

Ю.П. ГЛУХОВ, канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр., Институт механики
НАН Украины, Киев

ДИНАМИКА МНОГОСЛОЙНОЙ ПРЕДВАРИТЕЛЬНО НАПРЯЖЕННОЙ ПОЛОСЫ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ ПОДВИЖНОЙ НАГРУЗКИ

Наведено проміжні результати дослідження плоских задач про збурення рухомим поверхневим навантаженням багатослоєвої основи з початковими (залишковими) напруженнями.

Приведены промежуточные результаты исследования плоских задач о возмущении подвижной поверхностной нагрузкой многослойного основания с начальными (остаточными) напряжениями.

The midline results of the study of plane tasks of the perturbation of the moving surface load of multilayered base with initial (residual) stresses are presented.

Введение. Исследования и решение задач оптимального проектирования слоистых конструкций представляет большой научный и практический интерес. Слоистые конструкции технологичны и просты в изготовлении и широко используются в различных областях. Например, при создании звуковой и вибрационной защиты, волноводов, фильтров, эффективных демфирующих покрытий и так далее.

Действию подвижных нагрузок на слоистые тела посвящено много работ. Для классических сред такие задачи изучались как в точной постановке, так и с использованием различных приближенных моделей многослойной среды.

Одной из интересных и актуальных проблем, анализ которой невозможно провести в рамках классической линейной теории упругости, является теория распространения упругих волн в телах с начальными напряжениями

Начальные напряжения возникают в элементах конструкций в результате технологических операций при их изготовлении, в земной коре вследствие действия геостатических и геодинамических сил, в композитных материалах при технологических процессах их создания, в кровеносных сосудах живых организмов и так далее. Таким образом, механика материалов и элементов конструкций, геофизика, сейсмология, механика композитов, механика горных пород, биомеханика и ряд других – это далеко не полный перечень научных направлений фундаментального и прикладного характера, в которых возникают проблемы, связанные с необходимостью исследования влияния начальных (или остаточных) напряжений или деформаций.

В данной работе кратко представлены некоторые промежуточные результаты исследований плоских задач о возмущении подвижной поверхностной нагрузкой многослойного основания с начальными (остаточными) напряжениями.

Исследования были проведены в рамках линеаризированной теории упругости тел с начальными напряжениями [1]. В линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями и деформациями предполагается, что возмущенному состоянию тела предшествует некоторое начальное состояние с отличными от нуля напряжениями и деформациями. При этом рассматриваются только малые дополнительные напряжения (возмущения) по сравнению с напряжениями в начальном состоянии. Такая теория в отличие от линейной классической теории упругости более полно отражает свойства реальных деформируемых тел.

Основы линеаризированной теории упругости для тел с начальными напряжениями подробно изложены в работах основоположника этой теории академика НАН Украины Александра Николаевича Гузя и его учеников.

Общая постановка задач. Общая постановка исследуемого класса задач выглядит следующим образом. Рассматривается многослойная полоса, состоящая из N слоев, лежащих на упругом полупространстве или жестком основании (смотри рисунок). Слои пронумерованы по порядку $s = \overline{1, N}$ сверху вниз. Порядковый номер подстилающего полупространства – $N + 1$.

Граничные поверхности слоев плоские и параллельные между собой. Толщина слоев произвольная и равна h_s .

Элементы слоистой среды состоят из сжимаемых или несжимаемых предварительно напряженных изотропных нелинейно-упругих материалов с произвольной формой упругого потенциала. В случае ортотропного тела будем считать, что упруго-эквивалентные направления совпадают с направлениями осей выбранной системы координат.

Считаем, что начальное напряженно-деформированное состояние слоистой среды является однородным.

$$u_j^{0\{s\}} = \delta_{ij} (\lambda_i^{\{s\}} - 1) x_i; \quad \lambda_i^{\{s\}} = const, \quad \left(\not\equiv i \right); \quad \sigma_{11}^{0\{s\}} \neq 0; \quad \sigma_{22}^{0\{s\}} \neq 0; \quad \sigma_{33}^{0\{s\}} \neq 0. \quad (1)$$

Здесь x_i – это лагранжевы координаты, которые в естественном состоянии совпадают с декартовыми, $\lambda_i^{\{s\}}$ – удлинения; δ_{ij} – символ Кронекера, $\sigma_{ii}^{0\{s\}}$ – компоненты тензора обобщенных напряжений.

