

*Л.В.КУРПА*, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХП»;  
*М.А.БУДНІКОВ*, аспірант, НТУ «ХП»

## **ДОСЛІДЖЕННЯ НЕЛІНІЙНИХ ВИМУШЕНИХ КОЛИВАНЬ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН СКЛАДНОЇ ФОРМИ**

В роботі пропонується метод дослідження вимушених нелінійних коливань багатошарових пластин, який базується на теорії R-функцій та варіаційних методах. Задача розглядається в рамках класичної геометрично нелінійної теорії багатошарових пластин в припущенні відсутності розшарування та ковзання шарів. Завдяки використанню теорії R-функцій, метод може бути застосованим для пластин складної геометричної форми з різними способами закріплення. Показано порівняння результатів, що були отримані за допомогою запропонованого підходу, з відомими в літературі та представлені нові результати дослідження для пластин складної форми.

В работе предлагается метод исследования вынужденных нелинейных колебаний многослойных пластин, который базируется на теории R-функций и вариационных методах. Задача рассматривается в рамках классической геометрически нелинейной теории многослойных пластин в предположении отсутствия расслоения и проскальзывания слоев. Благодаря использованию теории R-функций, метод может быть использован для пластин сложной геометрической формы и с различными способами закрепления. Показано сравнение результатов, полученных с помощью разработанного подхода, с известными в литературе и представлены новые результаты исследования для пластин сложной формы.

In the present paper the method of investigation of the forced nonlinear vibrations of the laminated plates is proposed. The developed method is based on the R-functions theory and variational methods. The problem is considered with using the classic geometrically nonlinear theory of the laminated plates in assumption that delaminating between layers is absent. Due to application of R-functions, the method can be used for plates with different geometric forms and ways of fastening. Comparisons of the obtained results with results which are known in the literature are carried out. The new results for the plates with complex shape are presented.

**Вступ.** У сучасних конструкціях в якості розрахункових елементів широко застосовуються багатошарові пластини. Зазвичай при експлуатації на них діють різні навантаження, тому дослідження динамічної поведінки таких елементів з урахуванням нелінійних факторів, що виникають в реальних умовах, є актуальною задачею.

На даний момент існує велика кількість робіт, в яких розглядаються задачі про нелінійні коливання багатошарових пластин. Найбільш повний огляд літератури з даного питання виконано у роботах [1–5]. Слід зауважити, що в більшості існуючих статей розглядаються вільні коливання пластин прямокутної форми. Суттєво менша кількість публікацій присвячена дослідженню вимушених коливань багатошарових пластин [5,6]. Що ж стосується пластин більш складної форми, то таких робіт практично немає. В більшості представлених публікацій для розв'язання вказаного класу задач застосовується метод скінчених елементів (МСЕ) [2,5].

У даній роботі пропонується альтернативний підхід, що базується на теорії R-функцій та варіаційних методах.

**Постановка задачі.** Розглянемо задачу про вимушені коливання багатошарової пластини під дією поперечного навантаження  $F(t) = P \cos \Omega t$ . Припускається, що розшарування та ковзання шарів відсутні. Математичну постановку задачі виконаємо в рамках класичної геометрично нелінійної теорії багатошарових пластин, яка базується на гіпотезі недеформованих нормалей, прийнятої для всього пакету шарів пластини в цілому. Відповідно до цієї теорії:

- нормальний до серединної поверхні прямокутний елемент після деформації залишається прямолінійним, нормальним та зберігає свою довжину;
- нормальними напруженнями на площинах, які паралельні серединній площині, можна знехтувати.

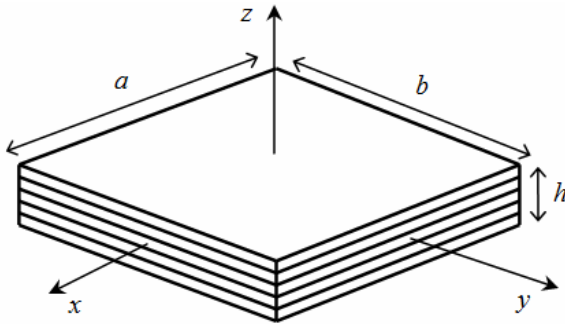


Рисунок 1 – Загальний вигляд багатошарової пластини

Нехтуючи силами інерції в серединній площині, систему рівнянь руху багатошарової пластини симетричної будови можна представити в операторній формі [7]:

$$\begin{cases} L_{11}(C_{ij})u + L_{12}(C_{ij})v = -Nl_1(w), \\ L_{21}(C_{ij})u + L_{22}(C_{ij})v = -Nl_2(w), \\ L_{33}(D_{ij})w = F - Nl_3(u, v, w) + m_1 \partial^2 w / \partial t^2. \end{cases} \quad (1)$$

