

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Н.И. ВОРОПАЙ, аспирант, ХНАДУ, Харьков

ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПЛАСТИНЫ НА ОСНОВЕ ОДНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ

Досліджено нестационарне деформування прямокутної пружної ізотропної пластини під дією імпульсних навантажень. Динамічна поведінка пластини описується у рамках уточненої теорії першого порядку на основі одного хвильового рівняння. Розглянуто розв'язання прямої та оберненої задачі теорії пружності. При дослідженні оберненої некоректної задачі використано алгоритм А.М. Тихонова, що регуляризує її розв'язок. Представлені чисельні результати, достовірність яких перевіряється на підставі порівняння з результатами інших авторів.

Исследуется нестационарное деформирование прямоугольной упругой изотропной пластины под действием импульсных нагрузок. Динамическое поведение пластины описывается в рамках уточненной теории первого порядка на основе одного волнового уравнения. Рассмотрены решения прямой и обратной задачи теории упругости. При исследовании обратной некорректной задачи используется регуляризирующий алгоритм А.Н. Тихонова. Представлены численные результаты, достоверность которых проверяется на основании сравнения с результатами других авторов.

The non-stationary deformation of an elastic isotropic rectangular plate under impulse actions is investigated. Dynamic behavior of the plate is described by the refined theory of first order with a single wave equation. Direct and inverse problems of elasticity theory are considered. The Tihonov's regularizing method is used for solving the inverse ill-posed problem. Numerical results, which are validated by a comparison with results of other authors, are presented.

Введение. Развитие современной индустрии выдвигает повышенные требования к исследованиям в области механики деформируемого твердого тела. Необходимы достоверные представления о деформационных процессах, протекающих в средах, при различных режимах их эксплуатации, в частности, в элементах конструкций в виде пластин в условиях существенно нестационарных режимов.

Пластины, как плоские конструкционные элементы, широко применяются в различных областях техники и строительства. Это объясняется тем, что наряду с легкостью пластины обладают высокой несущей способностью, экономичностью, хорошей технологичностью, а также им присуща рациональность форм.

Способствовать накоплению научной информации по напряженно-деформируемому состоянию (НДС) элементов конструкций в виде пластин могут результаты, полученные на основе решения прямых и обратных нестационарных задач, которые представлены в настоящей статье.

Анализ публикаций. Обзор работ отечественных и зарубежных ученых показывает, что поведение подобных конструкций при статических нагрузках достаточно хорошо изучено. Исследования же поведения этих конструкций при динамических нагрузках еще далеки от завершения. С наиболее полной

библиографией и анализом многочисленных исследований НДС пластин можно ознакомиться, в частности, и с современными достижениями, в обзорных работах [1, 2].

Развитие методов решения обратных задач теории упругости для нестационарно деформируемых пластин находится в начальной фазе.

В настоящей работе представлена методика решения обратной задачи, целью которой является идентификация импульсных воздействий типа сосредоточенной силы при условии заданности перемещений во времени в одной из точек пластины. Поскольку решение обратной задачи связано с решением соответствующей прямой задачи, вначале будет изложено решение прямой задачи. Следует отметить, что импульсное деформирование прямоугольной пластины проанализировано в работе [3], но на основе системы дифференциальных уравнений. А здесь соответствующее решение основывается на базе одного волнового уравнения, которое эквивалентно полной системе уравнений движения.

Постановка задачи. Исследуется НДС прямоугольной изотропной шарнирно-опертой пластины размера $l \times m$ и толщиной h , срединная плоскость которой совпадает с координатной плоскостью xOy , в некоторой точке (x_0, y_0) которой действует сосредоточенная сила $P(t)$ (рис. 1).

