

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
Ю.Л. ГЕВОРКЯН, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

МАТРИЧНЫЙ ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МНОГОМАССОВОЙ ЦЕПНОЙ СИСТЕМЫ

Описаний новый метод інтегрування рівнянь руху механічної системи із зосередженими параметрами. Метод використовує можливість представлення загального рішення задачі Коши у вигляді лінійної форми з матричними коефіцієнтами. Для знаходження матричних коефіцієнтів застосовується метод послідовного подвоєння шагу інтегрування.

Описан новый метод интегрирования уравнений движения механической системы с сосредоточенными параметрами. Метод использует возможность представления общего решения задачи Коши в виде линейной формы с матричными коэффициентами. Для нахождения матричных коэффициентов применяется метод последовательного удвоения шага интегрирования.

The new method of an integration of the equations of driving of a mechanical lumped-parameter system is circumscribed. The method uses representation of a common solution of a Cauchy problem as the linear form with matrix factors. The method of sequential doubling of an integration step is applied to a determination of matrix factors

Введение и постановка задачи. Целью данной статьи является описание разработанного авторами матричного метода интегрирования систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, при использовании которых, обычно, выполняется математическое моделирование движения технических устройств различного назначения.

Рассмотрим векторное дифференциальное уравнение второго порядка

$$M \cdot \ddot{\vec{x}} + F \cdot \dot{\vec{x}} + (C + Z) \cdot \vec{x} = \vec{f}(t) + Z \cdot \vec{x}_{cm}(t). \quad (1)$$

В этом уравнении все матрицы являются квадратными и положительными, причём матрицы M и Z – диагональные. При использовании таких уравнений моделируется движение многомассовой механической системы с сосредоточенными параметрами.

В векторном уравнении движения (1) матрицы M и F состоят из инерционных коэффициентов и коэффициентов вязкого трения, а матрицы C и Z – из коэффициентов жёсткости внутренних и внешних связей, соответственно. В правой части уравнения первое слагаемое отвечает силовому, а второе – кинематическому возмущению системы; зависимость векторов $\vec{f}(t)$ (внешние силы) и $\vec{x}_{cm}(t)$ (перемещения подвижных стоек механизма) от времени t предполагается известной. Слагаемым левой части уравнения (1) соответствуют внутренние силы инерции, трения и упругости. В статье рассматривается общий случай, когда матрицы F и C не пропорциональны и не коммутируют. Аналогичный метод для частного случая – свободных колеба-

ний вязкоупругой модели Фойгхта – был рассмотрен в [1, 2].

Известно (смотри, например, [4, § 68]), что для устойчивости явного разностного метода интегрирования при выбранном шаге Δt все частоты λ собственных колебаний должны попадать внутрь области, выделенной на рис.1 штриховкой, а для сходимости этого метода основные частоты ω_m должны удовлетворять неравенству

$$|\omega_m| \cdot \Delta t \ll 1.$$

Представляемый метод разрабатывался для исследования механических систем с растянутым спектром собственных частот, где он позволяет отказаться от неявных или других трудоемких схем (типа *схемы Адамса*). В этих системах весь спектр располагается вблизи мнимой оси, и соотношение максимальной ω_M и минимальной ω_m частот удовлетворяет неравенству

$$\omega_M / \omega_m \gg 1.$$

При численном интегрировании уравнений движения (1) для таких систем явные разностные схемы устойчивы, как и в жёстких системах, при чрезмерно малом шаге, а устойчивые неявные схемы при крупном шаге искажают высокочастотные составляющие решения и не обеспечивают сходимость (в жёстких системах этим искажением можно пренебречь).

Заметим, что при постоянных матричных коэффициентах уравнение (1) описывает движение линейной системы, что для большинства рассматриваемых в наше время задач по исследованию динамики технического устройства является недопустимой идеализацией их исходной постановки. Но если считать, что эти коэффициенты являются медленно изменяющимися функциями времени или, например, зависят от значений искомым динамических параметров, то новый метод станет актуальным для большинства задач указанного класса; соответствующее обобщение анализируется в конце статьи.

Первая краткая презентация метода была выполнена в докладе [4].

Примеры цепных механических систем. На рис.2 схематически изображена простейшая динамическая модель *цепной механической системы*, состоящей из n масс m_i , связанных между собой пружинами с коэффициентами жёсткости c_i . При помощи такой модели изучаются, например, свободные продольные колебания, возникающие в железнодорожном составе при изменении скорости локомотива.

