УДК 513.83

А.Г. КОШОВИЙ, магістр, НАУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків;
О.П. ПУХЛЯР, бакалавр, НАУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків;
Г.І. КОШОВИЙ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НАУ ім. М.Є. Жуковського «ХАІ», Харків

УЗАГАЛЬНЕННЯ КОНТИНУУМУ СЕРПІНСЬКОГО: ФРАКТАЛЬНІ КИЛИМИ ЗІ ЗМІННОЮ РОЗМІРНІСТЮ ХАУСДОРФА

Пропонуються узагальнення другого континуума Серпінського, які пов'язані з самоподібними фракталами зі змінною розмірністю Хаусдорфа. Проведений математичний аналіз отриманих дофрактальних структур та доведено ряд тверджень стосовно їх властивостей.

Предлагаются обобщения второго континуума Серпинского, которые связаны с самоподобными фракталами со сменной размерностью Хаусдорфа. Проведен математический анализ полученных предфрактальных структур и доказано ряд утверждений касательно их свойств.

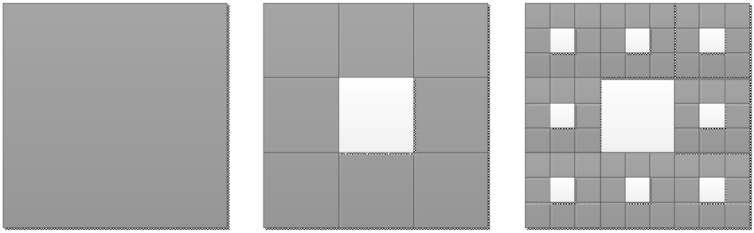
Generalizations of Sierpinski carpet are suggested. They deal with self similar fractals of variable Hausdorf dimension. Mathematical analyses of obtained prefractal structures are presented. Series of statements about their properties are proved.

Узагальнюючи дисконтинууми *Георга Кантора* (ДК) на двовимірний простір, польський математик *В. Серпінський*, побудував 2 континууми [1]. Перший з них, який має назву *трикутника Серпінського*, був створений у 1915 році, а другий, що зветься *килимом Серпінського*, роком пізніше. Його практичне застосування пов'язане з розвитком мобільного зв'язку, де виникла потреба у широкому діапазоні частот для збільшення кількості послуг. Тобто потрібна була антена некласичної структури. Такою виявилась фрактальна антена, де використовувались певні стадії побудови континуумів Серпінського (КС) [2,3]. Розширювати полосу частот можна як за рахунок зміни стадії побудови, так і змінюючи початкові об'єкти творення, а також сам закон творення.

У даній роботі пропонується ряд узагальнень другого КС, які пов'язані з узагальненням ДК, коли виникають самоподібні фрактали (СПФ) зі змінною розмірністю Хаусдорфа (РХ) [4]. Щоб розібратись у цих узагальненнях спочатку приділимо достатню увагу класичним СПФ, зокрема, побудові КС.

Другий континуум Серпінського. Цей самоподібний фрактал, що будується наступним чином. Беремо квадрат (ініціатор), ділимо його на дев'ять рівних частин і відкидаємо середню частину.

В результаті виникає початковий об'єкт творення, що звуть утворювачем (рис. 1 *б*). Далі він зменшується у три рази та заміщує кожний з восьми квадратів. Так виникає 64 квадрати, кожний з яких має $1/81$ від площі ініціатора. Цей процес зменшення та заміщення продовжується необмежено.



а *б* *в*

Рисунок 1– Початок побудови КС: ініціатор, утворювач та друга стадія побудови

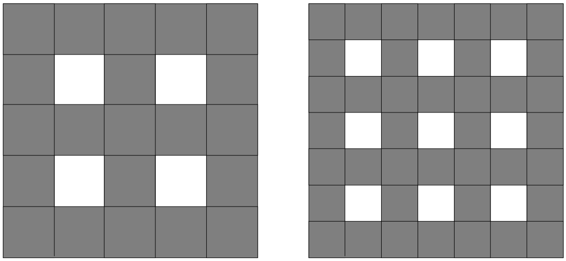
Як результат творення виникає ідеальний з математичної точки зору об'єкт, який зветься самоподібним фракталом, бо його розмірність Хаусдорфа $\ln 8/\ln 3$ є строго більшою за топологічну. Легко доводиться, що площа початкового квадрата повністю вичерпується.