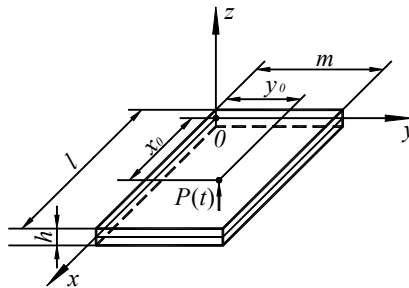


Рисунок 1 – Схема нагружения пластины

Уравнение колебания пластины. Задача о нестационарных колебаниях пластины сводится к решению следующего одного уравнения [4]:

$$\Delta \Delta w - \left(\frac{1}{c_1^2} + \frac{1}{c_2^2} \right) \frac{\partial^2 \Delta w}{\partial t^2} + \frac{1}{c_1^2 c_2^2} \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} + \frac{\rho h}{D} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} =$$

$$= \frac{q}{D} + \frac{1}{k' G h} \left(\frac{\rho I}{D} \cdot \frac{\partial^2 q}{\partial t^2} - \Delta q \right), \quad (1)$$

где $w(x, y, t)$ – прогиб срединной плоскости пластины; ρ – плотность материала пластины; $q(x, y, t)$ – интенсивность внешней нагрузки; k' – коэффициент сдвига; $\Delta = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2$; $I = h^3 / 12$; $D = E h^3 / 12(1 - \nu^2)$ – цилинд-

рическая жесткость; $c_1^2 = E/\rho(1 - \nu^2)$, $c_2^2 = 2G/3\rho$ – квадраты скоростей распространения волн в пластине; $G = E/2(1 + \nu)$; E – модуль Юнга; ν – коэффициент Пуассона.

Укажем, что в монографии [4] приводится только вид уравнения (1), но непосредственное его решение отсутствует.

Примем нулевые начальные условия для построения решения задачи:

$$\begin{aligned} w(x, y, 0) = 0; \quad \psi_x(x, y, 0) = 0; \quad \psi_y(x, y, 0) = 0; \\ \frac{\partial w(x, y, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \psi_x(x, y, 0)}{\partial t} = 0; \quad \frac{\partial \psi_y(x, y, 0)}{\partial t} = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь ψ_x, ψ_y – углы наклона касательной к упругой поверхности вдоль оси x -ов и y -ов.

Решение прямой задачи. Определение прогиба $w(x, y, t)$ пластины будем осуществлять для случая сосредоточенного нестационарного воздействия на пластину в точке (x_0, y_0) ее срединной плоскости. Нагрузка принимается в виде:

$$q(x, y, t) = P(t) \cdot \delta(x - x_0) \cdot \delta(y - y_0), \quad (3)$$

где $P(t)$ – функция нагрузки во времени (известная в случае рассмотрения прямой задачи; неизвестная – обратной задачи).

Форма решения неизвестной функции $w(x, y, t)$ представляется в виде тригонометрических рядов по координатам x и y согласно принятой схемы закрепления пластины [4]. Укажем, что используется преобразования Лапласа по времени t .

Отметим, что для корректного перехода в пространство изображений, нулевые начальные условия (2) необходимо дополнить: нагрузка и ее первая производная должны быть равны нулю

$$q(x, y, 0) = 0; \quad \partial q(x, y, 0)/\partial t = 0,$$

что обеспечит равенства

$$\partial^2 w(x, y, 0)/\partial t^2 = 0; \quad \partial^3 w(x, y, 0)/\partial t^3 = 0.$$

В этом, по-видимому, и состоит неудобство получения решения уравнения (1) по сравнению с решением системы уравнений, о котором упоминает А.П. Филиппов в своей монографии [4]. Он указывает, что численно-аналитические методы решения волновых уравнений движения пластин «более удобны для получения решений /4/», чем на основе одного разрешающего уравнения, которым является уравнение (1). Здесь указанное «неудобство» преодолевается за счет принятых начальных значений для импульсного воздействия.