Слоистое полупространство отнесено к декартовой системе координат ξ_i ($i = 1, 2, 3$), соответствующей начальному деформированному состоянию:

$$\xi_i = \lambda_i x_i, \quad (\mathcal{X}_i). \quad (2)$$

К свободной границе первого слоя приложена нагрузка, движущаяся с постоянной скоростью v в течение большого промежутка времени и не зависящая от координаты ξ_3 . Относительно системы координат, связанной с этой нагрузкой, существует установившееся плоское деформированное состояние.

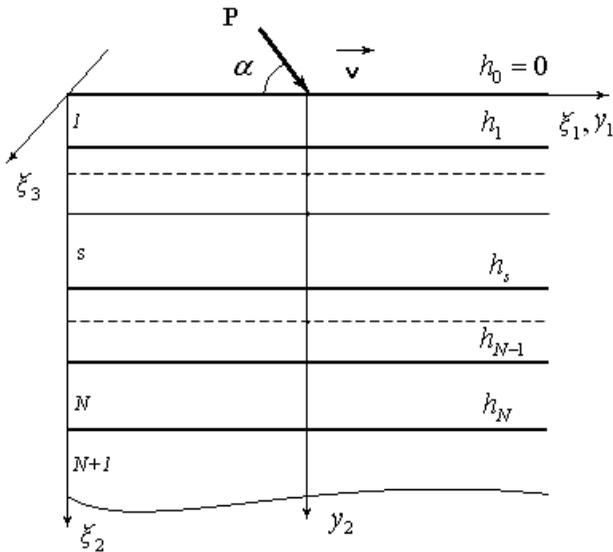


Рисунок – Схема нагружения многослойной полосы.

Координаты подвижной системы координат определяются соотношениями

$$y_1 = \xi_1 - vt; \quad y_2 = \xi_2. \quad (3)$$

Также предполагаем, что напряжения, возникающие за счет действия нагрузки, значительно меньше начальных напряжений. Указанное предположение позволяет применять линеаризованную теорию упругости для описания дополнительного напряженного состояния, вызванного действием нагрузки.

При таких предположениях с учетом общих решений плоских динамических задач линеаризованной теории упругости для тел с начальными напряжениями общая постановка плоских задач об установившемся движении упругой многослойной полосы, лежащей на упругом полупространстве или жестком основании, включает:

уравнения движения элементов слоистой среды

$$\left(\eta_1^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \left(\eta_2^{\{s\}2} \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_2^2} \right) \chi^{\{s\}(j)} = 0; \quad j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (4)$$

и граничные условия при $y_2 = 0$

$$\tilde{Q}_{21}^{\{1\}} = \delta_{\theta N} P_1 \delta(y_1); \quad \tilde{Q}_{22}^{\{1\}} = P_2 \delta(y_1); \quad (5)$$

и при $y_2 = -h_s$

(для упругого основания)

$$u_2^{\{s\}} = u_2^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{s\}} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); \quad s = \overline{1, N}; \quad (6)$$

(для жесткого основания)

$$u_2^{\{s\}} = u_2^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{22}^{\{s\}} = \tilde{Q}_{22}^{\{s+1\}}; \quad \tilde{Q}_{21}^{\{s\}}|_{y_2=-h_s} = \theta_1^{\{s\}} \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}}; \\ (1 - \theta_1^{\{s\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{s+1\}} = \theta_1^{\{s\}} (u_1^{\{s+1\}} - u_1^{\{s\}}); \quad s = \overline{1, N-1}; \quad (7) \\ u_2^{\{N\}} = 0; \quad (1 - \theta_1^{\{N\}}) \tilde{Q}_{21}^{\{N\}} = \theta_1^{\{N\}} u_1^{\{N\}}.$$