Диференціальні оператори  $L_{ij}$ ,  $Nl_i$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) визначаються як:

$$L_{11}(C_{ij}) = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{12}(C_{ij}) = L_{21}(C_{ij}) = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{22}(C_{ij}) = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{33}(D_{ij}) = -D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} - 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} - 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} - 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} - D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$Nl_1(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{11}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{12}^{(N)}(w), \quad Nl_2(w) = \frac{\partial}{\partial x} N_{12}^{(N)}(w) + \frac{\partial}{\partial y} N_{22}^{(N)}(w),$$

$$Nl_3(u, v, w) = \frac{\partial}{\partial x} \left( N_{11} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{12} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( N_{12} \frac{\partial w}{\partial x} + N_{22} \frac{\partial w}{\partial y} \right),$$

де

$$N_{11}^{(N)}(w) = \frac{1}{2} C_{11} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$N_{22}^{(N)}(w) = \frac{1}{2} C_{12} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y},$$

$$N_{12}^{(N)}(w) = \frac{1}{2} C_{16} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}.$$

Приведені жорсткісні характеристики  $C_{ij}$ ,  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 6$ ) визначаються за формулами:

$$(C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^n \int_{-\frac{h_{s-1}}{2}}^{\frac{h_s}{2}} B_{ij}^s(1, z^2) dz.$$

Величина  $m_1$  визначається наступним чином:

$$m_1 = \sum_{s=1}^n \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz,$$

де  $\rho_s$  – щільність матеріалу  $s$ -го шару.

Система (1) доповнюється відповідними граничними і початковими умовами. У даній роботі розглядаються два види граничних умов:

1. Шарнірно-закріплений контур:  $u = 0, v = 0, w = 0, M_n = 0$ .
2. Жорстко закріплений контур:  $u = 0, v = 0, w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0$ .

**Метод розв'язання.** Функції  $u, v, w$  будемо шукати у вигляді:

$$\begin{cases} w(x, y, t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \cdot w_i^{(c)}(x, y), \\ u(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot u_{ij}(x, y), \\ v(x, y, t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=i}^n y_i(t) \cdot y_j(t) \cdot v_{ij}(x, y), \end{cases} \quad (2)$$

де  $w_i^{(c)}(x, y)$  – власні функції лінійної задачі про вільні коливання пластини.

Метод знаходження функцій  $w_i^{(c)}(x, y)$  у випадку багат шарових пластин різної форми описано в роботі [8].

Функції  $u_{ij}(x, y)$  та  $v_{ij}(x, y)$  є розв'язками системи:

$$\begin{cases} L_{11}(C_{ij})u_{ij} + L_{12}(C_{ij})v_{ij} = -NI_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \\ L_{12}(C_{ij})u_{ij} + L_{22}(C_{ij})v_{ij} = -NI_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}), \end{cases} \quad (3)$$

доповненої відповідними граничними умовами. Оператори  $NI_1^{(2)}$  та  $NI_2^{(2)}$  визначаються як:

$$\begin{aligned} NI_1^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \left( C_{11} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \left( C_{16} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right), \\ NI_2^{(2)}(w_i^{(c)}, w_j^{(c)}) &= \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \left( C_{16} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right) + \\ &+ \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \left( C_{66} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2 w_j^{(c)}}{\partial y^2} \right). \end{aligned}$$

Підставляючи вирази (2) для невідомих функцій  $u, v, w$  в рівняння (1), легко переконатися, що перші два рівняння руху системи (1) задовольняються тотожно.

