

Л. В. КУРПА, д-р техн. наук, проф., НТУ "ХПІ";
О. С. МАЗУР, канд. физ.-мат. наук, ст. викл., НТУ "ХПІ";
В. В. ТКАЧЕНКО, аспірант, НТУ "ХПІ"

ПАРАМЕТРИЧНІ КОЛИВАННЯ БАГАТОШАРОВИХ ПЛАСТИН ПІД ДІЄЮ ПЕРІОДИЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Досліджено параметричні коливання та стійкість багатошарових пластин складної форми, навантажених статичним або динамічним навантаженням в серединній площині. Запронований метод базується на застосуванні теорії R-функцій та варіаційних методів. За допомогою представленого методу досліджено нелінійні коливання багатошарових пластин складної форми та отримані чисельні результати у вигляді областей динамічної нестійкості, резонансних кривих та ін.

Исследованы параметрические колебания и устойчивость многослойных пластин сложной формы, нагруженных в своей плоскости статической или динамической нагрузкой. Предложенный метод основан на применении теории R-функций и вариационных методов. С помощью представленного алгоритма исследованы нелинейные колебания многослойных пластин сложной формы и получены численные результаты в виде областей динамической неустойчивости, резонансных кривых и др.

The problem of parametric vibrations and stability analysis for the laminated plates with complex shape, loaded by static or periodic load in plane, for different types of boundary conditions is considered. The proposed method is based on the application of the R-functions theory and Ritz's method. For some cross-ply laminated plates with complex shape nonlinear behavior is investigated and instability domains, response curves are constructed.

Дана робота присвячена дослідженню параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин складної форми, що знаходяться під дією статичного або динамічного навантаження в серединній площині. Актуальність порушеної проблеми, перш за все, пов'язана з широким застосуванням композитних матеріалів для виготовлення пластинчатих елементів тонкостінних конструкцій. Особливий інтерес викликає дослідження динамічної поведінки багатошарових пластин, що знаходяться під дією різних видів навантажень, оскільки в цьому випадку гостро виникає питання збереження неушкодженості конструкції та розрахунку її на міцність.

Вивченню параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин присвячена велика кількість публікацій [1,6,9] та ін. Однак в цих роботах переважно розглянуто пластини канонічної форми, для яких докритичний стан є однорідним і відомим. Для дослідження нелінійної динаміки пластин зі складною формою та неоднорідним докритичним станом використовуються наближені методи, серед яких головним є метод скінченних елементів [10] (МКЕ). Одним із підходів для дослідженні даного класу задач є використання методу, що базується на теорії R – функцій [3] (RFM) та варіаційних методах. В роботах [7,8] такий підхід було застосовано для дослідження параметрич-

них коливань одношарових ізотропних та ортотропних пластин В представленій роботі RFM вперше розвинуто на новий клас задач, а саме параметричні коливання багатшарових пластин під дією статичних та періодичних зусиль в серединній площині. Запропонований підхід чисельно реалізовано в рамках системи POLE-RL та проілюстровано на ряді задач.

Математична постановка. Розглянемо багатшарову пластину симетричної структури постійної товщини h . Вважаємо, що пластина знаходяться під дією зусиль в серединній площині. Для математичної постановки задачі використаємо класичну теорію багатшарових пластин, яка базується на наступних гіпотезах:

- 1) пластина навантажена у своїй площині контурними зусиллями, поперечні навантаження відсутні;
- 2) докритичний напружений стан описується співвідношеннями лінійної теорії пружності, при цьому зміною розмірів пластини до втрати стійкості нехтуємо;
- 3) згин пластини моделюється за допомогою гіпотез Кірхгофа-Лява;
- 4) всі зовнішні навантаження змінюються пропорційно деякому параметру λ .