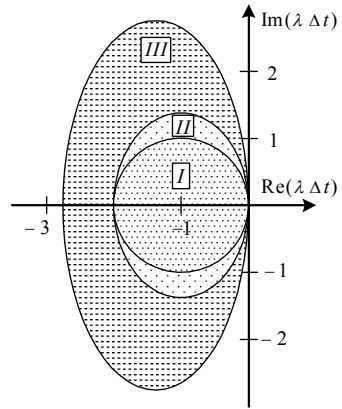


Рисунок 1 – Области устойчивости разностной схемы (I – метод Эйлера, II и III – методы Рунге – Кутты 2 и 4 порядков).

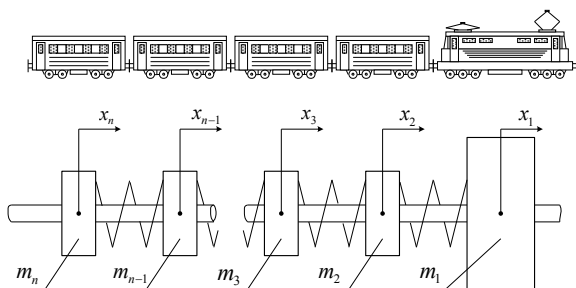


Рисунок 2 – Дискретная динамическая модель железнодорожного состава.

к вагону не передаются. В результате матрица C оказывается трёхдиагональной и имеет следующий вид:

$$C = \begin{pmatrix} -c & c & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c & -2 \cdot c & c & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c & -2 \cdot c & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 \cdot c & c \\ 0 & 0 & 0 & \dots & c & -c \end{pmatrix},$$

где c – это коэффициент жёсткости сцепки.

На рис.3 изображён участок цепной передачи, используемой, например, в велосипедах и мотоциклах. Если колесо 1 является ведущим, а колесо 2 – ведомым, то этот участок не нагружен внешними силами, и в нём могут развиваться интенсивные свободные колебания. Положение i -того звена цепи определяется 6 – тью координатами: тремя перемещениями центра звена относительно осей Ox , Oy , Oz , двумя углами поворота оси звена в горизонтальной и вертикальной плоскости, а также углом разворота звена вокруг его оси (смотри рис.3).

Пусть анализируемый горизонтальный участок цепи состоит из n звеньев. Перенумеруем координаты звеньев в следующем порядке: номера от 1 до 6 получат координаты первого звена, номера от 7 до 12 – такие же координаты второго звена, и так далее. В результате каждая координата получит свой номер $i \in \overline{1, (6 \cdot n)}$; обозначим её x_i . Этой координате соответст-

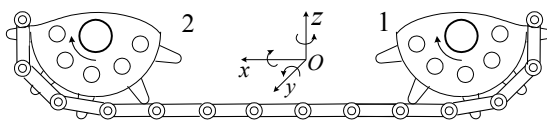


Рисунок 3 – Динамическая модель фрагмента цепной передачи.

В модели положение каждого элемента определяется только одной координатой – перемещением x_i локомотива или вагона вдоль рельсового пути. Железнодорожная сцепка устроена так, что остальные формы колебаний (в вертикальном и поперечном направлении, а также угловые) от вагона

оказывается трёхдиагональной

вует некоторый инерционный коэффициент – масса или момент инерции; обозначим его m_i .

Предположим, что все силы и моменты сил, возникающие в соединениях цепи, пропорциональны изменениям координат. Тогда изменение i -той координаты будет удовлетворять уравнению

$$m_i \cdot \ddot{x}_i = - \sum_{j=1}^{6 \cdot n} c_{ij} \cdot x_j,$$

где c_{ij} – некоторые постоянные числа.

Составим из этих чисел *матрицу коэффициентов жёсткости* $C = [c_{ij}]$ размера $(6 \cdot n) \times (6 \cdot n)$ и представим её в форме блочной матрицы $C = [C_{ij}]$ с квадратными блоками C_{ij} шестого порядка. Каждое звено цепи непосредственно связано с двумя соседними; поэтому матрица C оказывается блочной трёхдиагональной матрицей.

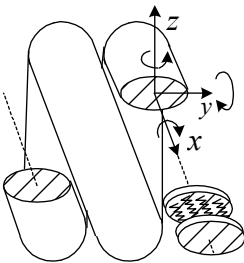


Рисунок 5 – Дискретная модель пружины.

Если прогибом цепи допустимо пренебречь, то колебания по каждой из шести координат происходят независимо от других координат, и это означает, что все ненулевые блоки матрицы являются диагональными. Кроме того, поскольку соединения звеньев также выполнены одинаково, то блоки $C_{i \ i+1}$ и $C_{i+1 \ i}$ одинаковы между собой, и для всех номеров i .