Застосовуючи *процедуру Бубнова-Гальоркіна* до третього рівняння, і враховуючи ортогональність власних функцій  $w_i^{(c)}(x, y)$  ( $i = \overline{1, n}$ ), отримаємо нелінійну систему звичайних диференціальних рівнянь:

$$y_s''(t) + \omega_{L,s}^2 y_s(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n y_i(t) y_j(t) y_k(t) \gamma_{sijk} = \tilde{F}_s(t), \quad (4)$$

$$\text{де } \gamma_{sijk} = -\frac{1}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} \left[ N_{11}^{(p)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x^2} + N_{22}^{(p)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial y^2} + 2N_{12}^{(p)} \frac{\partial^2 w_k^{(c)}}{\partial x \partial y} \right] w_s^{(c)} d\Omega,$$

$$\tilde{F}_s(t) = -\frac{F(t)}{m_1 \|w_s^{(c)}\|^2} \iint_{\Omega} w_s^{(c)} d\Omega, \quad \begin{cases} N_{11}^{(p)} \\ N_{22}^{(p)} \\ N_{12}^{(p)} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{cases} \varepsilon_{11}^{(p)} \\ \varepsilon_{22}^{(p)} \\ \varepsilon_{12}^{(p)} \end{cases},$$

$$\varepsilon_{11}^{(p)} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_{22}^{(p)} = \frac{\partial v_{ij}}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x},$$

$$\varepsilon_{12}^{(p)} = \frac{\partial u_{ij}}{\partial y} + \frac{\partial v_{ij}}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial x} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial y} + \frac{\partial w_i^{(c)}}{\partial y} \frac{\partial w_j^{(c)}}{\partial x} \right)$$

При використанні одномодової апроксимації, система (4) значно спрощується та зводиться до одного рівняння:

$$y''(t) + \omega_L^2 y(t) + \gamma y^3(t) = \tilde{F}(t). \quad (5)$$

Рівняння (5) може бути розв'язано методом Бубнова-Гальоркіна [9]. Тоді залежність відношення  $\nu = \Omega/\omega_L$  від амплітуди  $A$  коливань пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  визначається за формулою:

$$\frac{\Omega}{\omega_L} = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \gamma A^2 \pm \frac{\tilde{P}}{A}}. \quad (6)$$

**Чисельні результати.** Для чисельної реалізації запропонованого метода було розроблено програмне забезпечення для системи POLE-RL, яке дозволяє розглядати багатошарові пластини симетричної будови зі складною формою плану. Тестування програми було виконано на ряді прикладів з використанням одномодової апроксимації.

**Задача 1.** Враховуючи, що одношарові пластини можна розглядати як окремий випадок багатошарових, розроблене програмне забезпечення було апробовано на прикладі ізотропної пластини ( $a/b = 1$ ,  $a/h = 100$ ). Результати порівняння відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань ізотропної пластини представлені в табл. 1. Максимальне відхилення не перевищує 0.63%. В табл. 2 наведені результати порівняння нелінійного частотного відношення  $\Omega/\omega_L$  для вимушених коливань ізотропної пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  при  $\tilde{P} = 0.2$ .

Таблиця 1  
Відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань  
ізотропної пластини

$A/h$	Нерухомий шарнір (а)		Жорстке закріплення (б)	
	Метод RFM	[4]	Метод RFM	[4]
0.2	1.0196	1.0196	1.0072	1.0073
0.4	1.0764	1.0767	1.0285	1.0288
0.6	1.1648	1.1659	1.0631	1.0636
0.8	1.2784	1.2813	1.1097	1.1106
1.0	1.4111	1.4168	1.1669	1.1681
1.2	1.5580	1.5678	1.2332	1.2347
1.4	1.7154	—	1.3072	—
1.6	1.8808	—	1.3877	—
1.8	2.0521	—	1.4736	—
2.0	2.2281	—	1.5641	—

Таблиця 2  
Відношення  $\Omega/\omega_L$  для  
вимушених коливань ізотропної  
пластини

$A/h$	Жорстке закріплення	
	Метод RFM	[4]
0.2	0.1701	0.1637
-0.2	1.4244	1.4245
0.4	0.7847	0.7561
-0.4	1.2711	1.2536
0.6	0.9628	0.9014
-0.6	1.2624	1.2161
0.8	1.1013	1.0145
-0.8	1.3088	1.2367
1	1.2342	1.0944
-1	1.3868	1.2634

На рис. 2 представлено порівняння амплітудно-частотних характеристик (АЧХ) для вимушених коливань ізотропної пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  при  $\tilde{P} = 0.2$ , що були отримані в даній роботі, з результатами роботи [4].