Представимо рівняння руху [5] в операторній формі

$$L_{11}u + L_{12}v = -Nl_1(w), \quad (1)$$

$$L_{21}u + L_{22}v = -Nl_2(w), \quad (2)$$

$$L_{33}w = Nl_3(u, v, w) + m_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (3)$$

де u, v, w – переміщення точок серединної площини в напрямках Ox , Oy та Oz відповідно. В рівняннях (1)-(3) диференціальні оператори L_{ij} , Nl_i $i, j = 1, 2, 3$ визначаються наступним чином:

$$L_{11} = C_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad L_{22} = C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{12} = L_{21} = C_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (C_{12} + C_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial y^2 \partial x^2} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial y^3 \partial x} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4},$$

$$Nl_1 = \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} C_{11} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{16} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} +$$

$$+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\},$$

$$\begin{aligned}
Nl_2 &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \frac{1}{2} C_{16} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{26} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{66} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\} + \\
&+ \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \frac{1}{2} C_{12} \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} C_{22} \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + C_{26} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right\}, \\
Nl_3 &= N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}.
\end{aligned}$$

Тут N_x , N_y , N_{xy} – нормальні та тангенціальні зусилля, що діють у серединній площині, та визначаються для багатошарових пластин симетричної структури за відомими формулами [1,4,5], представленими нижче в матричній формі:

$$\vec{N} = (N_x, N_y, N_{xy})^T = \mathbf{C} \cdot \vec{\varepsilon},$$

де

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{16} \\ C_{12} & C_{22} & C_{26} \\ C_{16} & C_{26} & C_{66} \end{pmatrix}, \quad \vec{\varepsilon} = (\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})^T.$$

Компоненти деформації ε_x , ε_{xy} , ε_y , визначаються як:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2; \quad \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2.$$

Величини m_1 , C_{ij} , D_{ij} ($ij = 11, 22, 12, 16, 26, 66$) мають наступний вигляд:

$$m_1 = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} \rho_s dz, \quad (C_{ij}, D_{ij}) = \sum_{s=1}^N \int_{h_s}^{h_{s+1}} B_{ij} (1, z^2) dz.$$

Тут ρ_s – щільність, а B_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) – пружні сталі s -го шару. Якщо шари пластини виготовлені з ортотропного матеріалу, головні напрямки пружності яких не збігаються з напрямками осей координат x і y , тоді пружні константи B_{ij} ($i, j = 1, 2, 6$) кожного шару визначаються за нижче поданими формулами [5]:

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \tilde{B}_{11} \cos^4 \theta + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{B}_{22} \sin^4 \theta, \\
B_{22} &= \tilde{B}_{11} \sin^4 \theta + 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \tilde{B}_{22} \cos^4 \theta, \\
B_{12} &= \tilde{B}_{12} + [\tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66})] \sin^2 \theta \cos^2 \theta, \\
B_{16} &= \frac{1}{2} [\tilde{B}_{22} \sin^2 \theta - \tilde{B}_{11} \cos^2 \theta + (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2\theta] \sin 2\theta,
\end{aligned}$$

$$B_{26} = \frac{1}{2} \left[\tilde{B}_{22} \cos^2 \theta - \tilde{B}_{11} \sin^2 \theta - (\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \cos 2\theta \right] \sin 2\theta,$$

$$B_{66} = \tilde{B}_{66} + \left[\tilde{B}_{11} + \tilde{B}_{22} - 2(\tilde{B}_{12} + 2\tilde{B}_{66}) \right] \sin^2 \theta \cos^2 \theta,$$

де пружні постійні \tilde{B}_{ij} визначаються як

$$\tilde{B}_{11} = \frac{E_1}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \tilde{B}_{22} = \frac{E_2}{(1-\nu_1\nu_2)}, \quad \tilde{B}_{12} = \frac{\nu_2 E_1}{(1-\nu_1\nu_2)} = \frac{\nu_1 E_2}{(1-\nu_1\nu_2)},$$

$$\tilde{B}_{66} = G_{12}, \quad \tilde{B}_{44} = G_{23}, \quad \tilde{B}_{55} = G_{13}.$$

Система рівнянь (1)-(3) доповнюється граничними умовами, які залежать від способу закріплення краю пластини. Розглянемо деякі з них.