Выражение для искомой функции прогиба $w(x, y, t)$, которое получено на основе уравнения (1), имеет вид:

$$w(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \int_0^t P(\tau) [\Omega_{1kn} \sin \omega_{1kn}(t - \tau) + \Omega_{2kn} \sin \omega_{2kn}(t - \tau)] d\tau \times \\ \times \sin \frac{k\pi \cdot x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y}{m}. \quad (4)$$

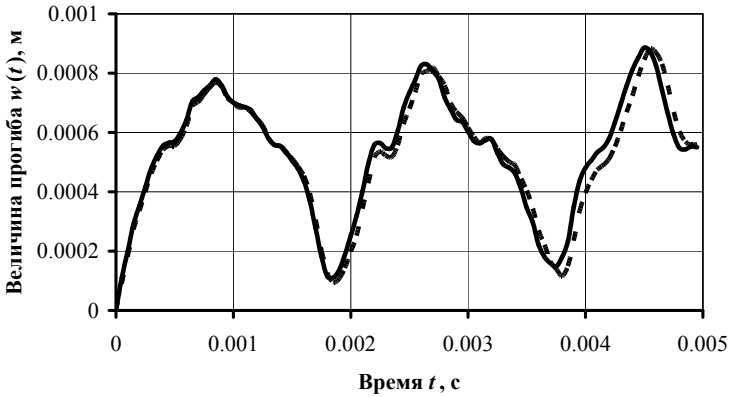
Здесь $C_{kn} = \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin\left(\frac{k\pi \cdot x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi \cdot y_0}{m}\right)$; $a_1 = c_1^2 + c_2^2$; $a_2 = \frac{\rho h}{D} \cdot c_1^2 c_2^2$;
 $a_3 = c_1^2 c_2^2$; $b_1 = \frac{1}{k'Gh} \frac{\rho I}{D} \cdot c_1^2 c_2^2$; $b_2 = \frac{1}{D} \cdot c_1^2 c_2^2$; $b_3 = \frac{1}{k'Gh} \cdot c_1^2 c_2^2$;
 $\lambda_{kn}^2 = \pi^2 \left(\frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right)$; $\Omega_{1kn} = \frac{b_2 + b_3 \cdot \lambda_{kn}^2 - b_1 \cdot \omega_1^2}{\omega_{1kn} \cdot (\omega_{2kn}^2 - \omega_{1kn}^2)}$; $\Omega_{2kn} = \frac{b_2 + b_3 \cdot \lambda_{kn}^2 - b_1 \cdot \omega_2^2}{\omega_{2kn} \cdot (\omega_{1kn}^2 - \omega_{2kn}^2)}$.

На основе полученного выражения (4) можно находить прогибы в пластине, воздействием сосредоточенных поперечных нагрузок, приложенных к ее срединной плоскости.

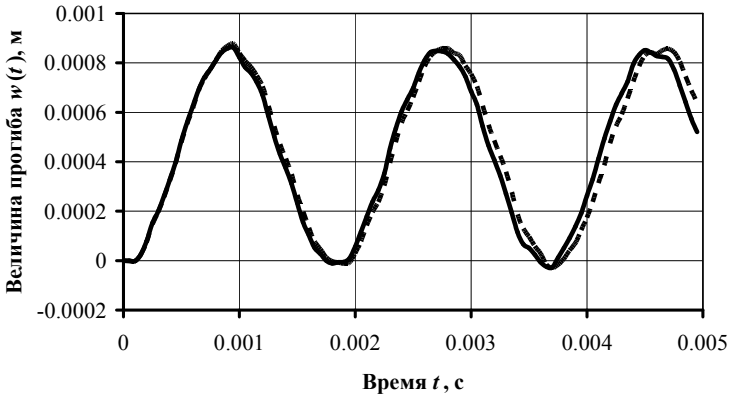
Численные результаты. Для численного расчета согласно формуле (4) принимаются следующие исходные данные: $\rho = 7850 \text{ кг/м}^3$; $E = 2.1 \cdot 10^{11} \text{ Па}$; $\nu = 0.3$; $k' = 1$; $h = 0.025 \text{ м}$; $l = 0.6 \text{ м}$; $m = 0.4 \text{ м}$; координаты приложения сосредоточенной силы $x_0 = 0.4 \text{ м}$, $y_0 = 0.3 \text{ м}$; $P(t) = P_0 \cdot H(t)$, где $P_0 = 10^5 \text{ Н}$ – интенсивность действующей нагрузки; $H(t)$ – функция Хевисайда. Подчеркнем еще раз, что если рассматривается обратная задача, то $P(t)$ – неизвестная функция.

