

І. С. БЕЛОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., НТУ «ХПІ»

ПРО LMI – ХАРАКТЕРИСТИКИ НЕВІД'ЄМНИХ КОСИНУС – МНОГОЧЛЕНІВ

Розглянуті невід'ємні косинус – многочлени з мінімальним вільним членом, який знаходиться як розв'язок задачі SDP-програмування.

Рассмотрены неотрицательные косинус – многочлены с минимальным свободным членом, который находится как решение задачи SDP – программирования.

Nonnegative cosine polynomials with minimal free term are considered, which is a solution of task of SDP - programming

Вступ. Тригонометричний многочлен

$$P(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta$$

називається *невід'ємним* в $[a, b]$, якщо $P(\theta) \geq 0$ ($a \leq \theta \leq b$).

Невід'ємний тригонометричний многочлен по косинусах

$$A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

визначає нескінченну множину лінійних нерівностей відносно коефіцієнтів $\vec{a}(a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$. Перетин відповідних півпросторів утворює опуклий конус $C_{n+1} = \{\vec{a} | A(\theta) \geq 0\}$. Умовою невід'ємності косинус-многочлена є відома теорема *Фейєра – Ріса* про спектральну факторизацію [2]. А саме, для

невід'ємності косинус-многочлена $A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$ у $[-\pi, \pi]$ необ-

хідно і достатньо існування параметрів $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ таких, що

$$A(\theta) = \left| x_0 + x_1 e^{-i\theta} + \dots + x_n e^{-in\theta} \right|^2.$$

Звідси отримуємо систему рівнянь

$$a_0 = \sum_{k=0}^n x_k^2 \quad a_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i x_{k+i} \quad (1 \leq k \leq n). \quad (1)$$

Отже, для перевірки невід'ємності $A(\theta)$ достатньо дослідити на сумісність систему квадратичних рівнянь (1). Якщо $a_0 = E(a_1, a_2, \dots, a_n) > 0$ є найменше значення, при якому $A(\theta)$ є невід'ємним, будемо казати, що відповід-

ний косинус - многочлен має *нормальну форму*.

Пізніше, з розвитком обчислювальних методів, з'явилися так звані LMI – характеристики невід'ємних косинус – многочленів [2]. А саме, LMI – характеристика у формі рівностей стверджує що $\vec{a} \in C_{n+1}$ тоді і тільки тоді, коли існує ненегативна матриця

$$X = \begin{pmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{n0} \\ X_{10} & X_{11} & X_{n1} \\ X_{n0} & X_{n1} & X_{nn} \end{pmatrix} \succ 0,$$

така що виконується система рівностей

$$\begin{cases} a_0 = X_{00} + X_{11} + \dots + X_{nn}, \\ a_1 = X_{10} + X_{21} + \dots + X_{nn-1}, \\ a_n = X_{n0}. \end{cases} \quad (2)$$

Дійсно, за умови (2) маємо $A(\theta) = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ e^{in\theta} \end{bmatrix}^H \begin{bmatrix} X_{00} & X_{10} & X_{n0} \\ X_{10} & X_{11} & X_{n1} \\ X_{n0} & X_{n1} & X_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{i\theta} \\ e^{in\theta} \end{bmatrix} \geq 0.$

За допомогою матриці $E = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ систему (2) можна подати у вигляді

$$a_k = \text{Tr}(E^k X) \quad (0 \leq k \leq n). \quad (3)$$

Обернене твердження легко отримати з (1)

$$a_k = \sum_{i=0}^{n-k} x_i x_{k+i} = x^T E^k x = \text{Tr}(E^k x x^T).$$

Безпосередньо з (2) отримуємо, що

$$A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

є невід'ємним тоді і тільки тоді, коли для деякої матриці P порядку n матриця $X(\vec{a}, P)$ порядку $n+1$ є ненегативною

$$X(\vec{a}, P) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \dots & 0 & a_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 \dots & 0 & a_1 \\ a_1 \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \succ 0. \quad (4)$$

Це і є LMI – характеристика у формі нерівностей.

Для перевірки умов (3,4), в яких фігурують позитивно – визначені матриці, існує декілька пакетів так званого *SDP – програмування*: Sedumi, SDPT3, SDPPACK, SDPA та інші. Ми розглянемо SDPT3 та варіант, що є імплементований у MatLab Control System Toolbox

Постановка задачі. Ми побудуємо невід’ємні косинус – многочлени в яких з теоретичних міркувань відомі мінімальні вільні члени і спробуємо знайти їх як розв’язок задачі на екстремум SDP – програмування.