(C1) – жорстко затиснена пластинка:

$$u_n = 0, \quad v_n = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0; \quad (4)$$

(SS1) – вільно оперта пластинка рухома в площині:

$$N_n = 0, \quad T_n = 0; \quad w = 0, \quad M_n = 0; \quad (5)$$

(SS2) – вільно оперта нерухома в площині пластинка

$$u_n = 0, \quad v_n = 0; \quad w = 0, \quad M_n = 0; \quad (6)$$

(SS3) – вільно оперта частково рухома в площині:

$$u_n = 0, \quad T_n = 0, \quad w = 0, \quad M_n = 0. \quad (7)$$

На навантаженій частині контуру граничні умови в площині визначимо як

$$N_n = -p, \quad T_n = 0. \quad (8)$$

В формулах (4)-(8) N_n, T_n, u_n, v_n визначаються за формулами

$$N_n = N_x l^2 + N_y m^2 + 2N_{xy} lm, \quad T_n = N_{xy} (l^2 - m^2) + (N_y - N_x) lm,$$

$$u_n = ul + vm, \quad v_n = -um + vl;$$

тут l та m – направляючі косинуси нормалі до границі області.

Для зручності подальшого викладення представимо сили N_n, T_n наступним чином:

$$N_n = N_n^{(L)} + N_n^{(N)}, \quad T_n = T_n^{(L)} + T_n^{(N)},$$

де

$$N_n^{(L)} = \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11} l^2 + C_{12} m^2 + 2C_{16} lm) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{12} l^2 + C_{22} m^2 + 2C_{26} lm) +$$

$$+ \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) (C_{16} l^2 + C_{26} m^2 + 2C_{66} lm),$$

$$N_n^{(N)} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{11} l^2 + C_{12} m^2 + 2C_{16} lm) +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{12} l^2 + C_{22} m^2 + 2C_{26} lm) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (C_{16} l^2 + C_{26} m^2 + 2C_{66} lm), \\
T_n^{(L)} = & \frac{\partial u}{\partial x} (C_{11} (l^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11}) lm) + \frac{\partial v}{\partial y} (C_{26} (l^2 - m^2) + (C_{22} - C_{12}) lm) + \\
& + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) (C_{66} (l^2 - m^2) + (C_{26} - C_{16}) lm), \\
T_n^{(N)} = & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 (C_{16} (l^2 - m^2) + (C_{12} - C_{11}) lm) + \\
& + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 (C_{26} (l^2 - m^2) + (C_{22} - C_{12}) lm) + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w}{\partial y} (C_{66} (l^2 - m^2) + (C_{26} - C_{16}) lm).
\end{aligned}$$

Метод розв'язання. Поставлену задачу будемо розв'язувати в декілька етапів. По-перше, треба визначити докритичний стан пластини, а також розв'язати задачу про лінійні коливання пластини, що стискається контурними статичними зусиллями в серединній площині. Для визначення до критичного стану пластини необхідно розв'язати однорідну систему рівнянь

$$\begin{aligned}
L_{11} u_1 + L_{12} v_1 &= 0, \\
L_{21} u_1 + L_{22} v_1 &= 0
\end{aligned} \tag{9}$$

з неоднорідними граничними умовами

$$N_n^{(L)}(u_1, v_1) = -1, T_n^{(L)}(u_1, v_1) = 0. \tag{10}$$

Задача (9) – (10) є плоскою задачею теорії пружності, її варіаційна постановка зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу

$$I(u_1, v_1) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x^{(L)} \varepsilon_x + N_y^{(L)} \varepsilon_y + N_{xy}^{(L)} \varepsilon_{xy}) d\Omega + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(L)} u_{1n} d\Omega_1, \tag{11}$$

Де $\partial\Omega_1$ – навантажена частина границі. Побудову координатних функцій, що задовольняють граничним умовам для пластин складної форми будемо виконувати за допомогою методу R-функцій.

Розв'язавши задачу (10) - (11), отримуємо функції u_1 і v_1 , що дозволяють визначити неоднорідний докритичний стан, обчислюючи зусилля $N_x(u_1, v_1), N_y(u_1, v_1), N_{xy}(u_1, v_1)$.