Изучается два варианта контакта между элементами слоистой среды и основанием – жесткий и нежесткий: $\theta_1^{\{s\}} = 1$ – если жесткий контакт; при $\theta_1^{\{s\}} = 0$ – скользящий контакт; $\theta = \sum_{s=1}^N \theta_1^{\{s\}}$

Функции $\eta_j^{\{s\}}$ в уравнениях движения (4) определяются из уравнений

$$\eta^{\{s\}4} + 2A^{\{s\}} \eta^{\{s\}2} + A_1^{\{s\}} = 0; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad (8)$$

где для сжимаемого тела

$$2A^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) + \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} (\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) - (\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}})^2; \\ A_1^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} = (\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) (\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} \lambda_1^{\{s\}} \lambda_2^{\{s\}} \lambda_3^{\{s\}} = \rho^{\{s\}};$$

а для несжимаемого

$$2A^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} (\tilde{\kappa}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2) - 2\tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}} (\tilde{\kappa}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\kappa}_{1212}^{\{s\}}); \\ A_1^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}2} \tilde{\kappa}_{2112}^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}2} (\tilde{\kappa}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2); \quad \tilde{q}_{ij}^{\{s\}} = \delta_{ij} \lambda_i^{\{s\}} q_i^{\{s\}}; \quad \tilde{\rho}^{\{s\}} = \rho^{\{s\}},$$

$\rho^{\{s\}}$ — плотность материала элементов многослойного полупространства в естественном состоянии. $\tilde{\omega}^{\{s\}}$ и $\tilde{\kappa}^{\{s\}}$ - параметры характеризующие материал элементов слоистой среды.

Компоненты напряженно-деформированного состояния элементов слоистой среды определяются по формулам:

$$u_i^{\{s\}} = -\beta_{il}^{\{i\}\{s\}} \frac{\partial^2 \chi^{(i)\{s\}}}{\partial y_1 \partial y_2} + \left(\sum_{p=1}^2 \beta_{ip}^{\{j\}\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \chi^{(j)\{s\}}; \quad i \neq j;$$

$$\tilde{Q}_{ij}^{\{s\}} = \sum_{k=1}^2 \left(\sum_{p=1}^2 \alpha_{ij}^{\{pk\}\{s\}} \frac{\partial^2}{\partial y_p^2} \right) \frac{\partial \chi^{(k)\{s\}}}{\partial y_{k-(-1)^k} \delta_{ij}};$$

$$i, j = 1, 2; \quad s = \overline{1, N+1};$$

где в случае сжимаемых тел

$$\alpha_{jj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right); \quad \alpha_{jj}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right);$$

$$\alpha_{mj}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}} - \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} \right); \quad \alpha_{mj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right);$$

$$\alpha_{jj}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \quad \alpha_{mj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}};$$

$$\alpha_{jj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{jj22}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right) - \tilde{\omega}_{jj11}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}} \right);$$

$$\alpha_{mj}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{mj12}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right) - \tilde{\omega}_{mj21}^{\{s\}} \left(\tilde{\omega}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2121}^{\{s\}} \right);$$

$$\beta_{11}^{\{1\}\{s\}} = \beta_{21}^{\{2\}\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{\omega}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\omega}_{2211}^{\{s\}}; \quad \beta_{12}^{\{2\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{2222}^{\{s\}};$$

$$\beta_{22}^{\{1\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{2112}^{\{s\}}; \quad \beta_{11}^{\{2\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2;$$

$$\beta_{21}^{\{1\}\{s\}} = \tilde{\omega}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2; \quad m, j = 1, 2;$$