Структура матрицы C показана на рис. 4.

Если представить пружину в виде объединения большого числа тонких колец, связанных посредством упругого невесомого соединения (рис.5), то мы получим ещё один пример цепной механической системы. Матрица C коэффициентов жёсткости этой системы также оказывается блочной трёхдиагональной матрицей (рис.4), но винтовая ось пружины изогнута, поэтому её ненулевые блоки не являются диагональными матрицами.

Аналитическое решение. Далее, с целью экономии места, будем использовать строчную запись для неизвестного вектора \vec{x} и известных векторов $\vec{f}(t)$ и $\vec{x}_{cm}(t)$. Все матричные коэффициенты уравнения (1) симметричны, поэтому изменение формы записи сведётся к простой перестановке сомножителей:

$$\ddot{\vec{x}} \cdot M + \dot{\vec{x}} \cdot F + \vec{x} \cdot (C + Z) = \vec{f}(t) + \vec{x}_{cm}(t) \cdot Z \quad (2)$$

После перехода к обобщенным координатам и силам

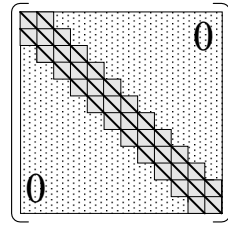


Рисунок 4 – Блочная структура матрицы C .

$$\bar{q} = \begin{pmatrix} \bar{x} \cdot M^{1/2} & \dot{\bar{x}} \cdot M^{1/2} \end{pmatrix}; \quad \bar{b}(t) = \left(\Theta \quad (\bar{f}(t) + \bar{x}_{cm}(t) \cdot Z) \cdot M^{-1/2} \right)$$

уравнение (2) приводится к следующему виду

$$\dot{\bar{q}} = \bar{q} \cdot A + \bar{b}(t), \quad (3)$$

где A – блочная матрица с симметричными блоками,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\hat{C} \\ I & -\hat{F} \end{bmatrix}; \quad \hat{C} = M^{-1/2} \cdot (C + Z) \cdot M^{-1/2}; \quad \hat{F} = M^{-1/2} \cdot F \cdot M^{-1/2}.$$

Общее решение уравнения (3) на промежутке времени $t > t_0$ может быть представлено следующей формулой:

$$\bar{q}(t) = \bar{q}(t_0) \cdot \exp(A \cdot (t - t_0)) + \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau))] d\tau. \quad (4)$$

Для того чтобы убедиться в справедливости формулы, достаточно подставить это решение в уравнение и воспользоваться правилом дифференцирования *свёрточного экспоненциального интеграла*:

$$\frac{d}{dt} \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau))] d\tau = \bar{b}(t) + \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau)) \cdot A] d\tau;$$

для доказательства правила можно, например, представить этот интеграл в таком виде:

$$\int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(A \cdot (t - \tau))] d\tau = \int_{t_0}^t [\bar{b}(\tau) \cdot \exp(-A \cdot \tau)] d\tau \cdot \exp(A \cdot t),$$

а затем дифференцировать произведение двух матриц - функций.

Алгебраический метод. Предположим, что мы смогли для матрицы A найти все собственные числа λ_j и получить её жорданово диагональное представление

$$A = X \cdot D(A) \cdot X^{-1} = X \cdot \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) \cdot X^{-1}.$$

Воспользуемся этим представлением и умножим обе части равенства (4) справа на матрицу X :

$$(\bar{q}(t) \cdot X) = (\bar{q}(t_0) \cdot X) \cdot \exp(D(A) \cdot (t - t_0)) + \int_{t_0}^t [(\bar{b}(\tau) \cdot X) \cdot \exp(D(A) \cdot (t - \tau))] d\tau. \quad (5)$$

Обозначим $\bar{y}(t) = \bar{q}(t) \cdot X$; $\bar{z}(t) = \bar{b}(t) \cdot X$. Тогда матричное равенство (5) оказалось эквивалентным системе из n независимых скалярных равенств

$$y_j(t) = y_j(t_0) \cdot \exp(\lambda_j \cdot (t - t_0)) + \int_{t_0}^t [z_j(\tau) \cdot \exp(\lambda_j \cdot (t - \tau))] d\tau, \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (6)$$

Если функции $z_j(t)$ представляют собой степенные или тригонометрические многочлены, то вычисление интегралов, используемых в правых частях равенств (6), может быть выполнено аналитическими методами.