Бесконечные суммы в выражении (4) при расчете были заменены суммами с конечным числом членов ряда Фурье, причем по независимым переменным x и y они принимались равными между собой (указанное число членов ряда выбиралось равное lim). Отметим, что величина lim выбиралась в зависимости от практической сходимости соответствующих рядов при разложении исследуемых функций.

На рис. 2 показаны графики изменения прогиба $w(t)$ во времени. На рис. 2, а представлены кривые, расчет которых проводился в точках с координатами $x = 0.4 \text{ м}$, $y = 0.3 \text{ м}$, то есть непосредственно под нагрузкой; а на рис. 2, б – $x = 0.3 \text{ м}$, $y = 0.2 \text{ м}$, то есть посередине пластины. Сплошными линиями представлены результаты расчета согласно выражению (4), пунктирными – результаты, приведенные в работе [5], в которой описано решение аналогичной прямой задачи по импульсному деформированию прямоугольной пластины на основе системы трех уравнений, содержащих функции $w(x, y, t)$, $\psi_x(x, y, t)$ и $\psi_y(x, y, t)$. Приведенное сравнение свидетельствует о достоверности полученного решения.



a



б

Рисунок 2 – Изменение прогиба пластины

Результаты решения обратной задачи. Соотношение (4) при заданной функции $\bar{w}(t) = w(x_s, y_s, t)$ для конкретной точки (x_s, y_s) и искомой функции $P(t)$ является интегральным линейным уравнением Вольтерра I рода, которое можно представить как

$$\bar{w}(t) = \int_0^t P(\tau) K(t - \tau) d\tau, \quad (5)$$

где $K(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{kn} \cdot [\Omega_{1kn} \sin \omega_{1kn}(t) + \Omega_{2kn} \sin \omega_{2kn}(t)] \cdot \sin \frac{k\pi \cdot x_s}{l} \cdot \sin \frac{n\pi \cdot y_s}{m}$.

Уравнение (5) будем решать посредством метода, основанного на введении сглаживающего функционала А.Н. Тихонова [6]. Данный метод используется, поскольку рассматриваемое решение будет некорректным в силу свойств интегральных уравнений Вольтерра I рода.

В матричной форме СЛАУ, из которой находится приближенное решение уравнения (5), имеет вид [6]:

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A} + \alpha \mathbf{C})\mathbf{p} = \mathbf{A}^T \mathbf{w}, \quad (6)$$

где \mathbf{A} – матрица, элементы которой $a_{ij} = K[(i - j) \cdot \Delta t]$; \mathbf{A}^T – транспонированная к \mathbf{A} матрица; α – параметр регуляризации; \mathbf{C} – симметричная трехдиагональная матрица; \mathbf{p} – вектор, который соответствует искомой функции $P(t)$; \mathbf{w} – вектор исходных данных.

Идентификация временной составляющей нагрузки $P(t)$ выполняется на основе (6) при тех же численных значениях параметров, которые рассматривались в пункте 6 настоящей статьи, причем численные значения функции, отвечающей кривой представленной на рис. 3, являются исходными данными для восстановления нагрузки, воздействующей на пластину. Функция прогиба на рис. 3 отвечает функции $P(t)$, которая является полуволной синуса.