Задача про лінійні коливання пластини, що навантажена в серединній площині, може бути розв'язана за допомогою методу Рітця як результат мінімізації функціоналу:

$$J = \Pi_{\max} - T_{\max}. \tag{12}$$

В (12) T_{\max} – кінетична енергія пластини, а Π_{\max} – потенціальна енергія пластини, які визначаються за наступними формулами:

$$T_{\max} = \frac{m_1 \Omega_L^2}{2} \iint_{\Omega} w^2 d\Omega,$$

$$P_{\max} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [(M_x \chi_x + M_y \chi_y + M_{xy} \chi_{xy}) + p_0 (N_x^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + N_y^{(L)}(u_1, v_1) \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + N_{xy}^{(L)}(u_1, v_1) \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y})] d\Omega,$$

де Ω_L – власна частота, що відповідає даному навантаженню p_0 , а M_x, M_y, M_{xy} – згинальні та крутильний моменти, які для багат шарових пластин симетричної структури визначаються за формулами:

$$\vec{M} = (M_x, M_y, M_{xy})^T = \mathbf{D} \cdot \vec{\chi}; \quad \text{де } \mathbf{D} = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix}, \quad \vec{\chi} = (\chi_x, \chi_y, \chi_{xy})^T.$$

В цих формулах компоненти деформації $\chi_x, \chi_{xy}, \chi_y$ визначаються як

$$\chi_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}; \quad \chi_{xy} = -2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}; \quad \chi_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}.$$

Таким чином, розв'язання лінійної задачі про коливання пластини зводиться до розв'язання задачі на власні значення при відповідних однорідних граничних умовах.

Для розв'язання нелінійної задачі представимо невідомі функції (u, v, w) у вигляді

$$w(x, y, t) = y(t) \cdot w_1(x, y), \\ u(x, y, t) = p u_1(x, y) + y^2(t) \cdot u_2(x, y), \quad v(x, y, t) = p v_1(x, y) + y^2(t) \cdot v_2(x, y). \quad (13)$$

Тут $w_1(x, y)$ – власна функція, що відповідає основній частоті лінійних коливань пластини під дією статичного навантаження p_0 , а функції (u_2, v_2) мають задовольняти рівнянням типу Ламе

$$L_{11}(u_2) + L_{12}(v_2) = -N_1(w_1), \quad (14) \\ L_{21}(u_2) + L_{22}(v_2) = -N_2(w_1)$$

та наступним граничним умовам:

$$N_n^{(L)}(u_2, v_2) = -N_n^{(N)}(w_1), \quad (15) \\ T_n^{(L)}(u_2, v_2) = -T_n^{(N)}(w_1).$$

Варіаційна постановка цієї задачі зводиться до знаходження мінімуму наступного функціоналу:

$$I(u_2, v_2) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_x \varepsilon_x + N_y \varepsilon_y + N_{xy} \varepsilon_{xy} - 2(Nl_1(w_1)u_2 + Nl_2(w_1)v_2)) d\Omega + \\ + \int_{\partial\Omega_1} N_n^{(N)}(u_2 l + v_2 m) + T_n^{(N)}(-u_2 m + v_2 l) d\Omega_1 .$$

Підставимо (13) в рівняння (3) та застосуємо до нього *метод Бубнова-Гальоркіна*. Тоді якщо пластина навантажена статичними зусиллями p_0 , отримуємо звичайне диференціальне рівняння наступного виду:

$$y_1''(t) + \Omega_L^2 (y(t) + \beta \cdot y^3(t)) = 0 . \quad (16)$$

У випадку, коли навантаження періодичне та має вигляд

$$p = p_0 + p_t \cos \theta t , \quad (17)$$

де p_0 – статичне навантаження, p_t – амплітуда змінної за часом частини навантаження, θ збуджуюча частота, отримуємо рівняння з періодичними коефіцієнтами

$$y_1''(t) + \Omega_L^2 ((1 - 2k \cdot \cos(\theta t))y(t) + \beta \cdot y^3(t)) = 0 . \quad (18)$$