Для цього розглянемо *ядро Фейєра*

$$F_n(\theta) = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \cos k\theta,$$

яке є невід’ємним косинус – многочленом із мінімальним вільним членом $a_0 = 1$. Легко перевірити, що за теоремою Фейєра – Ріса йому відповідають параметри

$$P\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}}, \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Дослідимо відповідні косинус – многочлени із параметрами

$$P\left(\pm \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \pm \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \dots, \pm \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right).$$

Розв’язок задачі. Спочатку розглянемо питання, коли у сумісній системі (1) не можна зменшити a_0 . Для цього, вважаючи координати розв’язку $P(x_0, x_1, \dots, x_n)$ диференційованими функціями a_0 , про- диференціюємо систему (1) по a_0 . Отримаємо, позначаючи $x_i = P(i+1)$, лінійну систему для P' :

$$\begin{cases} P(1) * P'(1) + P(2) * P'(2) + \dots + P(n) * P'(n) + P(n+1) * P'(n+1) = \frac{1}{2}, \\ P(2) * P'(1) + (P(1) + P(3)) * P'(2) + \dots, \\ \dots + (P(n-1) + P(n+1)) * P'(n) + P(n) * P'(n+1) = 0, \\ P(n+1) * P'(1) + P(1) * P'(n+1) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Зрозуміло, що при мініальному a_0 P' не існує, а це можливо тоді і тільки тоді, коли визначник системи (3) дорівнює нулю.

Отже доведена наступна

Теорема. Для того щоб сумісна система (1) визначала найменший ві-

льний член a_0 , при якому

$$A(\theta) = a_0 + 2 \sum_{k=1}^n a_k \cos k\theta$$

є невід'ємним при фіксованих (a_1, a_2, \dots, a_n) необхідно і достатньо, щоб дорівнював нулю визначник

$$\Delta(P) = \begin{vmatrix} P(1) & P(2) & P(n+1) \\ P(2) & P(1)+P(3) & P(n) \\ P(n+1) & 0 & P(1) \end{vmatrix} = 0. \quad (6)$$

Для проведення конкретних обчислень вважатимемо $n = 7$, хоча все наступне має місце при будь-якому $n = 2^k - 1$. Розглянемо, наприклад, точку

$$P_2 \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{2\sqrt{2}} \right),$$

(нумерація пов'язана із нумерацією Пелі функцій Уолша [1]), якій за Фейєром – Рісом відповідає невід'ємний косинус – многочлен

$$A_2(\theta) = 1 + \frac{5}{4} \cos \theta + \frac{1}{2} \cos 2\theta - \frac{1}{4} \cos 3\theta - \cos 4\theta - \frac{3}{4} \cos 5\theta - \frac{1}{2} \cos 6\theta - \frac{1}{4} \cos 7\theta.$$

Згідно теореми складаємо визначник (6)

$$\Delta(P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Звідси маємо, що $1 = E \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$.

Відповідна ЛМІ – задача на екстремум має вигляд:

$$\min \operatorname{tr}(X)$$

$$\text{s.t. } X_{10} + X_{21} + X_{32} + X_{43} + X_{54} + X_{65} + X_{76} = \frac{5}{4};$$

$$X_{20} + X_{31} + X_{42} + X_{53} + X_{64} + X_{75} = \frac{1}{2};$$

$$\begin{aligned}
 X_{30} + X_{41} + X_{52} + X_{63} + X_{74} &= -\frac{1}{4}; & X_{40} + X_{51} + X_{62} + X_{73} &= -1; \\
 X_{50} + X_{61} + X_{72} &= -\frac{3}{4}; & X_{60} + X_{71} &= -\frac{1}{2}; & X_{70} &= -\frac{1}{4};
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$X = \begin{pmatrix}
 X_{00} & X_{10} & X_{20} & X_{30} & X_{40} & X_{50} & X_{60} & X_{70} \\
 X_{10} & X_{11} & X_{21} & X_{31} & X_{41} & X_{51} & X_{61} & X_{71} \\
 X_{20} & X_{21} & X_{22} & X_{32} & X_{42} & X_{52} & X_{62} & X_{72} \\
 X_{30} & X_{31} & X_{32} & X_{33} & X_{43} & X_{53} & X_{63} & X_{73} \\
 X_{40} & X_{41} & X_{42} & X_{43} & X_{44} & X_{54} & X_{64} & X_{74} \\
 X_{50} & X_{51} & X_{52} & X_{53} & X_{54} & X_{55} & X_{65} & X_{75} \\
 X_{60} & X_{61} & X_{62} & X_{63} & X_{64} & X_{65} & X_{66} & X_{76} \\
 X_{70} & X_{71} & X_{72} & X_{73} & X_{74} & X_{75} & X_{76} & X_{77}
 \end{pmatrix} > 0.$$

Розв'язок задачі (7) (для подвоєних даних $2 * \left(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$)

за допомогою солвера MatLab **mincx** [4] має вигляд:

Solver for linear objective minimization under LMI constraints

Iterations : Best objective value so far

```

1          3.561480
***      new lower bound:  -0.049342
2          2.207842
***      new lower bound:  1.258658
.....
26         2.000014
***      new lower bound:  1.999984
27         2.000010
***      new lower bound:  1.999991

