

**В.Б. ГРИНЕВ**, д-р техн. наук, проф., ХГТУСА, Харьков;  
**Е.Г. ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**В.Т. ГРИШАКИН**, канд. техн. наук, ассист., ХНАДУ, Харьков

## **ИДЕНТИФИКАЦИЯ ПОДВИЖНОГО НАГРУЖЕНИЯ, ВОЗДЕЙСТВУЮЩЕГО НА ВЯЗКО-УПРУГУЮ ПЛАСТИНУ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ**

В статті пропонується засіб розв'язання прямих та обернених задач механіки деформованого твердого тіла на прикладі пластини, що лежить на пружній інерційній основі та перебуває під дією зосередженої рухомої сили. Задачі розглянуті для пластини теорії Кірхгоффа. Моделювання основи здійснено за допомогою теорії Власова-Леонтьєва. Урахування дисипації енергії коливань здійснено за допомогою моделі Фойгта.

В статье предлагается способ решения прямых и обратных задач механики деформируемого твердого тела на примере пластины, лежащей на упругом инерционном основании и находящейся под действием сосредоточенной подвижной силы. Задачи рассмотрены для пластин теории Кирхгоффа. Моделирование основания осуществлено с помощью теории Власова-Леонтьева. Учет диссипации энергии колебаний выполнен с помощью модели Фойгта.

The direct and inverse problems of deformable rigid body mechanics solving methods on example of the viscoelastic plate on elastic foundation under the action of the concentrated mobile force are offered in this article. Problems are considered for plate of the Khirhgoff theory. The foundation modeling is conducted with the help of the Vlasov-Leontiev theory. The account of fluctuation energy dissipation is carried out by means of the Foight model.

**Введение.** Настоящая статья посвящена решению обратной задачи динамики вязко-упругих пластин, лежащих на упругом инерционном основании типа Власова-Леонтьева. Рассмотренная задача относится к проблеме идентификации неизвестных нагрузок, воздействующих на элементы конструкций. При этом определение внешних сил производится на основе анализа их косвенных проявлений [1-3].

**Анализ публикаций.** В идейном смысле рассмотренные здесь задачи примыкаю к кругу вопросов, которые были рассмотрены в монографиях [4,5], а именно к задачам математической физики на материале математической теории упругости.

**Постановка задачи.** Задачу будем рассматривать с использованием дифференциального уравнения классической теории, которое приведено в работе [6], а именно:

$$\left(1 + \alpha \frac{\partial}{\partial t}\right) D \Delta \Delta w(x, y, t) + \rho h \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2} = q_z(x, y, t), \quad (1)$$

где  $\alpha$  – время релаксации деформаций;  $D = Eh^3 / (12(1 - \nu^2))$  – цилиндрическая жесткость пластины.

Предполагается, что колебания пластины нестационарны, а диссипация энергии колебаний в материале происходит согласно модели Фойгта [7].

Контакт между пластиной и основанием примем двухсторонним, причем горизонтальные перемещения отсутствуют как в материале пластины, так и в основании. Распределение вертикальных перемещений в основании описываются функцией  $\psi(z)$ , т.е.  $w_0(x, y, z, t) = w_0(x, y, t) \cdot \psi(z)$ . При этом функцию распределения  $\psi(z)$  будем выбирать в виде [8]:

$$\psi(z) = sh(\gamma_0(H - z)) / sh(\gamma_0 H), \quad (2)$$

где  $H$  – толщина сжимаемого слоя основания;  $\gamma_0$  – объемный вес материала основания.

На рис. 1 изображена схема рассматриваемой механической системы – прямоугольной плиты на упругом основании, вдоль которой движется сосредоточенная сила  $P(t)$  в направлении возрастания координаты  $x$ .

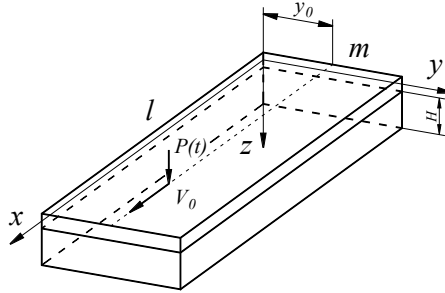


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины на основании

Поперечная нагрузка, действующая на пластину, имеет вид

$$q_z(x, y, t) = P(t)\delta(x - V_0 t)\delta(y - y_0) - R(x, y, t), \quad (3)$$

где  $P(t)$  – произвольная функция времени;  $R(x, y, t)$  – реакция упругого основания.