Коефіцієнти k та β в (16), (18) визначаються наступним чином:

$$k = \frac{p_t}{2p_{kr}} , \quad \beta = - \frac{\iint_{\Omega} Nl_3(u_2, v_2, w_1) w_1 d\Omega}{m_1 \Omega_L^2 \|w_1\|^2} .$$

У випадку статичного навантаження розв'язок рівняння (16) представимо у вигляді

$$y(t) = A \cos \omega_N t ,$$

де A – амплітуда, ω_N – нелінійна частота, та застосуємо до (16) метод Бубнова-Гальоркіна. Таким чином, для статичного навантаження отримуємо залежність амплітуди коливань від відношенням нелінійної та лінійної частот $\nu = \omega_N / \Omega_L$:

$$\nu = \sqrt{1 + \frac{3}{4} \beta A^2} . \quad (19)$$

Якщо ж на пластину діє періодичне навантаження (17), тоді, як відомо, при деяких співвідношеннях параметрів навантаження та власної частоти коливань в системі виникають коливання з наростаючими амплітудами. Для визначення областей параметрів, що відповідають областям динамічної нестійкості (ОДН), згідно з принципом, викладеним в роботі Болотіна В.В. [2], розглянуто лінеаризоване рівняння

$$y_1''(t) + \Omega_L^2 (1 - 2k \cdot \cos(\theta t))y(t) = 0 . \quad (20)$$

Рівняння (20) — це добре досліджене *рівняння Мат'є*, розв'язки якого можуть бути або обмеженими, або необмежено зростаючими. Головна об-

ласть нестійкості (поблизу $\theta = 2\Omega_L$) обмежена кривими [2]:

$$\theta_1 = 2\Omega_L\sqrt{1-k}, \quad \theta_2 = 2\Omega_L\sqrt{1+k}. \quad (21)$$

Для аналізу нелінійних коливань після втрати стійкості будемо досліджувати нелінійне рівняння (18). Застосовуючи підхід, викладений в [2], отримуємо залежність між частотним відношенням $\theta/2\Omega_L$ та амплітудою коливань A :

$$A = \frac{2}{\sqrt{3\beta}} \sqrt{\frac{\theta^2}{4\Omega_L^2} - 1 \pm k}. \quad (22)$$

Чисельні результати. Будемо вивчати параметричні коливання багатошарових пластин з різними механічними характеристиками, які наведено в табл. 1.

Таблиця 1.

матеріал	E_1/E_2	G/E_2	$\nu_1 = \nu_2 E_1/E_2$
glass-epoxy	3	0.6	0.25
boron-epoxy	10	0.33	0.22
graphite	40	0.6	0.25

Вважаємо, що всі шари мають однакову товщину, а загальну товщину пластини приймаємо такою, що $h/a = 0.01$, де a – характерний розмір плану пластини.

Задача 1. Для тестування запропонованого алгоритму розглянемо коливання п'ятишарової пластини (рис. 1) з різними видами граничних умов (SS1, SS2, SS3, CI) та способами укладки шарів.

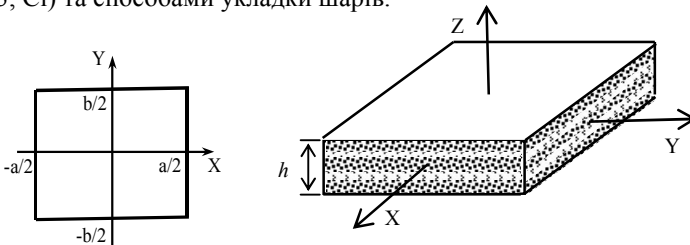


Рисунок 1 – Форма пластини

В табл. 2 наведені значення частотного відношення $\nu = \omega_N / \omega_L$ (ω_L – частота лінійних коливань ненавантаженої пластини). Відхилення отриманих результатів від результатів роботи [6] не перевищує 3%. Найсуттєвіше відхилення простежується для способу укладки шарів $45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$.