Дійсно, на першому кроці відкидається квадрат, що становить $1/9$ площі, на другому 8 квадратів, кожний з яких становить $1/81$ площі і так далі. Таким чином, маємо геометричну прогресію зі знаменником $8/9$, сума якої дорівнює одиниці. Отже, в результаті віднімання отримаємо нуль і стає зрозумілим те, чому другий КС належить до канторових кривих і має одиничну топологічну розмірність. Інші тонкощі побудови та топологічну сутність другого КС можна знайти у підручнику [1].

Тут ми розглянемо тільки те, що потрібно з практичної точки зору. В першу чергу зазначимо, що використовуються тільки деякі стадії побудови, зокрема при розробці антен. Тому ці антени варто назвати, часто так і роблять, «дофрактальними» (prefractal). Як очевидно з рис.1, де зображена, зокрема, 2 стадія побудови двовимірного СПФ, маємо для неї тільки два можливих характерних внутрішніх розмірів вирізів $1/3$ та $1/9$ від сторони початкового квадрата. Відповідно, для довільної стадії творення таких характерних внутрішніх розмірів буде n (n - номер стадії чи порядок наближення до СПФ) і визначаються вони степенем трійки. Перейдемо тепер до можливих узагальнень в рамках математичної строгості означення СПФ, як множини, розмірність Хаусдорфа якої є строго більшою за топологічну.

Перше узагальнення КС. Почнемо з узагальнення пов'язаного з кількістю елементів розподілу ініціатора при побудові утворювача. Тут будемо наслідувати В.Серпінського, використавши СПФ з РХ $\ln 3/\ln 5$. Поділимо ініціатор, квадрат зі стороною 1, на 25 рівних частин і відкидаємо 4 з них, як показано на рис.2 *а*.

Далі зменшуємо утворювач у п'ять разів та заміщуємо ним кожний з 21 квадратів. Коли процес зменшення та заміщення продовжувати необмежено,

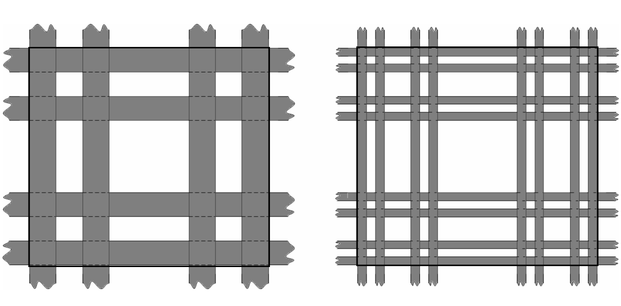


а *б*

Рисунок 2 – Утворювачі узагальнень КС5 та КС7

то виникне СПФ, що можна назвати КС5. Подібно до класичного КС обчислюється РХ КС5 – $\ln 21/\ln 5$. При діленні ініціатора на 49 рівних частин і відкиданні 9 частин, отримаємо утворювач, зображений на рис 2 *б.* З нього виникне СПФ, що можна назвати КС7, РХ якого дорівнює $\ln 40/\ln 7$ і т.д. Переваги цих узагальнень з точки зору основних характерних внутрішніх розмірів вирізів невеликі: характерний внутрішній розмір для утворювача КС – $1/3$, але виріз один (рис 1 *б*; $1/5$ – для утворювача КС5, але вирізів 4 (рис 2 *а*; $1/7$ – для утворювача КС7, але вирізів вже аж 9 (рис 2 *б*.) Ще раз зазначимо, що узагальнення не виходить за рамки математичного означення СПФ, чого не дотримуються деякі дослідники, та, особливо, розробники.