**Решение прямой задачи.** Согласно методике, предложенной в монографии [8], величина реактивных сил определяется в форме

$$R(x, y, t) = -2t_1 \Delta w(x, y, t) + k_1 \cdot w(x, y, t) + m_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (4)$$

где  $t_1 = \frac{E_0}{4(1 + \nu_0)} \int_0^H \psi^2(z) dz$ ;  $k_1 = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \int_0^H \psi'^2(z) dz$ ;  $m_0 = \rho_{zp} \int_0^H \psi^2(z) dz$ ;

$$E_0 = E_{zp} / (1 - \nu_{zp}^2); \nu_0 = \nu_{zp} / (1 - \nu_{zp}).$$

После подстановки в уравнение (1) выражений (3) и (4) получим

$$(1 + \alpha \partial / \partial t) D \Delta \Delta w(x, y, t) - 2t_1 \Delta w(x, y, t) + k_1 \cdot w(x, y, t) + (m_0 + m_1) \partial^2 w / \partial t^2 = P(t) \delta(x - V_0 t) \delta(y - y_0), \quad (5)$$

где  $m_1 = \rho \cdot h$  – удельная масса пластины.

Решение уравнения (5) искалось в форме двойного ряда Фурье

$$w(x, y, t) = \sum_k \sum_j w_{kj}(t) \sin(k\pi x / l) \sin(j\pi y / m). \quad (6)$$

Используя для решения указанного уравнения метод Фурье, а также воспользовавшись свойством ортогональности тригонометрических функций и свойством  $\delta$  - функции Дирака, а именно

$$\int_a^b f(x) \delta(x - c) dx = f(c), \quad a < c < b,$$

приведем (5) к виду

$$(m_1 + m_0) d^2 w_{kj}(t) / dt^2 + \alpha D dw_{kj}(t) / dt \cdot (\lambda_k^2 + \mu_j^2) + w_{kj}(t) \times \left( D(\lambda_k^2 + \mu_j^2) - 2t_1(\lambda_k^2 + \mu_j^2) + k_1 \right) = (4 / ml) P(t) \cdot \sin(\lambda_k V_0 t) \cdot \sin(\mu_j y_0). \quad (7)$$

Решение обыкновенного дифференциального уравнения (7) будем искать с помощью интегрального преобразования Лапласа во времени [9]. В пространстве изображений полученное уравнение примет вид

$$s^2 w_{kj}^L(s) + 2\tilde{n}_{kj} s w_{kj}^L(s) + \tilde{p}_{kj}^2 w_{kj}^L(s) = (4 / lm(m_1 + m_0)) F_{kj}^L(s), \quad (8)$$

где

$$2\tilde{n}_{kj} = \alpha D (\lambda_k^2 + \mu_j^2) / (m_1 + m_0); \quad \tilde{p}_{kj}^2 = \left[ D(\lambda_k^2 + \mu_j^2) - 2t_1(\lambda_k^2 + \mu_j^2) + k_1 \right] / (m_1 + m_0);$$

$$F_{kj}^L(s) \rightarrow P(t) \sin \lambda_k V_0 t \sin \mu_j y_0.$$

Решение уравнения (8) в пространстве изображений запишем в форме

$$w_{kj}^L(s) = \frac{4}{lm(m_1 + m_0)} \frac{F_{kj}^L(s)}{s^2 + 2\tilde{n}_{kj} s + \tilde{p}_{kj}^2}. \quad (9)$$

Используя стандартные правила обратного преобразования Лапласа, а также табличные соотношения справочника [9], получим

$$w_{kj}(t) = \frac{4}{lm(m_1 + m_0)} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kj}(t-\tau)} \frac{\sin \tilde{p}_{\partial k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial k} > 0;$$

$$w_{kj}(t) = \frac{4}{lm(m_1 + m_0)} \int_0^t P(\tau) \sin(\beta_k \tau) \sin(\mu_j y_0) e^{-\tilde{n}_{kj}(t-\tau)} \frac{\text{sh} \tilde{p}_{\partial k}(t-\tau)}{\tilde{p}_{\partial k}} d\tau, \quad \text{если } \tilde{p}_{\partial k} < 0, \quad (10)$$

$$\text{где } \tilde{p}_{\partial k} = \sqrt{\tilde{p}_{kj}^2 - \tilde{n}_{kj}^2}.$$

Общий вид решения дифференциального уравнения (1) при нагрузке, заданной в виде (3), получается путем подстановки формул (10) в ряд (6).