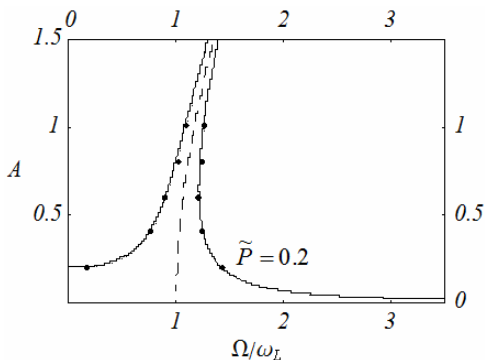


Рисунок 2 – АЧХ для вільних коливань ізотропної пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$  при  $\tilde{P} = 0.2$ ,

- які були отримані в даній роботі;
- які були отримані в роботі [4]

**Задача 2.** Розглянемо прямокутну п'ятишарову пластину з геометричними властивостями  $a/b=1$ ,  $a/h=100$ , яка виготовлена з матеріала [5]:

$$E_1 = 40E_2, \quad G_{12} = G_{13} = 0.6E_2, \quad G_{23} = 0.5E_2, \quad \nu_1 = 0.5. \quad (7)$$

У табл. 3 наведено порівняння отриманих результатів для вільних коливань пластини з різними варіантами укладання шарів з результатами роботи [5]. Аналіз порівняння показує, що максимальне відхилення  $\omega_{NL}/\omega_L$  не перевищує 1.6%.

Таблиця 3

Порівняння нелінійного частотного відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань прямокутної п'ятишарової пластини

	$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$				$(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$			
	Нерухомий шарнір (а)		Жорстке закріплення (б)		Нерухомий шарнір (в)		Жорстке закріплення (г)	
$A/h$	Метод RFM	[5]	Метод RFM	[5]	Метод RFM	[5]	Метод RFM	[5]
0.2	1.0313	1.0315	1.0078	1.0085	1.0146	1.0147	1.0069	1.0072
0.4	1.1198	1.1210	1.0309	1.0335	1.0571	1.0577	1.0274	1.0283
0.6	1.2536	1.2572	1.0682	1.0739	1.1244	1.1260	1.0607	1.0626
0.8	1.4199	1.4281	1.1183	1.1282	1.2123	1.2154	1.1056	1.1086
1.0	1.6086	1.6237	1.1797	1.1946	1.3168	1.3219	1.1608	1.1647
1.2	1.8127	1.8370	1.2505	1.2714	1.4342	1.4416	1.2248	1.2267

На рис. 3 представлені АЧХ для вимушених коливань прямокутної п'ятишарової пластини під дією поперечного навантаження

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$$

при  $\tilde{P} = 0.2$  та  $\tilde{P} = 0.4$  для наступних випадків укладання шарів та граничних умов:

- а)  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , нерухомий шарнір;
- б)  $(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$ , жорстке закріплення;
- в)  $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ , нерухомий шарнір;
- г)  $(45^\circ/-45^\circ/45^\circ/-45^\circ/45^\circ)$ , жорстке закріплення.