а в случае несжимаемых тел

$$\alpha_{22}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \left(\tilde{\chi}_{1221}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right); \quad \alpha_{11}^{\{12\}\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \alpha_{22}^{\{12\}\{s\}}; \quad \alpha_{mj}^{\{12\}\{s\}} = -\tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1};$$

$$\alpha_{22}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}}; \quad \alpha_{11}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-2} \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \left(2\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right);$$

$$\alpha_{22}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-2} \left(\tilde{\chi}_{1111}^{\{s\}} - \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \right) + \tilde{\chi}_{2222}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} - \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \left(2\tilde{\chi}_{1122}^{\{s\}} + \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} \right);$$

$$\alpha_{11}^{\{11\}\{s\}} = -\left(\tilde{q}_{22}^{\{s\}-1} \tilde{\chi}_{1212}^{\{s\}} + \tilde{\rho}^{\{s\}} v^2 \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \right); \quad \alpha_{11}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{\chi}_{2112}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{22}^{\{21\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1} \alpha_{11}^{\{21\}\{s\}};$$

$$\alpha_{mj}^{\{22\}\{s\}} = \tilde{\chi}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{mj}^{\{11\}\{s\}} = \tilde{\chi}_{mj21}^{\{s\}} \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \alpha_{mj}^{\{21\}\{s\}} = -\tilde{\chi}_{mj12}^{\{s\}} \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad m, j = 1, 2;$$

$$\beta_{11}^{\{1\}\{s\}} = \beta_{12}^{\{2\}\{s\}} = \beta^{\{s\}} = \tilde{q}_{11}^{\{s\}-1}; \quad \beta_{21}^{\{2\}\{s\}} = \beta_{21}^{\{1\}\{s\}} = \tilde{q}_{22}^{\{s\}-1}; \quad \beta_{11}^{\{2\}\{s\}} = \beta_{22}^{\{1\}\{s\}} = 0.$$

При изложенных выше условиях имеем плоскую установившуюся задачу в плоскости $y_1 O y_2$, состоящую в совместном решении уравнений движения (4) при соответствующих граничных условиях на поверхности первого слоя (6), условий контакта (7) или (8) и условия затухания на бесконечности.

Таким образом, при использовании общих решений плоских динамических задач линеаризированной теории рассматриваемые задачи сводятся к краевым задачам для функций $\chi^{(j)}$ ($j = 1, 2$).

Фундаментальное решение задач в области изображений Фурье. Поставленные краевые задачи решаются с помощью преобразования Фурье по переменной y_1 .

Решение задачи получаем в общем виде для сжимаемого и несжимаемого материалов с произвольным упругим потенциалом для теории конечных и двух вариантов малых начальных деформаций, для случаев неравных и равных корней, для различных условий сопряжения слоя и полупространства и для любой скорости движения нагрузки (дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой).

Решение преобразованных уравнений (4) с учетом затухания на бесконечности будем искать в виде

$$\begin{aligned} \chi^{\{s\}(j)F} = & [1 - \delta_{j2}^{\{s\}} (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}})] \times \\ & \left\{ C_1^{\{s\}(j)} e^{k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_3^{\{s\}(j)} e^{-k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + \right. \\ & \left. + [1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_s)] \times \right. \\ & \left. \left(C_2^{\{s\}(j)} e^{k_2 k \eta_2^{\{s\}} (y_2 + h_s)} + (1 - \delta_s^{N+1}) C_4^{\{s\}(j)} e^{-k_1 k \eta_1^{\{s\}} (y_2 + h_s)} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $C_m^{\{s\}(j)}$ ($j = \overline{1, 2}$; $m = \overline{1, 4}$; $s = \overline{1, N+1}$) – постоянные интегрирования, k – параметр преобразования Фурье,

$$\delta_{\eta \eta_2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & \eta_1^{\{s\}} \neq \eta_2^{\{s\}} \\ 1, & \eta_1^{\{s\}} = \eta_2^{\{s\}} \end{cases}; \quad \delta_{j2}^{\{s\}} = \begin{cases} 0, & j = 1 \\ 1, & j = 2 \end{cases}.$$

В представлении (10)

$$k_j \equiv \sigma = |k|/k, \text{ если } \eta_j^{\{s\}2} > 0, \text{ и } k_j = i, \text{ если } \eta_j^{\{s\}2} < 0.$$

В случае если $\eta_j^{\{s\}}$ принимает комплексные значения, то в представлении решения (10) следует положить

$$k_j = 1, \quad \eta_j = \sigma \operatorname{Re} \eta_j - (-1)^j i \operatorname{Im} \eta_j, \quad j = 1, 2.$$