В рамках решения прямой задачи были проведены расчеты для прямоугольной пластины на упругом основании со следующими геометрическими и механическими характеристиками: длина пластины  $l=7$  м; ширина  $m=3$  м; толщина  $h=0,2$  м; плотность материала пластины  $\rho=2,5 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости материала пластины  $E=3,2 \cdot 10^3$  МПа; коэффициент Пуассона материала пластины  $\nu=0,3$ ; плотность материала основания  $\rho_{sp}=2 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>; модуль упругости основания  $E_{sp}=15,3$  МПа; коэффициент Пуассона материала основания  $\nu_{sp}=0,2$ ; толщина деформируемого слоя основания  $H=1$  м; величина подвижной нестационарной силы  $P=1$  кН; скорость движения силы  $V_0=500$  м/с.

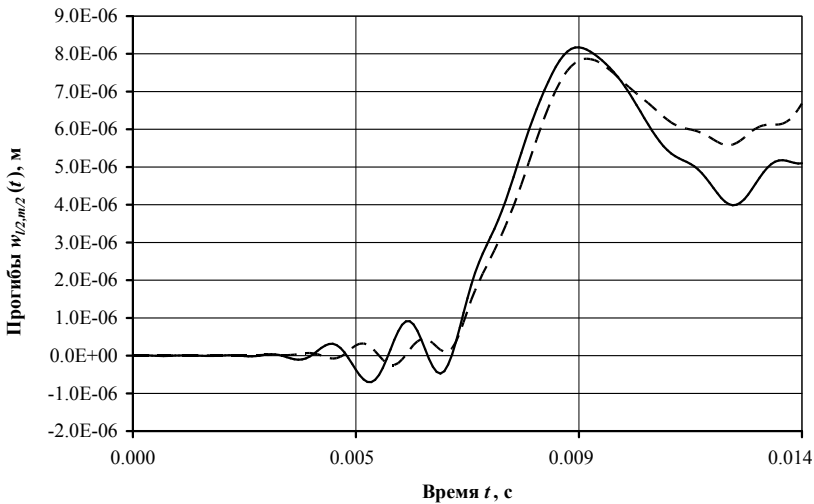


Рисунок 2 – Сопоставление результатов расчета перемещений центра пластины

На рис. 2 приведены результаты расчета перемещений точки с координатой  $(l/2, m/2)$  для пластины с внутренним трением, соответствующим значению  $\alpha=10^{-5}$  с, вычисленные с применением разложения в ряды Фурье (сплошная кривая) и с помощью теории метода конечных разностей (пунктирная кривая).

Из рис. 2 можно сделать вывод о том, что полученные двумя существенно разными методами результаты расчета перемещений центра вязко-упругой пластины на упругом основании типа Власова-Леонтьева, вызванные действием на пластину подвижной силы, хорошо согласованы.

**Решение обратной задачи.** Необходимость рассмотрения обратных задач связана, например, с открывающейся в результате их решения возможностью определения напряженно-деформированного состояния конструкций без априорного знания о воздействующих на них нагрузках. В состав комплекса операций, необходимых для решения обратной задачи для пластины, лежащей на упругом основании, может входить установка датчика для регистрации в произвольной точке исследуемой пластины перемещений или деформаций, численные значения которых используются в рамках решения обратной задачи для определения нагрузки.

В работах [10, 11] отмечалось, что решения обратных задач математической физики представляют собой сложнейшую проблему. Это же относится и к задачам математической теории упругости. Как правило, решение их в замкнутой аналитической форме практически невозможно, и их удается получить только для небольшого числа начально-краевых задач. Здесь же применяется метод решения некорректных задач математической теории упругости, основанный на введении регуляризирующего функционала согласно теории А.Н. Тихонова [11].

Как показали исследования [1-3], эффективным способом решения аналогичных задач является регуляризация матричного уравнения, согласно которого решается следующая система линейных алгебраических уравнений:

$$(A^T \cdot A + \alpha \cdot C) \cdot q = A^T \cdot w, \quad (11)$$

где  $A = A^* \cdot \sin(\lambda_k \cdot V_0 t)$ ;  $q$  – вектор, определяющий изменение силы во времени;  $C$  – трехдиагональная матрица, представленная в монографии [11].