Таблиця 2

Порівняння значень частотного відношення $\nu = \omega_N / \omega_L$
для п'ятишарової квадратної пластини

$\nu = \omega_N / \omega_L$						
Граничні умови						
SS2		SS3			Cl	
A	RFM	[6]	RFM	[6]	RFM	[6]
Ортогтропна пластина (graphite), $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$						
0.2	1.03128	1.03147	1.00150	1.00165	1.00783	1.00847
0.4	1.11989	1.12099	1.00599	1.00658	1.03095	1.03347
0.6	1.25373	1.25723	1.01342	1.01473	1.06838	1.07390
0.8	1.42007	1.42805	1.02373	1.02599	1.11868	1.12820
1.0	1.60886	1.62368	1.03684	1.04023	1.18021	1.19461
1.2	1.81310	1.83697	1.05264	1.05729	1.25130	1.27141
Ортогтропна пластина (graphite), $45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$						
0.2	1.01332	1.01473	1.00930	1.00796	1.00850	1.00717
0.4	1.05227	1.05776	1.03671	1.03135	1.03356	1.02834
0.6	1.11417	1.12601	1.08084	1.06885	1.07404	1.06258
0.8	1.19545	1.21542	1.13975	1.11848	1.12828	1.10855
1.0	1.29246	1.32185	1.21129	1.17837	1.19436	1.16474
1.2	1.40195	1.44162	1.29337	1.24629	1.27054	1.22969

Таблиця 3

Залежність частотного параметру Λ від навантаження p_0 , $b/a = 1$

α \ p_0 / p_{kr}	Glass-epoxy					
	0	0.25	0.5	0.75	0.9	p_{kr}
0	25.836	22.375	18.270	12.921	8.176	5.755
$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$	28.568	24.742	20.204	14.290	9.044	7.147
$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$	29.183	25.276	20.640	14.599	9.240	7.456
$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$	28.568	24.742	20.204	14.290	9.044	7.119
α \ p_0 / p_{kr}	Boron-epoxy					
	0	0.25	0.5	0.75	0.9	p_{kr}
0	35.269	30.55	24.953	17.665	11.210	10.542
$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$	46.274	40.086	32.743	23.172	14.683	18.354
$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$	48.790	42.274	34.539	24.454	15.507	20.188
$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$	46.274	40.097	32.767	23.213	14.744	17.970

Для розглянутої пластини знайдено основні частоти коливань пластини під дією станичного навантаження в площині для граничних умов SS1.

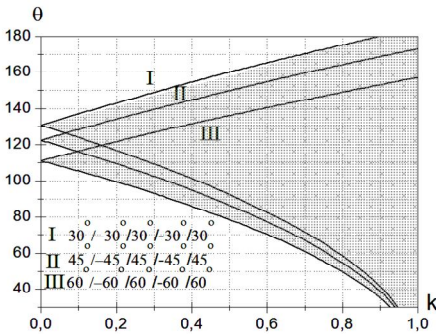
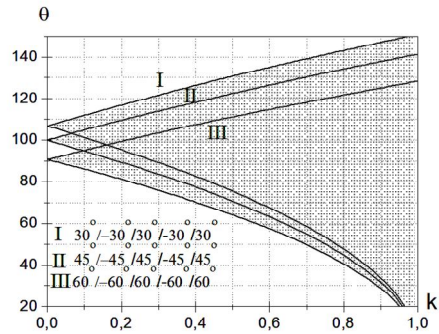
В табл.3,4 представлені результати аналізу впливу навантаження на частотний параметр

$$\Lambda = \Omega_L (a^2 / h) \sqrt{\rho / E_2}$$

для квадратної та прямокутної пластин ($b/a = 2$).

Залежність частотного параметру Λ від навантаження p_0 , $b/a = 2$

α	p_0 / p_{kr}				
	0	0.25	0.5	0.75	p_{kr}
0	76.706	66.430	54.241	38.358	12.683
$30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$	75.447	65.343	53.357	37.739	12.295
$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$	70.674	61.211	49.985	35.358	10.794
$60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$	64.162	55.568	45.375	32.092	8.903