Поэтому целесообразно разбить исследуемый промежуток времени $[0; T]$ на участки $[t_k, t_{k+1}]$ и выполнить на каждом таком участке аппроксимацию вектора $\vec{b}(t)$ аналитическими зависимостями степенного или тригонометрического вида. После того, как для некоторого промежутка времени $[t_k, t_{k+1}]$ будут вычислены все интегралы и, тем самым, будет определена вектор - функция $\vec{y}(t)$, найденное таким образом значение $\vec{y}(t_{k+1})$ для следующего промежутка $[t_{k+1}, t_{k+2}]$ окажется начальным условием, и расчёт будет продолжен.

После выполнения указанного цикла расчётов для всего промежутка $[0; T]$ по формуле

$$\vec{q}(t) = \vec{y}(t) \cdot X^{-1}$$

и зависимостям

$$\vec{q}(t) = \begin{pmatrix} \vec{x}(t) \cdot M^{1/2} & \dot{\vec{x}}(t) \cdot M^{1/2} \end{pmatrix}$$

можно будет найти скорости $\dot{\vec{x}}(t)$ и перемещения $\vec{x}(t)$ в интересующие моменты времени, после чего построить графики или составить таблицы.

Численно - аналитический метод. Сразу же заметим, что описанный в предыдущем пункте метод интегрирования уравнения (2), если его удастся реализовать на практике, является наиболее эффективным. Однако для получения такого решения потребуются найти собственный базис матрицы A , что для систем с большим числом масс будет связано с очень большими вычислительными затратами.

Этих затрат удастся избежать при использовании следующего метода. Разобьем промежуток $[0; T]$ на N одинаковых отрезков (t_j, t_{j+1}) длиной

Δt и на каждом из них аппроксимируем вектор $\vec{b}(t)$ многочленом:

$$\vec{b}(t) \approx \sum_{k=1}^p \vec{b}_{kj} \cdot (t_{j+1} - t)^{k-1}; \quad t \in (t_j, t_{j+1}); \quad j = 0, 1, \dots, N-1.$$

Интегрирование уравнения (2) на интервале (t_j, t_{j+1}) приводит к следующей зависимости:

$$\bar{q}(t_{j+1}) = \bar{q}(t_j) \cdot D_0 + \sum_{k=1}^p \bar{b}_{kj} \cdot (\Delta t)^k \cdot D_k, \quad (7)$$

где $D_0 = \exp(A \cdot \Delta t)$; $D_k = \int_0^{\Delta t} \exp(A \cdot \Delta t \cdot \tau) \cdot \tau^{k-1} \cdot d\tau$, $k=1, 2, \dots, p$. (8)

Считаем, что для описания движения системы нам вполне достаточно найти величины скоростей \dot{x}_i и перемещений x_i масс системы в моменты времени $t_j = \Delta t \cdot j$, $j=1, 2, \dots, N$. Поэтому для интегрирования уравнения (2) достаточно определить матричные коэффициенты D_k , а затем, используя начальное значение $\bar{q}(0) = q_0$ и известные значения векторных коэффициентов \bar{b}_{kj} аппроксимирующих многочленов, выполнить последовательный пересчет векторов $\bar{q}(t_j)$ обобщенных координат по формуле (7).

Подчеркнём, что в данном методе определение матричных коэффициентов D_k , что составляет наиболее трудоёмкую часть алгоритма, производится один раз, а их использование – многократно.

Если все собственные числа $\lambda \cdot \Delta t$ матрицы $A \cdot \Delta t$ малы (не превосходят по модулю 1), то для определения этих матриц можно использовать начальный отрезок ряда Маклорена матрицы - функции $\exp(A \cdot \Delta t)$.

В результате мы приходим к следующим формулам:

$$D_k = \sum_{l=0}^r (A \cdot \Delta t)^l / (l! \cdot (l+k)), \quad k=0, 1, \dots, p. \quad (9)$$

Заметим, что при использовании этих формул вместо возведения матрицы в степень используются рекуррентные соотношения.

К сожалению, многомассовая система, как правило, имеет растянутый спектр собственных частот, и выполнение условия $|\lambda \cdot \Delta t| < 1$ требует слишком малого шага Δt , что делает интегрирование уравнения (2) по формулам (7) неэффективным. Поэтому для определения матрицы D_0 используется алгоритм вычисления матричной экспоненты, основанный на очевидном тождестве

$$\exp(A \cdot \Delta t) = \exp(A \cdot \Delta t / 2) \cdot \exp(A \cdot \Delta t / 2).$$

Если в обозначении матриц D_k учесть их зависимость от шага интегрирования Δt , то это тождество можно переписать в следующем виде:

$$D_0(\Delta t) = D_0(\Delta t / 2) \cdot D_0(\Delta t / 2). \quad (10)$$

Оказалось, что аналогичные тождества можно получить и для интегралов (8):

$$D_k(\Delta t) = (1/2)^k \cdot [D_k(\Delta t/2) + \sum_{l=1}^k \{C_{k-1}^{l-1} \cdot D_l(\Delta t/2)\} \cdot D_0(\Delta t/2)], \quad (11)$$

где C_k^l – биномиальные коэффициенты, $C_k^l = (k!)/[(l!) \cdot (k-l)!]$.