На рис. 3 показаны результаты численного эксперимента, проведенного на примере пластины с указанными ранее геометрическими и механическими характеристиками.

В качестве исходных данных было принято изменение прогиба (кривая 3) в точке пластины с координатой  $(l/4, m/2)$ , вычисленное по формулам (6), (10), которое незначительно «зашумлялось» случайной величиной, составляющей максимум 2% от основной величины (кривая 2). На представленном рис. 3 кривые 2 и 3 при визуальной регистрации практически совпадают. Сплошной линией (кривая 1) показано изменение во времени силы, принятой при решении соответствующей прямой задачи, а пунктирной линией (кривая 4) – изменение во времени идентифицированной нагрузки с учетом эффекта «зашумления» исходных данных.

**Выводы.** На основе представленных результатов можно сделать вывод, что процедура применения сглаживающего функционала А.Н. Тихонова в проблеме изучения колебаний пластины на упругом основании при наличии в

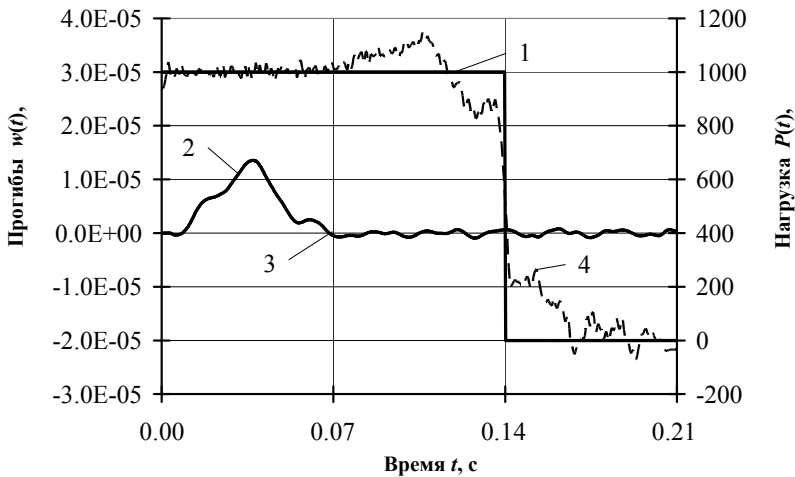


Рисунок 3 – Результат идентификации

уравнениях их движения диссипативных членов может довольно эффективно использоваться при решении обратных задач. Ранее эта процедура использовалась только при идентификации подвижных нагрузок для упругих и вязкоупругих балок и пластин без основания [1-3].

В заключение укажем, что на основе решения обратных задач теории упругости могут быть рассмотрены и принципиально другие проблемы, имеющие как фундаментальное, так и прикладное значение.

**Список литературы:** 1. Янютин Е.Г., Богдан Д.И., Гришакин В.Т. Идентификация подвижных нагрузок, действующих на балки и плиты. Збірник наукових праць Національного гірничого університету. – 2006, №24. – С. 145-150. 2. Янютин Є.Г., Гнатенко Г.О., Гришакин В.Т. Розв’язання нестационарних прямих та обернених задач для балок з пружним додатковим спіранням // *Машинознавство*. – 2007, №8. – С. 18-23. 3. Є.Г. Янютин, В.Т. Гришакин. Идентификация подвижных нагрузок, действующих на вязко-упругие балки и плиты. Сборник трудов // International Conference «Dynamical system modeling and stability investigation», (Киев, 27-29 мая 2009 г.). К.: Киевский нац. ун-т им. Тараса Шевченко, 2009. – С. 267. 4. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация элементов конструкций по механическим характеристикам. К.: Наук. думка, 1975. – 294 с. 5. Гринев В.Б., Филиппов А.П. Оптимизация стержней по спектру собственных значений. К.: Наук. думка, 1979. – 211 с. 6. Василенко Н.В. Теория колебаний: Учебное пособие. К.: Вища школа, 1992. – 430 с. 7. Пановко Я.Г. Внутреннее трение при колебаниях упругих систем. М.: Наука. – 1960. – 186 с. 8. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. М.: ФИЗМАТГИЗ, 1960. – 492 с. 9. Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высшая школа. – 1966. – 405 с. 10. Ватуплян А.О. Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007. – 224 с. 11. Тихонов А.Н., Арсенин В.Я. Методы решения некорректных задач. М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит.-ры, 1986. – 288 с.

Поступила в редколлегию 23.03.11