Друге узагальнення КС. Можна дещо змінити підхід до побудови КС, залишаючи ініціатор без змін та витлумачивши утворювач, як перетин двох площинних ґраток зі стрічок. І спробувати далі розглядати стадії творення як перетини однакових дофрактальних стрічкових ґраток (ДФСГ). Тоді другою стадією буде наступний об’єкт (рис. 3 *а*), що нагадує другу стадію побудови КС, зображену на рис. 1 *в*, але відрізняється від неї наявністю прямокутних вирізок.



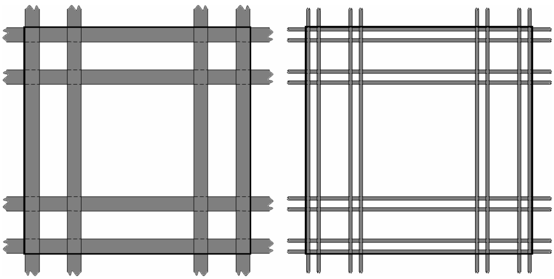
а *б*

Рисунок 3 – Перетини двох площинних ДГ з РХ $\ln 2/\ln 3$

(*а* – друга та *б* – третя стадії)

Третя стадія побудови, наведена на рис. 3 *б*, утворена перетином двох ДФСГ, що відповідають третій стадії побудови класичного ДК з РХ, що визначається виразом $\ln 2/\ln 3$. Зрозуміло, що в результаті нескінченного процесу тут теж виникає ідеальний об’єкт, що має схожі до попередніх властивості. Зокрема, можна довести вичерпність площі, бо розміри відповідних ДМК є нульовими, тобто, отримаємо канторову криву [1]. На відміну від попередніх СПФ, які позначались КС5 та КС7, назвемо його фрактальним килимом (ФК) і вказуватимемо номер 3 : ФК3.

Більш суттєвим узагальненням ФК3 може бути використання ДФСГ, які пов’язані з одновимірними СПФ зі змінною РХ [4]. Розпочнемо з простого їх класу, коли утворювачем буде пара сегментів, а РХ визначається виразом $\ln 2/\ln k, k > 2$. Якщо коефіцієнт подібності k є меншим, або більшим за 3, то другій стадії творення відповідає квадрат з прямокутними вирізами, зображений на рис. 4 *а.* Тут характерними внутрішніми розмірами будуть не два, а вже три $1-2/k, 1/k-2/k/k, 1/k/k$. Коли коефіцієнт подібності $k > 3$, то структура буде менш наповненою ніж зображені на рис. 1 та рис. 3, відповідно, коли $k < 3$, то структура буде більше наповненою. Можна взяти значення $k = 9, 27, \ldots, 3^n, \ldots$, тоді відповідна РХ буде $1/2, 1/3, \ldots, 1/n$ і наповнення буде швидко зменшуватись.

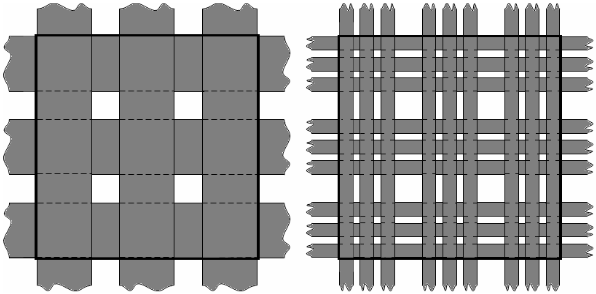


а *б*

Рисунок 4 – Перетини двох площинних ДГ з РХ $1/2$ (друга та третя стадії).

В результаті нескінченного процесу тут теж виникає ФК, що відрізняється від ФК3, тому будемо вказувати його номер за коефіцієнтом подібності k, тобто ФКk. Зокрема, при $k = 3$, маємо ФК3, тобто, це є узагальненням ФК3.