Если использовать тождества (10), (11) m раз, то шаг интегрирования уменьшится до величины $\Delta = \Delta t/2^m$, при которой вычисление матриц D_k можно проводить по формулам (9). Определив, таким образом, начальные значения этих матриц, после m циклов вычислений по рекуррентным формулам

$$D_k = (1/2)^k \cdot [D_k + \sum_{l=1}^k \{C_{k-1}^{l-1} \cdot D_l\} \cdot D_0], \quad k = p, p-1, \dots, 1, \quad D_0 = D_0 \cdot D_0 \quad (12)$$

получаем искомые значения матричных коэффициентов D_k для формулы интегрирования (7).

Заметим, что при фактическом использовании формул (11), чтобы не произошло потери точности, вместо матрицы D_0 преобразуется матрица

$$\hat{D}_0 = D_0 - E,$$

где E – единичная матрица порядка $2 \cdot n$, а вместо матриц D_k при значениях $k = p, p-1, \dots, 1$ используются матрицы

$$\hat{D}_k = D_k - (1/k) \cdot E.$$

В том случае, когда степень $p = 1$, расчётные формулы (12) выглядят особенно просто:

$$D_1 = (1/2) \cdot (D_1 + D_1 \cdot D_0); \quad D_0 = D_0 \cdot D_0,$$

и эти действия повторяются m раз.

Однако повышение степени p аппроксимирующего многочлена с 1 до 2 или 3 позволяет использовать для описания вектора $\vec{b}(t)$ непрерывные зависимости (кусочно-линейные, кусочно-параболические или сплайновые) и, как следствие, увеличить шаг интегрирования Δt без ущерба для точности результатов расчета.

Учтём симметрию матричных коэффициентов. Описанный выше общий подход не учитывает специфику решаемой задачи, а именно, особенности структуры матрицы A , вектора \vec{b} и их связи с исходными дифференциальными уравнениями движения (1).

Выполненный анализ этих особенностей позволил существенно упростить и улучшить метод.

Во-первых, оказалось, что степени матрицы A имеют следующий

блочный вид:

$$A^k = \begin{pmatrix} A_k + \hat{F} \cdot V_k & -\hat{C} \cdot V_k \\ V_k & A_k \end{pmatrix},$$

где A_k, V_k – некоторые симметричные матрицы, связанные соотношениями

$$V_{k+1} = A_k.$$

Таким образом, вычисление этих степеней сводится к использованию рекуррентной формулы:

$$A_{k+1} = -\hat{F} \cdot A_k - \hat{C} \cdot A_{k-1}; \quad k = 1, 2, \dots, p \quad (13)$$

при начальных условиях

$$A_0 = I; \quad A_1 = I - \hat{F}.$$

Во-вторых, такую же структуру имеют матричные коэффициенты D_k :

$$D_k = \begin{pmatrix} U_k + \hat{F} \cdot W_k & -\hat{C} \cdot W_k \\ W_k & U_k \end{pmatrix},$$

где симметричные матрицы U_k, W_k связаны соотношениями

$$W_0 = \Delta t \cdot U_1; \quad W_k = (\Delta t / k) \cdot (U_1 - U_{k+1}), \quad k = 1, 2, \dots, p. \quad (14)$$

Таким образом, вычисление матричных коэффициентов D_k сводится к циклическому пересчету последовательности матриц U_k , а объем вычислений сокращается приблизительно в 8 раз.

В-третьих, в векторе $\vec{b}(t)$, как правило, только несколько элементов b_j отличны от нуля, причем номера j этих элементов (*каналов силового или кинематического возмущения* системы), известны заранее и в ходе расчетов не изменяются.

Это означает, что во всех матрицах D_k при $k = 1, 2, \dots, p$ фактически используется только несколько одних и тех же строк из нижних блоков. Составим из этих строк так называемые *усеченные* неквадратные матрицы

$$\hat{D}_k = \begin{pmatrix} \hat{W}_k & \hat{U}_k \end{pmatrix}.$$

Оказалось, что алгоритм для пересчета этих матриц \hat{D}_k остался прежним (формулы (12), (14)), но его трудоемкость значительно снизилась и определяется, в основном, трудоемкостью вычисления одной только матрицы D_0 .

