijkl} , B_{ijkl} та $F_{ij}(x)$, то систему рівнянь можна записати у матричному вигляді:

$$\delta_{h_{p,ij}(x)} J(h) = 0, \quad A_1 \vec{h}''(x) - B_1 \vec{h}(x) = \vec{F}_1(x),$$

$$\delta_{H_{q,ij}(y)} J(H) = 0, \quad A_2 \vec{H}''(y) - B_2 \vec{H}(y) = \vec{F}_2(y),$$

Хай λ_k, \vec{C}_k , $k = 1, (M-1)(N-1)$ -- власні числа та власні вектори задачі $(A\lambda^2 - B)\vec{C} = 0$. Базисні функції мають вигляд

$$\vec{h}(x) = \sum_{k=1}^{(M-1)(N-1)} (\alpha_k ch\lambda_k x + \beta_k sh\lambda_k x) \vec{C}_k + \vec{h}_{част}(x),$$

$$\vec{H}(y) = \sum_{k=1}^{(M-1)(N-1)} (\gamma_k ch\lambda_k y + \varepsilon_k sh\lambda_k y) \vec{C}_k + \vec{H}_{част}(y).$$

Сталі $\alpha_k, \beta_k, \gamma_l, \varepsilon_l$ знаходимо з граничних умов.

На першому кроці функції $\tilde{h}_{i,j}(x)$, $\tilde{H}_{i,j}(y)$ вважаємо кусково-лінійними, як в класичному методі скінченних елементів. Точність розв'язку порівнюємо з аналітичним розв'язком у вигляді функціонального ряду.

Список літератури: 1. *Литвин О.Н.* Оптимальные схемы МКЭ. // Теоретические и прикладные вопросы дифференциальных уравнений и алгебра. Киев, 1978. С.160-165. 2. *Литвин О.М.* Методи обчислень. Додаткові розділи. Київ, Наукова думка, 2005. 332 с. 3. *Баранова Т.А., Литвин О.М., Федько В.В.* Про чисельну реалізацію оптимального методу скінченних елементів (задача Діріхле для рівняння Пуассона, прямокутні елементи. // Вісн. Львів. Політех., 1998, №337, Т. 2, С. 294--297. 4. *Баранова Т.А.* Аналітичний вигляд базисних функцій в оптимальному методі скінченних елементів // Праці міжнародного симпозіуму „Питання оптимізації обчислень (ПОО-XXXIII)”, присвяченої 50-річчю створення Інститута кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України. Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2007, С. 34-35.

Надійшла до редколегії 02.09.2010