Введем постоянные интегрирования

$$\begin{aligned} C_m^{\{s\}(1)} &= C_m^{\{s\}}; \quad m = 1, 4; \quad C_m^{\{s\}(2)} = i \gamma_m^{\{s\}} C_m^{\{s\}}; \\ C_{m+2}^{\{s\}(2)} &= i \gamma_{3-m}^{\{s\}} C_{m+2}^{\{s\}}; \quad \gamma_j^{\{s\}} = k_j \eta_j^{\{s\}}; \quad m = 1, 2. \end{aligned} \quad (11)$$

Компоненты напряженно-деформированного состояния в области изображений (9) с учетом (10) и (11) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_{nj}^{\{s\}F} &= i^{1-\delta_{nj}} k^2 \sum_{m=1}^4 \tau_{ms} \gamma_{nj}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})}; \\ u_n^{\{s\}F} &= i^{\delta_{1n}} k \sum_{m=1}^4 \tau_{ms} \alpha_n^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1})};\end{aligned}\quad (12)$$

$$n, j = 1, 2.$$

В выражениях (12) введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}\tau_m &= \delta_{m1} + \delta_{m4} + 2(\delta_{m2} + \delta_{m3}); \\ \tau_{ms} &= \delta_{1m} + \delta_{2m} + (1 - \delta_s^{N+1})(\delta_{3m} + \delta_{4m}).\end{aligned}$$

Параметры $\gamma_{mj}^{\{s\}(n)}$, $\alpha_1^{\{s\}(1)}$ в формулах (12) являются функциями параметров $k, \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}$, $\gamma_p^{\{s\}}$, $\beta_{im}^{(j)\{s\}}$, $\alpha_{ij}^{(km)\{s\}}$ [3], а именно:

$$\begin{aligned}\gamma_{jj}^{\{s\}(1)} &= k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(21)} - \zeta_{jj}^{\{s\}(11)} \right); \quad \gamma_{jj}^{\{s\}(3)} = k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(22)} + \zeta_{jj}^{\{s\}(12)} \right); \\ \gamma_{jj}^{\{s\}(2)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{jj}^{\{s\}(12)} - \zeta_{jj}^{\{s\}(22)} \right) - (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{jj}^{\{s\}(12)} \right]; \\ \gamma_{jj}^{\{s\}(4)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{jj}^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{jj}^{\{s\}(11)} + \zeta_{jj}^{\{s\}(21)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{jj}^{\{s\}(11)} \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\gamma_{mj}^{\{s\}(1)} &= -k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(21)} + \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right); \quad \gamma_{mj}^{\{s\}(3)} = k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(22)} - \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right); \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{mj}^{\{s\}(22)} + \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{mj}^{\{s\}(12)} \right]; \\ \gamma_{mj}^{\{s\}(4)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \zeta_{mj}^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\zeta_{mj}^{\{s\}(21)} - \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right) - (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \zeta_{mj}^{\{s\}(11)} \right]; \\ j, m &= 1, 2;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\alpha_1^{\{s\}(1)} &= -k \left(\tau_1^{\{s\}(11)} + \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_1^{\{s\}(21)} \right); \quad \alpha_1^{\{s\}(3)} = k \left(\tau_1^{\{s\}(12)} - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_1^{\{s\}(22)} \right); \\ \alpha_1^{\{s\}(2)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_1^{\{s\}(2)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_1^{\{s\}(12)} + \tau_1^{\{s\}(22)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \tau_1^{\{s\}(12)} \right]; \\ \alpha_1^{\{s\}(4)} &= -\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_1^{\{s\}(1)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_1^{\{s\}(11)} - \tau_1^{\{s\}(21)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \tau_1^{\{s\}(11)} \right]; \\ \alpha_2^{\{s\}(1)} &= k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_2^{\{s\}(11)} - \tau_2^{\{s\}(21)} \right); \quad \alpha_2^{\{s\}(3)} = -k \left(\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \tau_2^{\{s\}(12)} + \tau_2^{\{s\}(22)} \right); \\ \alpha_2^{\{s\}(2)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_2^{\{s\}(2)} + k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_2^{\{s\}(12)} - \tau_2^{\{s\}(22)} \right) - (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \tau_2^{\{s\}(22)} \right]; \\ \alpha_2^{\{s\}(4)} &= \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} \xi_2^{\{s\}(1)} - k \left[\delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}} (y_2 + h_{s-1}) \left(\tau_2^{\{s\}(11)} + \tau_2^{\{s\}(21)} \right) + (1 - \delta_{\mu_1 \mu_2}^{\{s\}}) \tau_2^{\{s\}(21)} \right];\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta_{jj}^{\{s\}(np)} &= \gamma_p^{\{s\}} \left(\alpha_{jj}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{jj}^{\{s\}(2n)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \quad \zeta_{mj}^{\{s\}(np)} = \gamma_p^{\{s\}2\delta_{n2}} \left(\alpha_{mj}^{\{s\}(1n)} - \alpha_{mj}^{\{s\}(2n)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \\
\zeta_{jj}^{\{s\}(p)} &= \alpha_{jj}^{\{s\}(11)} + 2(-1)^p \alpha_{jj}^{\{s\}(22)} \gamma_p^{\{s\}2} - 3\alpha_{jj}^{\{s\}(21)} \gamma_p^{\{s\}2}; \\
\zeta_{mj}^{\{s\}(p)} &= -\gamma_p^{\{s\}} \left[\alpha_{mj}^{\{s\}(12)} - 2(-1)^m \alpha_{mj}^{\{s\}(21)} - 3\alpha_{mj}^{\{s\}(22)} \gamma_p^{\{s\}2} \right]; \\
\tau_1^{\{s\}(1p)} &= \gamma_p^{\{s\}} \beta_{11}^{\{s\}(1)}; \quad \tau_1^{\{s\}(2p)} = \gamma_p^{\{s\}} \left(\beta_{11}^{\{s\}(2)} - \beta_{12}^{\{s\}(2)} \gamma_p^{\{s\}2} \right); \\
\xi_1^{\{s\}(p)} &= \beta_{11}^{\{s\}(1)} - 2(-1)^p \beta_{12}^{\{s\}(2)} \gamma_p^{\{s\}2}; \quad \tau_2^{\{s\}(1p)} = \gamma_p^{\{s\}2} \beta_{21}^{\{s\}(2)}; \\
\tau_2^{\{s\}(2p)} &= \beta_{21}^{\{s\}(1)} - \beta_{22}^{\{s\}(1)} \gamma_p^{\{s\}2}; \quad \xi_2^{\{s\}(p)} = \gamma_p^{\{s\}} \left(\beta_{21}^{\{s\}(2)} + 2(-1)^p \beta_{22}^{\{s\}(1)} \right).
\end{aligned}$$

Подставляя (12) в преобразованную систему уравнений (5), (6) (полоса на упругом основании) или (5), (7) (полоса на жестком основании), получаем систему алгебраических уравнений относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$:

полоса на упругом основании

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^4 \overline{\gamma}_{2q}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} &= i^{\delta_{2q}-1} k^{-2} \delta_{\theta N}^{\delta_{1q}} P_q^F; \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \overline{\alpha}_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \tau_{m,s+1} \overline{\alpha}_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right\} &= 0; \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \overline{\gamma}_{2q}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \theta_1^{\{s\} \delta_{1q}} \tau_{m,s+1} \overline{\gamma}_{2q}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right\} &= 0; \quad (13) \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \tau_{m,s+1} \left[k \left(1 - \theta_1^{\{s\}} \right) \overline{\gamma}_{21}^{\{s+1\}(m)} - \theta_1^{\{s\}} \overline{\alpha}_1^{\{s+1\}(m)} \right] C_m^{\{s+1\}} + \right. \\
\left. + \theta_1^{\{s\}} \overline{\alpha}_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} \right\} &= 0; \\
q &= 1, 2; \quad s = \overline{1, N}.
\end{aligned}$$