Пересчет нижних блоков этой матрицы производится по следующим рекуррентным формулам:

$$W_0 = W_0 \cdot U_0 + U_0 \cdot W_0 + W_0 \cdot \hat{F} \cdot W_0; \quad U_0 = U_0 \cdot U_0 - W_0 \cdot \hat{C} \cdot W_0. \quad (15)$$

Оценим спектр собственных колебаний. Составим характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda \cdot E) = \left\| \begin{bmatrix} -\lambda \cdot I & -\hat{C} \\ I & -\hat{F} - \lambda \cdot I \end{bmatrix} \right\| = 0$$

и, используя для этого одну из формул вычисления определителя блочной матрицы (смотри [1]), преобразуем его к следующему эквивалентному виду:

$$\det(\lambda^2 \cdot I + \lambda \cdot \hat{F} + \hat{C}) = 0, \quad (16)$$

или

$$\det(\lambda^2 \cdot M + \lambda \cdot F + C) = 0. \quad (17)$$

Равенство (16) (или (17)) называется характеристическим уравнением *квадратичного матричного пучка* (смотри [5]). Коэффициентами этого уравнения являются симметричные положительные матрицы I, \hat{F}, \hat{C} (или M, F, C).

С *матричным пучком* $\lambda^2 \cdot I + \lambda \cdot \hat{F} + \hat{C}$ может быть ассоциирована блочная матрица

$$S = \begin{pmatrix} \Theta & -\hat{C}^{1/2} \\ \hat{C}^{1/2} & -\hat{F} \end{pmatrix},$$

имеющая, в чём не сложно убедиться, то же самое характеристическое уравнение (16).

Заметим, что совпадение спектров матриц A и S имеет не только алгебраическое, но и физическое объяснение, но развивать эту тему дальше в данной статье мы не будем.

Поскольку блок $\hat{C}^{1/2}$ симметричный, то матрица S является *J - симметричной матрицей колебаний* (смотри [1]), и весь её спектр расположен в левой полуплоскости (рис.6).

Используя для спектра матрицы S стандартные оценки, приведенные, например, в [3, § 68], и очевидные формулы

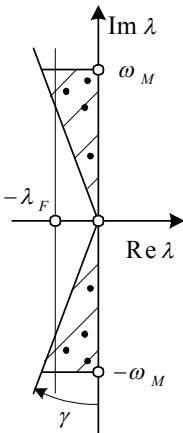
$$\operatorname{Re} S = \begin{pmatrix} \Theta & \Theta \\ \Theta & -\hat{F} \end{pmatrix}; \quad \operatorname{Im} S = \begin{pmatrix} \Theta & i \cdot \hat{C}^{1/2} \\ -i \cdot \hat{C}^{1/2} & \Theta \end{pmatrix},$$

получаем, что её собственные числа λ удовлетворяют условиям

$$-\lambda_F \leq \operatorname{Re} \lambda \leq 0; \quad -\sqrt{\lambda_C} \leq \operatorname{Im} \lambda \leq \sqrt{\lambda_C},$$

$$\text{где } \lambda_F = \|\hat{F}\|; \quad \lambda_C = \|\hat{C}\|.$$

Рисунок 6 –
Спектр частот
собственных
колебаний.



Напомним, что оценку нормы положительной матрицы удобнее всего

проводить при использовании её следа. В частности, если использовать этот приём для матрицы

$$\hat{C} = M^{-1/2} \cdot C \cdot M^{-1/2},$$

то окажется, что максимальная собственная круговая частота ω_{\max} колебаний системы будет оцениваться сверху величиной ω_M , где

$$\omega_M = \sqrt{(Sp \hat{C})} = \sqrt{(c_{11}/m_1 + c_{22}/m_2 + \dots + c_{nn}/m_n)}.$$

При движении механической системы силы вязкого трения обычно оказываются существенно меньшими, чем силы упругости, и можно считать, что

$$F \ll C,$$

то есть *квадратичный пучок имеет малое демпфирование*. Поэтому все собственные числа располагаются комплексно сопряжёнными парами вблизи мнимой оси (смотри рис.6).