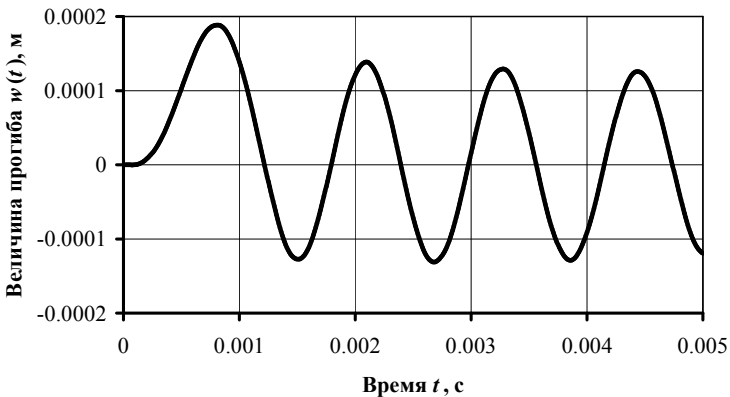


Рисунок 3 – Изменение прогиба во времени

На рис. 4 представлены кривые изменения нагрузки, идентифицированные по приведенным исходным данным (рис. 3). Причем, кривая 1 отвечает случаю, когда восстановление производилось при $\alpha = 10^{-24}$; кривая 2 – $\alpha = 10^{-25}$; кривая 3 – $\alpha = 10^{-26}$ и кривая 4 – $\alpha = 10^{-30}$.

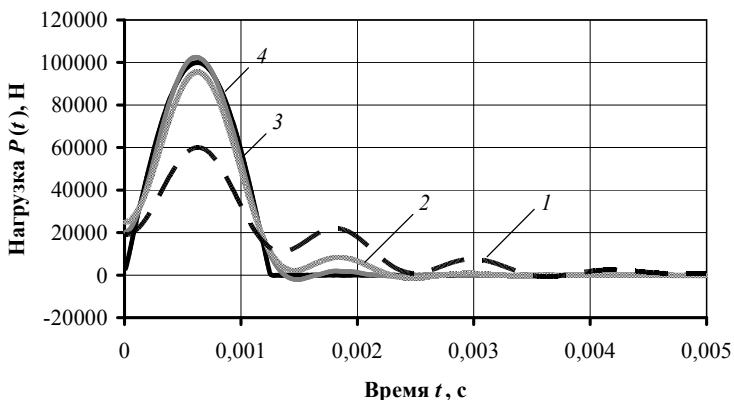


Рисунок 4 – Изменение нагрузки во времени

Все кривые с разной точностью хорошо аппроксимируют упомянутую нагрузку в виде полуволны синуса.

Выводы. Из приведенных результатов видно, что введение сглаживающего функционала А.Н. Тихонова позволяет получить устойчивое решение обратной задачи о восстановлении нестационарной нагрузки, действующей на пластину в случае рассмотрения решения одного волнового уравнения теории С.П. Тимошенко.

Список литературы: 1. Григолоук Э.И., Селезов И.Т. Механика твердых деформируемых тел. Т. 5. Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек. М., 1973. – 272 с. 2. Успехи механики: в 6 т. / Под ред. А.Н.Гузя. – К., 2005-2009. 3. Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Вороний А.В., Шараната А.С. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций. Х., 2004. – 392 с. 4. Филиппов А.П. Колебания деформируемых систем. М., 1970. – 736 с. 5. Сметанкина Н.В., Угримов С.В., Шупіков О.М., Бузько Я.П. Динамічний відгук пластин, які лежать на пружній основі // Вісник Харківського національного університету «ХП». Тематичний випуск: Технології в машинобудуванні. 2002. – № 19 – С. 68 – 72. 6. Тихонов А.Н., Гончарский А.В., Степанов В.В., Ягола А.Г. Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация. М., 1983. – 200 с.

Поступила в редакцию 22.03.2011