полоса на жестком основании

$$\begin{aligned}
\sum_{m=1}^4 \overline{\gamma}_{2q}^{\{1\}(m)} C_m^{\{1\}} &= i^{\delta_{2q}-1} k^{-2} \delta_{\theta N}^{\delta_{1q}} P_q^F; \\
\sum_{m=1}^4 \left(\overline{\alpha}_2^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \overline{\alpha}_2^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right) &= 0; \\
\sum_{m=1}^4 \left\{ \overline{\gamma}_{2q}^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} - \theta_1^{\{s\} \delta_{1q}} \overline{\gamma}_{2q}^{\{s+1\}(m)} C_m^{\{s+1\}} \right\} &= 0;
\end{aligned}$$

$$\sum_{m=1}^4 \left\{ \left[k \left(1 - \theta_1^{\{s\}} \right) \tilde{\gamma}_{21}^{\{s+1\}(m)} - \theta_1^{\{s\}} \tilde{\alpha}_1^{\{s+1\}(m)} \right] C_m^{\{s+1\}} + \theta_1^{\{s\}} \tilde{\alpha}_1^{\{s\}(m)} C_m^{\{s\}} e^{(-1)^{m+\tau_m+1} k \gamma_{\tau_m}^{\{s\}} \Delta h_s} \right\} = 0;$$

$$q = 1, 2; \quad s = \overline{1, N-1}; \quad (14)$$

$$\sum_{m=1}^4 \tilde{\alpha}_2^{\{N\}(m)} C_m^{\{N\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{N\}} \Delta h_N} = 0;$$

$$\sum_{m=1}^4 \left[k \left(\theta_1^{\{N\}} - 1 \right) \tilde{\gamma}_{21}^{\{N\}(m)} - \theta_1^{\{N\}} \tilde{\alpha}_1^{\{N\}(m)} \right] C_m^{\{N\}} e^{(-1)^{m+\tau_m} k \gamma_{\tau_m}^{\{N\}} \Delta h_N} = 0.$$

В формулах (13) и (14) используются следующие обозначения:

$$\Delta h_s = h_{s+1} - h_s;$$

$$\tilde{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)} = \gamma_{2n}^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_{s-1}}; \quad \tilde{\alpha}_n^{\{s\}(m)} = \alpha_n^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_{s-1}}; \quad s = \overline{1, N+1}; \quad h_0 = 0;$$

$$\tilde{\gamma}_{2n}^{\{s\}(m)} = \gamma_{2n}^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_s}; \quad \tilde{\alpha}_n^{\{s\}(m)} = \alpha_n^{\{s\}(m)} \Big|_{y_2 = -h_s}; \quad s = \overline{1, N}.$$

Таким образом, решение задачи об установившемся движении многослойной упругой полосы с начальными напряжениями под воздействием подвижной нагрузки в области изображений Фурье сводится к решению системы алгебраических уравнений (13) или (14) относительно неизвестных $C_m^{\{s\}}$.

Для того чтобы перейти в формулах (12) к оригиналам, следует воспользоваться обратным преобразованием Фурье.

Проведенные исследования. К настоящему моменту выполнена следующая работа.

1. Даны постановки и решены аналитически и численно задачи об установившемся движении упругого двухслойного полупространства, состоящего из упругой пластины и подстилающего ее упругого полупространства с начальными напряжениями при воздействии подвижной нагрузки. Уравнения движения пластины записаны с учетом сдвига и инерции вращения.

Решения задач были получены с применением метода интегральных преобразований Фурье и метода комплексных потенциалов [2].

Решения получены в общем виде для сжимаемых и несжимаемых тел с произвольной формой упругого потенциала для теории конечных и двух вариантов малых начальных деформаций.

На основании полученных результатов проведено численное исследование влияния начальных напряжений на значение критических скоростей

движения нагрузки и на напряженно-деформированное состояние двухслойной среды.

Численные исследования выполнены для сжимаемого (с потенциалом гармонического типа) и для несжимаемого (с потенциалом типа Бартенева-Хазановича) материалов в рамках теории конечных начальных деформаций.