Другий, дещо складніший клас СПФ зі змінною РХ [5], має у якості утворювача три сегменти, тому вже на першій стадії побудови отримаємо квадрат з чотирма квадратними вирізами (див. рис. 5 *а*). При цьому вже можемо мати не один параметр, як у КС чи КС5, а два параметра. Друга стадія значно підвищує кількість вирізаних квадратів, з’являються прямокутні вирізи і, відповідно, збільшується кількість параметрів (див. рис. 5 *б*). Зазначимо, що РХ даного класу одновимірного СПФ дорівнює $\ln 3/\ln k,\, k > 3$, що доводиться подібно до ДК.



а *б*

Рисунок 5 – Перетини двох площинних ДГ з РХ $\ln 3/\ln 4$ (1 та 2 стадії).

Таким чином, друге узагальнення КС дає не один клас, а декілька класів ФК, які суттєво відрізняються як від першого узагальнення КС, так і між собою. Зазначимо, що принциповою є строга математична впорядкованість пропонованих двовимірних фрактальних об'єктів. Це дозволяє провести системний аналіз процесу їх побудови, подібно до того, як це зроблено для одновимірних СПФ зі змінною РХ. Такий аналіз важливий з огляду на можливе практичне застосування певних стадій побудови у моделюванні деяких радіотехнічних, акустичних пристроїв та процесів, що там можуть відбуватися. Та це вже виходить за межі даної статті. Тут дещо зупинимось на математичному аналізі процесу побудови фрактальних килимів.

Математичний аналіз фрактальних килимів. Зазначимо, що термін фрактал означає множину у n- вимірному евклідовому просторі R^n , у якої топологічна розмірність є строго меншою за розмірність Хаусдорфа (РХ). Класичним прикладом фракталу в R^2 є КС у якого топологічна розмірність дорівнює 1, а РХ дорівнює $\ln 8/\ln 3 > 1$. Перейдемо до аналізу дофрактальних структур утворених перетином двох ДФСГ, що відповідають одній стадії СПФ зі змінною РХ $\ln 2/\ln k,\, k > 2$. Під фрактальним килимом розуміємо об'єкт, що утворюється перетином двох однакових фрактальних стрічкових ґраток, впорядкованих відповідно до одновимірного СПФ.

Лема 1. *Фрактальний килим на основі СПФ з РХ* $\ln 2/\ln k$ *має нульову площу, тобто є канторовою кривою з одиничною топологічною розмірністю.*

Доведення. Звернемось до процесу побудови: на першому кроці маємо 4 квадрати та 4 прямокутники. Квадрати замінюються знову на 4 квадрати та 4 прямокутники кожний. Прямокутники замінюються на відрізки першої стадії, а далі на наступному кроці на відрізки другої стадії, і т.д. Тобто, вони за площею вичерпуються подібно до того, як вичерпується за лінійною мірою досконала множина Кантора: на першому кроці відкидаємо $(k-2)/k$ (залишається $2/k$) загальної лінійної міри початкового сегмента, на другому – $2(k-2)/k^2$, на n-му кроці $2^{n-1}\cdot(k-2)/k^n$. Порахуємо загальну суму довжин відрізків, що відкидаються

$$\frac{k-2}{k}\cdot(1+\frac{2}{k}+...+\frac{2^{n-1}}{k^{n-1}}+...)=\frac{k-2}{k}\frac{1}{1-2/k}=1.$$

Отже, будемо звертати увагу на квадрати: їх на другій стадії побудови буде 4^2, відповідно, на n-й стадії – 4^n. Проведемо дослідження їх площі.

Коли початковий квадрат (ініціатор) має одиничну площу, то за рахунок зменшення його сторони у k разів, викидають 4 квадрати, площа кожного з яких $1/k^2$.

Відповідно на n-стадії 4^n квадратів будуть мати загальну площу

$$(2/k)^{2n}.$$

Оскільки коефіцієнт самоподібності $k>2$, то $2/k<1$. В результаті граничного переходу при $n\to\infty$ прийдемо до нульової площі.

Лему доведено.

Таким чином, топологічна розмірність ФКk є одиничною. Визначимо розмірність Хаусдорфа частини ФКk, яку утворюють квадрати.

Лема 2. *Розмірність Хаусдорфа частини ФКk, що утворюється граничним процесом зменшення та зміщення квадратів становить* $\ln 4/\ln k$.