```

Result: feasible solution of required accuracy
best objective value: 2.000010
guaranteed relative accuracy: 9.50e-006
f-radius saturation: 0.000% of R = 1.00e+009

Розв'язок тієї ж задачі за допомогою солвера SDPT3 **sdlp** [3] має вигляд:

```

num. of constraints = 36
dim. of sdp var = 8, num. of sdp blk = 1

```

```

dim. of free var = 7 *** convert ublk to lblk
*****
*
SDPT3: Infeasible path-following algorithms
*****
*
version predcorr gam expon scale_data
HKM 1 0.000 1 0
it pstep dstep pinfeas dinfeas gap prim-obj dual-obj cputime
-----
0|0.000|0.000|1.4e+001|6.9e+000|8.4e+002|-5.084022e-010 0.000000e+000|
0:0:00| chol 1 1
1|1.000|0.951|4.9e-006|4.1e-001|3.7e+001|-6.517675e-001 -3.476110e+001| 0:0:00|
chol 1 1
.....
18|1.000|0.930|6.9e-013|5.7e-009|7.7e-008|-2.000000e+000 -2.000000e+000|
0:0:01| chol 2 2
19|1.000|0.931|4.0e-012|1.3e-009|1.9e-008|-2.000000e+000 -2.000000e+000|
0:0:01|
stop: max(relative gap, infeasibilities) < 1.00e-008
-----
number of iterations = 19
primal objective value = -1.99999999e+000
dual objective value = -2.00000001e+000
gap := trace(XZ) = 1.91e-008
relative gap = 3.81e-009
actual relative gap = 3.73e-009
rel. primal infeas = 3.98e-012
rel. dual infeas = 1.30e-009
norm(X), norm(y), norm(Z) = 2.5e+000, 2.0e+000, 4.0e+000
norm(A), norm(b), norm(C) = 1.4e+001, 3.8e+000, 4.3e+000
Total CPU time (secs) = 0.9
CPU time per iteration = 0.0
termination code = 0
DIMACS: 7.6e-012 0.0e+000 2.0e-009 0.0e+000 3.7e-009 3.8e-009
-----

```

Зведемо у таблицю результати аналогічних обчислень для невід’ємних многочленів $\{A_1, \dots, A_8\}$, параметри яких є функціями Уолша. Столпець таблиці містить коефіцієнти двох многочленів, які відрізняються зсувом на π і тому мають однакові характеристики.

Зауваження. Не слід вважати, що будь-яка послідовність чисел ± 1 визначає за Фейєром – Рісом невід’ємний косинус – многочлен із коефіцієнтом

$a_0 = E(a_1, \dots, a_n)$. Наприклад, для $P(-1, 1, 1, -1, -1, -1, 1, -1)$ маємо $\Delta(P) = 32$, отже, за доведеною теоремою вільний член $a_0 = 8$ не є мінімальним.

Таблиця

Результати обчислень для невід’ємних многочленів

	[7/4 3/2 5/4 1 3/4 1/2 1/4] [-7/4 3/2 -5/4 1 -3/4 1/2 -1/4]	[1/4 -3/2 -1/4 1 1/4 -1/2 -1/4] [-1/4 -3/2 1/4 1 - 1/4 -1/2 1/4]	[5/4 1/2 -1/4 -1 -3/4 -1/2 -1/4] [-5/4 1/2 1/4 -1 3/4 -1/2 1/4]	[3/4 -1/2 -3/4 -1 -1/4 1/2 1/4] [-3/4 -1/2 3/4 -1 1/4 1/2 -1/4]
mincx				
number of iterations	7	16	27	21
objective value	2,000004	2,000013	2,00000001	2,000012
guaranteed relative accuracy:	6,06E-6	9.5E-6	9.5E-6	9.5E-6
sqlp				
number of iterations	9	17	19	18
objective value	2.00000000	2.00000003	2.00000001	2.00000002
relative gap	7.63E-9	7.87E-9	3.81E-9	6.86E-9

Висновки.

1. Порівнюючи результати у таблиці, бачимо, що на розглянутих прикладах солвер **sqlp** працює краще за **mincx**.
2. Розгляд многочленів $\{A_1, \dots, A_8\}$ при $n = 7$ дозволяє припустити, що невід’ємні косинус – многочлени, параметри яких є функціями Уолша, мають нормальну форму.

Список літератури: 1. Б.И.Голубов, А.В.Ефимов, В.А.Скворцов. Ряды и преобразования Уолша.- М: Наука.–1987.–344 с. 2. B.Dumitrescu. Positive Trigonometric Polynomials and Signal Processing Applications.-Springer.–2007.–239 p. 3. K.C.Toh,R.H.Tutuncu,M.J.Todd. On the implementation and usage of SDPT3 – a Matlab software package for semidefinite – quadratic – linear programming, version 4.0.– Draft, 2006.–46 p. 4. MatLab2010 Control Toolbox.-Users Guide.–2010.–78 p.

Надійшла до редколегії 07.09.2011