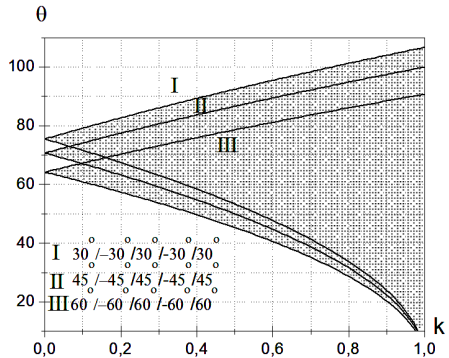
Рисунок 2 – ОДН ($p_0 / p_{kr} = 0.25$)Рисунок 3 – ОДН ($p_0 / p_{kr} = 0.5$)

Розглянемо параметричні коливання пластини. На рис.2,3,4 представлені області динамічної нестійкості (21), побудовані для

$$p_0 / p_{kr} = 0.25, 0.5, 0.75, \quad b/a = 2$$

та граничних умов SS1. Аналізуючи отримані результати, можна зауважити, що нестійкість виникає при більших значеннях збуджуючої частоти для пластин з поворотом осей ортотропії на кут $\alpha = 30^0$, тобто $30^0/-30^0/30^0/-30^0/30^0$.

При укладці шарів $60^0/-60^0/60^0/-60^0/60^0$

Рисунок 4 – ОДН ($p_0 / p_{kr} = 0.75$)

ОДН відповідають меншим значенням збуджуючої частоти.

Задача 2. Розглянемо задачу про параметричні коливання пластини складної форми, що знаходиться під дією періодичного навантаження, прикладеного вздовж сторін $x = \pm a/2$ паралельно осі OX , рис. 5. Дослідження бу-

ло проведено для граничних умов SS1. Структура розв'язку для розглянутих граничних умов для прогину має вид

$$W = \omega P_0, \quad (23)$$

де $\omega(x, y) = 0$ – рівняння границі області.

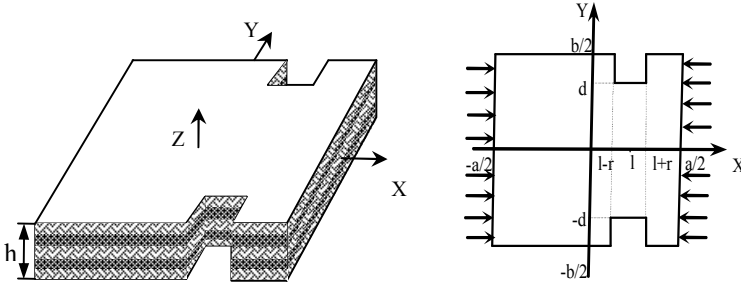


Рисунок 5 – Форма пластини

Функцію $\omega(x, y)$ побудуємо за допомогою теорії R-функцій [3]:

$$\omega(x, y) = f_1 \wedge_0 f_2 \wedge_0 (\bar{f}_3 \vee_0 f_4), \quad (24)$$

де функції f_1, f_2, f_3, f_4 визначаються за наступними формулами,

$$f_1 = \frac{1}{a} \left(\left(\frac{a}{2} \right)^2 - x^2 \right) \geq 0, \quad f_2 = \frac{1}{b} \left(\left(\frac{b}{2} \right)^2 - y^2 \right) \geq 0,$$

$$f_3 = \frac{1}{2r} \left(r^2 - (x-l)^2 \right) \geq 0, \quad f_4 = \frac{1}{2d} \left(d^2 - y^2 \right) \geq 0.$$

Символи $\wedge_0, \vee_0, \bar{}$ в (24) визначають R - кон'юнкцію, R - диз'юнкцію та R - заперечення [3]. Структури розв'язку для переміщень в площині пластини, вибрано у вигляді

$$u_i = P_i, \quad v_i = P_{i+2}, \quad i = 1, 2. \quad (25)$$

В формулах (23), (25) $P_i, i = 0..4$ – це невизначені компоненти структури [3].

В табл. 5 представлені частотні параметри Λ , що відповідають різним значенням навантаження p_0 . На рис.6 зображено залежності амплітуди від частотного співвідношення $\theta/2\Omega$ (22). Амплітудно-частотні залежності побудовані для багатошарових пластин з укладкою шарів $0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$, $90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$. Результати отримані при варіюванні амплітуди p_i змінної частини навантаження ($b/a = 1, l/a=0.2, d/a=0.4, r/a=0.1$).