Доведення. Встановлюємо діаметри квадратів в залежності від стадії побудови. На першому кроці сторона квадрата $1/k$, а його діаметр $\sqrt{2}/k$.

На другому – $\sqrt{2}/k^2$, а на n-стадії маємо $\sqrt{2}/k^n$.

Відповідно їх кількість становить 4^n. Тоді, s-міра Хаусдорфа даної множини H^s визначається границею

$$H^S=\lim_{n\to\infty}\left(4^n\cdot\left(\sqrt{2}/k^n\right)^S\right)=2^{S/2}\cdot\lim_{n\to\infty}\left(4/k^S\right)^n$$

Щоб ця границя була скінченною і відмінною від нуля необхідно щоб $4=k^s$, звідки логарифмуванням знаходимо критичне значення s при якому значення H^s переходить від нуля до нескінченності. Це критичне значення $\ln 4/\ln k$ і є, за означенням, розмірністю Хаусдорфа. Лему доведено.

З цих двох лем випливає наступна теорема.

Теорема. *Фрактальний килим на основі СПФ з РХ* $\ln 2/\ln k$ *містить у собі самоподібний фрактал з РХ* $\ln 4/\ln k$ *, а його топологічна розмірність дорівнює 1, тобто він є самоподібним фракталом зі змінною розмірністю Хаусдорфа.*

Подібним чином можна довести фрактальність і інших класів килимів.

Висновки. В межах строгого математичного означення самоподібного фракталу проведено узагальнення другого континууму Серпінського. В результаті отримано декілька класів самоподібних фракталів (фрактальних килимів) у двовимірному просторі, які мають характерні властивості континуумів Серпінського: вони є канторовими кривими і їх розмірності Хаусдорфа перевищують 1, але менші за 2.

Перший клас фрактальних килимів побудований на основі зміни початкового об'єкта творення – утворювача, при цьому використовуються дисконтинууми Кантора зі змінною розмірністю Хаусдорфа:

$$\ln 2/\ln 3\,,\ \ln 3/\ln 5\,,\ \ln 4/\ln 7\,.$$

При першому узагальненні принцип творення залишається без змін.

Другий клас фрактальних килимів утворюється, як результат перетину фрактальних стрічкових ґраток. В свою чергу стрічки у ґратках впорядковані у відповідності з самоподібними фракталами з різними розмінностями Хаусдорфа

$$\ln 2/\ln k\,,\ k>2\,,\ \ln 3/\ln k\,,\ k>3\,.$$

У випадку дофрактальних структур утворених перетином двох дофрактальних ґраток (ДФГ), що відповідають одній стадії СПФ зі змінною РХ $\ln 2/\ln k\,,\ k>2$, проведений математичний аналіз.

Зазначимо, ФК застосовується у якості елемента фрактальної антени, тому наступним має бути розгляд математичних моделей розсіювання електромагнітних та акустичних хвиль [6].

Список літератури: **1.** *Александров П. С.* Введение в теорию множеств и общую топологию — М.: Наука. – 1977. **2.** *Puente C., Romeu J., Pous R., Cardama A.* On the behavior of the Sierpinski multiband fractal antenna // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 1998. – № 4. – P. 517-524. **3.** *Puente C., Borau C.B., Rodero M.N., Robert J.R.* An iterative model for fractal antennas: application to the Sierpinski casket antenna. // IEEE Transactions on antennas and propagation. – 2000. – № 5. – P. 713-719. **4.** *Кошовий Г. І.* Розсіювання електромагнітних хвиль системами стрічок зі змінною фрактальною розмірністю // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. 2007. – № 3. С. – 451–455. **5.** *Кошовий Г. І.* Розсіювання електромагнітних хвиль предфрактальними системами циліндричних стрічок // Радиофизика и электроника. – Х.: Ин-т радиофизики и электрон. НАН Украины. – 2007. – № 1. – С. 141–147. **6.** Теория дифракции / [Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.]. – М.: Мир, 1964. – 428с.

Надійшла до редколегії 23.03.11