Покажем, что при выполнении условия

$$\hat{F} < 2 \cdot \theta \cdot \hat{C}^{1/2}$$

или, что эквивалентно,

$$\hat{F}^2 < 4 \cdot \theta^2 \cdot \hat{C},$$

где число $\theta \in [0, 1[$, весь спектр расположен внутри треугольников, выделенных на рис.2 штриховкой, причём острый угол γ этих треугольников определяется формулой

$$\gamma = \arcsin \theta.$$

Действительно, если собственное число λ_j подставить в уравнение квадратичного пучка, то мы получим вырожденную матрицу

$$\lambda_j^2 \cdot I + \lambda_j \cdot \hat{F} + \hat{C},$$

в ядре которой находится некоторый ненулевой вектор \vec{X} , то есть

$$(\lambda_j^2 \cdot I + \lambda_j \cdot \hat{F} + \hat{C}) \cdot \vec{X} = \Theta.$$

Тогда

$$\lambda_j^2 \cdot \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle + \lambda_j \cdot \langle \hat{F} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle + \langle \hat{C} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle = 0,$$

и, если мы представим комплексное число λ_j в тригонометрической форме

$$\lambda_j = |\lambda_j| \cdot (\cos \varphi_j + i \cdot \sin \varphi_j),$$

то

$$\cos^2 \varphi_j = \langle \hat{F} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle^2 / [2 \cdot \langle \hat{C} \cdot \vec{X}, \vec{X} \rangle \cdot \langle \vec{X}, \vec{X} \rangle] \leq \theta^2,$$

что и требовалось показать.

Выберем оптимальный дробный шаг. Укажем порядок определения чисел r и m , используемых в алгоритме. При этом мы будем стремиться к

минимизации объема вычислений при заданной допустимой погрешности.

Предположим, что мы перешли от основного шага интегрирования Δt к дробному шагу $\Delta = \Delta t / 2^m$, а затем выполнили m циклов расчётов по приведенным выше формулам. Тогда относительная погрешность ε выполнения шага интегрирования Δt по формуле (17) совпадёт с величиной этой погрешности, вычисленной для явной схемы r -го порядка при шаге интегрирования Δ , и будет оцениваться формулой:

$$\varepsilon(m, r) = 2^m \cdot (\omega_M \cdot \Delta)^{r+1} / [(r+1)!].$$

Минимизируем эту величину при условии $m+r = const$ (что примерно отвечает одинаковой трудоемкости расчета) и приходим к выводу, что оптимальное дробление Δ шага интегрирования Δt соответствует условию:

$$\omega_M \cdot \Delta = (r+2) / 2^{r+1}, \quad (18)$$

а минимальное значение ε_m погрешности ε при данном уровне трудоемкости определяется формулой:

$$\varepsilon_m = [(r+2) / 2^{r+1}]^r / [(r+1)!]. \quad (19)$$

Результаты вычислений по формулам (18) и (19) приведены в таблице.

Таблица
Оптимальные сочетания параметров метода

Порядок схемы r	Дробный шаг $\omega_M \cdot \Delta$	Погрешность ε_m
1	0,75	$4 \cdot 10^{-1}$
2	0,50	$4 \cdot 10^{-2}$
3	0,31	$1 \cdot 10^{-3}$
4	0,19	$1 \cdot 10^{-5}$
5	0,11	$2 \cdot 10^{-8}$
6	0,06	$1 \cdot 10^{-11}$

Их анализ показывает, что разработанный метод позволяет производить интегрирование уравнений движения при минимальных вычислительных затратах с любым сколь угодно крупным шагом Δt ; погрешность вычисления может быть легко доведена при этом до погрешности округления чисел в ЭВМ.

При расчете систем с растянутым спектром по численно - аналитическому методу шаг Δt

обычно согласовывается с основным тоном колебаний и изменяется в пределах $0,1 \dots 1 \cdot (1/\omega_{\min})$, где ω_{\min} – минимальная собственная круговая частота.

Поэтому коэффициент 2^m дробления шага приблизительно равен отношению частот $\omega_{\max} / \omega_{\min}$. В подробных математических моделях, учитывающих движение большого числа масс, указанное отношение частот может достигать значений $10^3 \dots 10^6$, чему соответствует изменение числа m в пределах $10 \dots 20$.

Учтём специфику цепной системы. Покажем, что нам удастся дополнительно повысить эффективность применения этого метода для интегрирования уравнения (1) в тех случаях, когда матрицы F и C имеют трёх диагональную или блочную трёх диагональную структуру.

Такой вид матриц соответствует цепным (или *штурмовым*, смотри [6]) механическим системам, у которых каждая масса (кроме крайних) связана только с двумя соседними массами (рис.2,3,5).