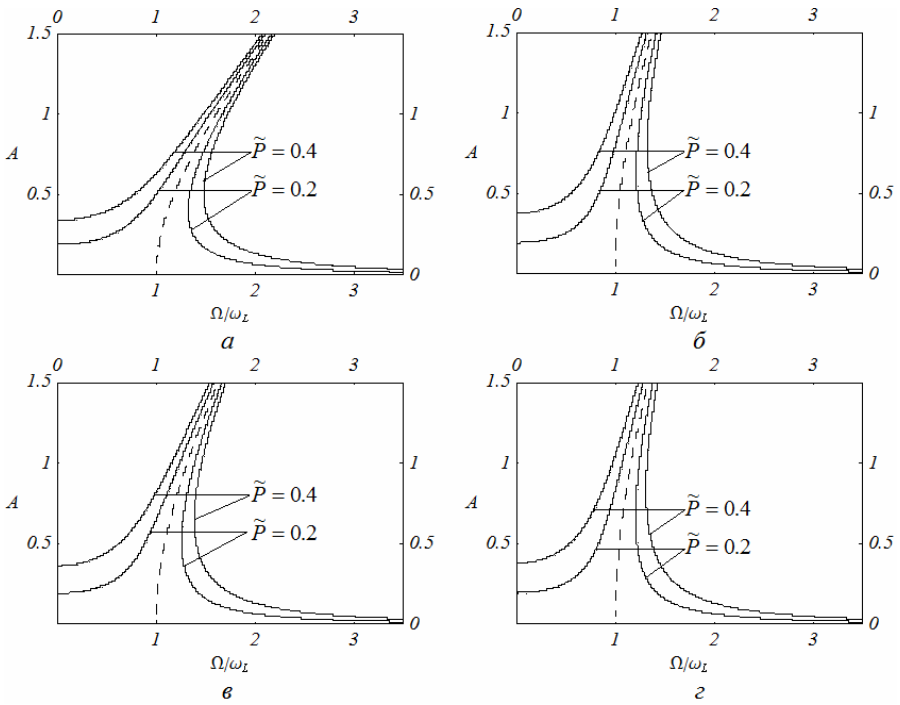


Рисунок 3 – АЧХ для вимушених коливань прямокутної п’ятишарової пластини під дією поперечного навантаження  $\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$ ,  $\tilde{P} = 0.2$  та  $\tilde{P} = 0.4$

**Задача 3.** Розглянемо п’ятишарову ортогонально армовану пластину з вирізами, зображену на рис. 4. Механічні параметри цієї пластини співпадають з (7).

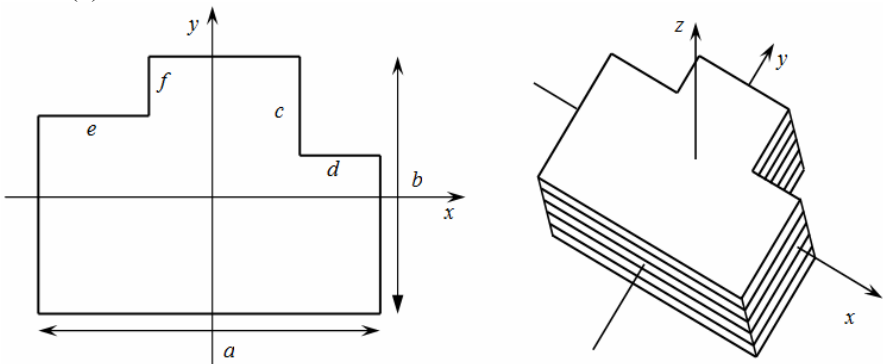


Рисунок 4 – П’ятишарова пластинка з вирізами



В табл. 4 наведені нелінійні частотні відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань пластини для різних значень  $c, d, e, f$ . Як видно з таблиці, при вирізах порядку  $0.01a$ , значення  $\omega_{NL}/\omega_L$  практично співпадають з відповідними значеннями  $\omega_{NL}/\omega_L$  при відсутності вирізів, що свідчить про вірогідність запропонованого алгоритма для пластин складної геометричної форми.

Таблиця 4

Відношення  $\omega_{NL}/\omega_L$  для вільних коливань пластини з вирізами

$(0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ)$						
Нерухомий шарнір (а)				Жорстке закріплення (б)		
$A/h$	$c = d = e = f = 0$	$c = d = e = f = 0.01a$	$c = f = 0.2a$ $d = e = 0.1a$	$c = d = e = f = 0$	$c = d = e = f = 0.01a$	$c = f = 0.2a$ $d = e = 0.1a$
0.2	1.0313	1.0312	1.0273	1.0078	1.0079	1.0079
0.4	1.1198	1.1196	1.1051	1.0309	1.0313	1.0311
0.6	1.2536	1.2531	1.2238	1.0682	1.0691	1.0687
0.8	1.4199	1.4191	1.3728	1.1183	1.1199	1.1192
1.0	1.6086	1.6075	1.5434	1.1797	1.1820	1.1810
1.2	1.8127	1.8114	1.7292	1.2505	1.2538	1.2524

На рис. 5 представлені АЧХ пластини, що розглядається, при умовах  $c = f = 0.2a, d = e = 0.1a$ , яка знаходиться під дією поперечного навантаження

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t$$

для випадків шарнірного спирання (рис. 5, а) та жорсткого закріплення (рис. 5, б).