Анализ полученных результатов исследования позволяет сделать следующие выводы.

- Значения критических скоростей движения нагрузки и их количество существенно зависят от начальных напряжений в полупространстве, механических параметров пластины и полупространства, а также условий их контакта. При жестком контакте возможно существование двух критических скоростей движения нагрузки, причём, по крайней мере, одна из которых больше скорости волн Рэлея.

- Влияние начальных напряжений на значения критических скоростей движения нагрузки более существенно для сравнительно мягких пластин и для нежесткого контакта. Чем мягче пластина по сравнению с полупространством, тем меньше у нее критическая скорость по сравнению со скоростью волн Рэлея. Значение наименьшей критической скорости при жестком контакте всегда больше, чем при нежестком контакте.

- При заданных механических параметрах всегда можно выделить область значений начальных деформаций, при которых существуют критические скорости движения нагрузки.

- Значения параметров напряженно-деформированного состояния в конкретной точке двухслойного полупространства зависят от начальных напряжений, ее координат и условий контакта. Для докритических скоростей движения нагрузки при жестком контакте напряжения, скорости перемещений в полупространстве и изгибающий момент в пластине меньше, чем при нежестком контакте.

- Темп роста амплитуды величин, характеризующих напряженно-деформированное состояние, при сжатии больше, чем при растяжении. Затухание с удалением от точки приложения нагрузки при сжатии происходит медленнее, чем при растяжении.

- Влияние начальных напряжений значительно увеличивается с ростом скорости движения нагрузки. Особенно это проявляется при предварительном сжатии. При жестком контакте влияние скорости и начальных напряжений менее существенно, чем при нежестком контакте.

- Учет инерции вращения при выводе уравнений движения для пластины особенно важен при нежестком контакте, предварительном сжатии и больших скоростях движения нагрузки.

- Для скоростей движения нагрузки, больших скорости распространения сдвиговых волн в полупространстве, наличие начальных напряжений оказывает существенное влияние на распределение напряжений и скоростей перемещений в полупространстве и изгибающего момента в пластине. Характер этого влияния различен в зависимости от положения рассматриваемой точки слоистого тела относительно точки приложения нагрузки.

2. В рамках рассмотренных в настоящей работе постановок в пространстве изображений Фурье получены аналитические решения следующих задач:

- для упругой полосы, лежащей на упругом полупространстве [3],
- для упругой полосы, лежащей на жестком основании [4],
- для многослойной упругой полосы, лежащей на упругом полупространстве [3],
- для многослойной упругой полосы, лежащей на жестком основании.

Получены рекуррентные формулы для представления решения задач для слоистых конструкций с любым количеством слоев.

Выводы.

1. Учет начальных напряжений в рамках линеаризированной теории упругости приводит к новым постановкам задач взаимодействия деформируемых тел, существенно отличающихся от постановок классических задач теории упругости.

2. Начальные (остаточные) напряжения оказывают существенное влияние на значение параметров, характеризующих напряженно-деформированное состояние слоистых конструкций.

3. Влияние начальных напряжений зависит от скорости движения поперечной нагрузки, механических параметров элементов слоистой среды и условий их сопряжения.

Список литературы: 1. *Гузь А.Н.* Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. – Киев: “А.С.К”, 2004. – 672 с. 2. *Гузь А.Н., Бабич С.Ю., Глухов Ю.П.* Статика и динамика упругих оснований с начальными (остаточными) напряжениями. – Кременчуг, 2007. – Издательство «Кременчуг». – С. 795. 3. *Глухов Ю.П.* Многослойная предварительно напряженная полуплоскость при воздействии подвижной нагрузки. – Доповіді НАН України, 2011, № 7, С. 52 - 57. 4. *Глухов Ю.П.* Об одной динамической задаче для предварительно напряженной полосы с закрепленным основанием. – Вісник національного Черкаського університету. Вип. 172. – Черкаси, 2010. – С. 20 - 24.

Поступила в редколлегию 07.09.2011