При большом числе масс матрицы F и C таких систем оказываются сильно разреженными и имеют *коэффициент заполнения* [7]

$$\alpha \approx 3/n \ll 1.$$

Но анализ формул (9) и (11) показал, что блоки матричных коэффициентов также являются разреженными и $2 \cdot s + 1$ - диагональными (или $2 \cdot s + 1$ -блочно диагональными), причём число заполненных диагоналей составляет:

- у матрицы $A_k - (2 \cdot k + 1)$,
- у матрицы $W_0(2^k \cdot \Delta) - (2^{k+1} \cdot r - 1)$,
- у матрицы $U_0(2^k \cdot \Delta) - (2^{k+1} \cdot r + 1)$.

Поэтому для максимального снижения трудоемкости расчета целесообразно, не изменяя описанного выше алгоритма, ввести учет заполнения матриц ненулевыми элементами и использовать специальную процедуру перемножения симметричных матриц с $2 \cdot s + 1$ - диагональной (блочно диагональной) структурой.

Оценим перспективы обобщения метода. В заключение обсудим возможности использования данного метода для исследования нелинейных систем. Уравнения движения таких систем после линеаризации имеют прежний вид (1), но теперь матрицы M, F, C и Z (а чаще – только некоторые элементы этих матриц) при переходе от одного расчетного интервала (t_j, t_{j+1}) к другому интервалу изменяют свои значения.

Это означает, что в ходе выполнения расчета генерация матричных коэффициентов D_k должна производиться неоднократно, в худшем случае – для каждого нового шага интегрирования Δt . Заметим, что формула интегрирования (7) теперь содержит избыточную информацию, поскольку она дает общее решение задачи для данного интервала (t_j, t_{j+1}) , а мы используем только частное решение. Плата за избыточную информацию – увеличение трудоемкости алгоритма.

Этого недостатка лишен известный альтернативный численный *метод Рунге - Кутты* r - го порядка, трудоемкость которого на шаге интегрирования оказывается ниже приблизительно в $2 \cdot n$ раз.

Однако для получения допустимой погрешности ε_m метод Рунге-Кутта

будет проходить расчётный интервал (t_j, t_{j+1}) с малым дробным шагом

$$\Delta = \Delta t / 2^m,$$

что увеличит трудоёмкость в 2^m раз.

Подсчёт числа операций показывает, что при условии

$$2 \cdot n < 2^m / m \quad (20)$$

трудоёмкость использования метода Рунге – Кутты будет выше трудоёмкости матричного метода.

Условие (20) для дискретных математических моделей механических систем с растянутым спектром частот собственных колебаний выполняется с большим запасом. Поэтому для исследования таких систем (как линейных, так и нелинейных) матричный численно-аналитический метод может рассматриваться в качестве универсального расчётного метода.

Выводы.

1. Описана общая структура дискретной математической модели, используемой для исследования динамики цепной механической системы, и приведены примеры.

2. Разработан численно-аналитический метод интегрирования уравнений движения многомассовой механической системы, основанный на представлении общего решения соответствующей задачи Коши в виде линейной формы с матричными коэффициентами. Метод имеет явную расчётную схему и предназначен для исследования динамики систем, имеющих растянутый спектр частот собственных колебаний.

3. Выполнена оптимизация порядка расчётной схемы и величины используемого дробного шага с учётом допустимой погрешности расчёта.

4. Указан порядок использования метода для динамического анализа нелинейных систем.

Список литературы: 1. Григорьев А.Л., Молдавский Э.А., Тартаковский И.И. Операторный метод расчёта вынужденных колебаний вязкоупругой механической системы // Тез. докл. IV Всесоюз. конф. «Современные проблемы строительной механики и прочности летательных аппаратов» – Харьков, 1991. – С.78. 2. Григорьев А.Л., Тартаковский И.И. Численно – аналитический метод интегрирования уравнений движения квазилинейной системы с сосредоточенными и распределёнными параметрами // Тез. докладов межд. конф. "Дифференциальные и интегральные уравнения. Математическая физика и специальные функции", – Самара, 1992. – С.77-78. 3. Григорьев А.Л. Матричный метод интегрирования уравнений движения механической системы // Информационные технологии: наука, техника, технология, образование, здоровье. Сб науч. тр.– Харьков: ХГПУ, 1999.-Вып.7.–Ч.1.–С. 262-268. 4. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Учебник. – Харьков: НТУ "ХПИ", 2002. – 542 с. 5. Глазман И.М., Любич Ю.И. Конечномерный линейный анализ. – М.: Наука, 1969. 6. Гантмахер Ф.Р., Крейн М.Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М., Л.: Гос. изд. техн.-теор. лит., 1950. 7. Тьюарсон Р. Разреженные матрицы. – М.: Мир, 1980.

Поступила в редколлегию 06.09.2011