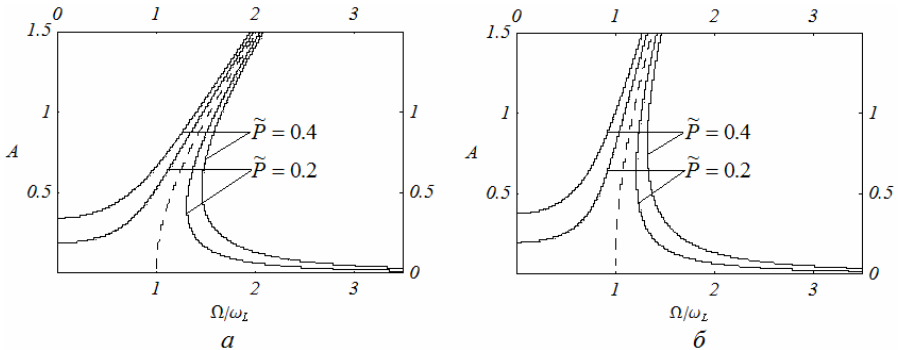


Рисунок 5 – АЧХ для вимушених коливань п'ятишарової пластини, яка зображена на рис. 4, під дією поперечного навантаження

$$\tilde{F}(t) = \tilde{P} \cos \Omega t \quad (\tilde{P} = 0.2 \text{ і } \tilde{P} = 0.4, c = f = 0.2a, d = e = 0.1a)$$

Як видно з рис. 3 та 5, резонансні криві для кожного випадку ( $\tilde{P} = 0.2$  и  $\tilde{P} = 0.4$ ) містять дві неперервні дуги, одна з яких лежить лівіше від скелетної кривої, зображеної пунктирною лінією, а друга – правіше.

При неперервній зміні частоти  $\Omega$  виникають області нестійких режимів, коли одному значенню  $\Omega$  відповідають три можливі дійсні значення амплітуди. В даній роботі алгоритм знаходження регіону нестійкості не розглядається. Зауважимо тільки, що перехід з однієї гілки резонансної кривої на іншу при зміні частоти відбувається завдяки стрибку амплітуд в зоні нестійкості.

**Перспективи подальших досліджень.** Надалі планується дослідження нелінійних вимушених коливань багатошарових пластин несиметричної будови в рамках класичної та уточненої теорії першого порядку.

**Висновки.** Запропонований підхід дозволяє розв'язувати задачі про вимушені коливання багатошарових пластин симетричної будови складної геометричної форми з різними граничними умовами.

Порівняння результатів, які були отримані у цій роботі, з відомими в літературі свідчить про достовірність запропонованого методу.

**Список літератури:** 1. *Abe A.* Nonlinear dynamic behaviors of clamped laminated shallow shells with one-to-one internal resonance / *A.Abe, Y.Kobayashi, G.Yamada* // Journal of Sound and Vibration – 2007. – 304. – P. 957-968. 2. *Amabili M.* Nonlinear vibrations and stability of shells and plates / *M.Amabili*. – Cambridge: Cambridge University Press, 2008. – 374 p. 3. *Qatu M.S.* Vibration of Laminated Shells and Plates / *M.S. Qatu* – Elsevier Ltd., Oxford. – 2004. 4. *Kadiri M. El.* Improvement of the semi-analytical method, based on Hamilton's principle and spectral analysis, for determination of the geometrically non-linear response of thin straight structures. Part III: steady state periodic forced response of rectangular plates / *M. El Kadiri, R.Benamar* // Journal of Sound and Vibration – Vol. 264, Issue 1, 26 June 2003. – P. 1-35. 5. *Singha M.K.* Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates / *M.K.Singha, R.Daripa* // Journal of Sound and Vibration. – 2009. – Vol. 328. – P. 541-554. 6. *Ribeiro P.* Non-linear vibration of composite laminated plates by the hierarchical finite element method / *P.Ribeiro, M.Petyt* // Composite Structures. – 1999. – 46. – P. 197-208. 7. *Амбарцумян С.А.* Общая теория анизотропных оболочек / *С.А. Амбарцумян* – М.: Наука, 1974. – 446 с. 8. *Курна Л.В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пластин и пологих оболочек / *Л.В.Курна* – Харків: НТУ “ХП”, 2009. – 408 с. 9. *Вольмир А.С.* Нелинейная динамика пластинок и оболочек / *А.С.Вольмир* – М.: Наука, 1972. – 432 с. 10. *Бабаков И.М.* Теория колебаний / *И.М. Бабаков* – М.: Наука, 1965. – 732 с.

Надійшла до редколегії 13.04.2011