Висновки. В роботі запропоновано підхід для дослідження параметричних коливань та стійкості багатошарових пластин симетричної будови з дові-

Залежність частотного параметру Λ від навантаження пластини p_0

α \ p_0 / p_{kr}	0.	0.5	0.75	0.9	p_{kr}
0	37.233	26.737	19.176	12.29	10.510
$0^0/90^0/0^0/90^0/0^0$	38.477	28.036	20.400	13.254	10.274
$90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$	39.095	29.678	22.103	14.502	7.853

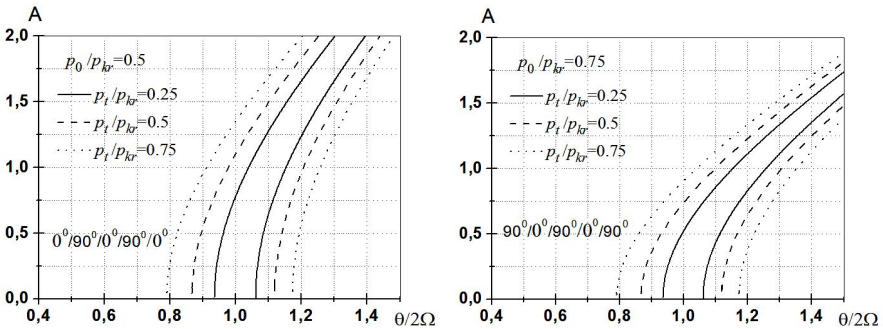


Рисунок 6 – Амплітудно-частотні залежності для пластини, зображеної на рис.5

льною формою плану для різних видів граничних умов та способу укладки шарів. Метод базується на теорії R-функцій та варіаційних методах. Алгоритм реалізовано в рамках системи POLE-RL. За допомогою створеного програмного забезпечення було проведено тестування та розв'язані нові задачі коливання багат шарових пластин складної форми під дією статичного та періодичного навантажень в серединній площині.

Список литературы: 1. Reddy J.N. Mechanics of laminated composite plates and shells. Theory and analysis. Second edition / J.N.Reddy // USA: CRC PRESS, – 2004. – p.834. 2. Болотин В. В. Динамическая устойчивость упругих систем / В. В. Болотин – М.: Гостехиздат, 1956. – 500 с. 3. Курпа Л.В. Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек./ Л.В.Курпа // Харьков, НТУ «ХПИ» – 2009. – 408 с. 4. Лехницький С.Г. Анизотропные пластинки / С.Г. Лехницький – М.: Гостехиздат. – 1957. – 464 с. 5. Амбарцумян С.А. Теория анизотропных пластин / С.А. Амбарцумян – М.: Наука, 1967.–266 с. 6. Singha M.K., Daripa R. Nonlinear vibration and dynamic stability analysis of composite plates. – Journal of Sound and Vibration, 2009, – pp.541-554. 7. Курпа Л.В. Параметричні коливання пластин складної форми плану / Л.В. Курпа, О.С. Мазур // Машинознавство. – 2008. – №3 (33). – С. 9-15. 8. Awrejcewicz J. Research of Stability and Nonlinear vibration of plates by R-Functions Method. / J. Awrejcewicz, L. Kurpa, O. Mazur // Modeling Simulation and control of Nonlinear Engineering Dynamical Systems. – UK, Springer, 2009. – P.179-189. 9. Григоренко Я. М. Устойчивость нелинейных вынужденных колебаний пологих прямоугольных в плане цилиндрических оболочек/ Я. М. Григоренко, В. И. Гуляев, Е. С. Дехтярюк, В. В. Чембалаев// Механика твердого тела. – 1983. – №6. – С.137–142. 10. S. K. Sahu Dynamic Stability of Laminated Composite Curved Panels with Cutouts / P. K. Datta, S. K. Sahu Journal of engineering mechanics – november 2003 – pp. 1245-1253

Поступила в редколлегию 14.04.11