УДК 519.21

З.Ф. НАЗИРОВ, канд. фіз.-мат. наук, доц., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків;
Н.В. ЧЕРЕМСЬКА, канд. техн. наук, ст. викл., НТУ «ХПІ»;
А.А. ЯНЦЕВИЧ, д-р фіз.-мат. наук, проф., ХНУ ім. В.Н. Каразіна, Харків

ЛІНІЙНІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ДИСКРЕТНИХ ВИПАДКОВИХ ПОЛІВ

Розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. У статті розглядалися лінійні перетворення над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Рассмотрены линейные преобразования некоторых классов случайных полей. Получены необходимые и достаточные условия в терминах корреляционных функцій для того чтобы преобразованное поле принадлежало тому или иному классу. В статье рассматривались линейные преобразования двухпараметрические последовательности в гильбертовом пространстве, которые строятся по заданному дискретному случайному полю.

The article deals with linear transformations of certain classes of random fields. Necesssary and sufficient conditions in terms of correlation function to convert the field belonged to a particular class. The article deals with two-parameter sequence of linear transformations in Hilbert space, which are constructed from a given discrete random field.

Вступ. Статистична нестаціонарність або неоднорідність широко зустрічається у прикладних задачах. Наприклад, неоднорідна турбулентність, перехідні процеси у різноманітних стохастичних системах, розповсюдження хвиль у статистично неоднорідних або нестаціонарних середовищах. Розв’язання таких задач приводить до неоднорідних випадкових полів, які є мало дослідженими.

Аналіз останніх досліджень. До цього часу була розроблена достатньо повна спектральна теорія однорідних випадкових полів [1,2]. Дискретні поля вивчались лише епізодично [3,4]. Гільбертів підхід до лінійних перетворень дискретних випадкових полів не розлядався.

Постановка задачі. Визиває зацікавленість розповсюдження результатів робот [3,4], в яких розглядались лінійні перетворення випадкових послідовностей як послідовностей у гільбертовому просторі, на дискретні випадкові поля.

Розв’язання задачі для однорідного випадкового поля. Нехай $u(n,m,\omega)$ – це дискретне випадкове поле з математичним очікуванням $M\,u(n,m,\omega)=0,\quad n,m\in\mathbb{N}$ та кореляційною функцією $K(n,m,p,q)=Mu(n,m,\omega)\overline{u(p,q,\omega)}$. Вкладемо випадкове поле $u(n,m,\omega)$ стандартним чином у гільбертів простір. Отримаємо $u(n,m)$ – поле у гільбертівому просторі з кореляційною функцією $K(n,m,p,q)=\langle u(n,m),u(p,q)\rangle$. Поле назвемо *еволюційно зображеним*, якщо у відповідному гільбертівому просторі $u(n,m)=T_1^n T_2^m u_0$. Припускатимемо, що T_1,T_2 комутують, тобто $[T_1,T_2]=0$ або $T_1T_2-T_2T_1=0$.

Означення. Поле $u(n,m)$ вважається однорідним, якщо

$$K(n,m,p,q)=K(n-p,m-q).$$

Теорема 1. *Однорідне поле завжди еволюційно зображене.*

Доведення. Розглянемо лінеал $L=\underset{n,m\in\mathbb{Z}}{V}u(n,m)$. В L визначимо T_τ наступним чином:

$$\forall h\in L: h=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}u(k,l)\quad T_\tau h=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}u(k+\tau,l),$$

аналогічно,

$$T_t h=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}u(k,l+t),\ [T_\tau,T_t]=0.$$

Через однорідність поля T_τ,T_t є изометрією.

Дійсно, $\forall x,y\in L:\ x=\sum_{n,m=1}^{N_1,N_2}a_{n,m}u(n,m)$, $y=\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}b_{p,q}u(p,q)$, маємо

$$\langle T_\tau x,T_\tau y\rangle_L=\sum_{n,m=1}^{N_1,N_2}\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}a_{n,m}\overline{b_{p,q}}\langle u(n+\tau,m),u(p+\tau,q)\rangle,$$

але кореляційна функція однорідного поля залежить від різниці

$$K(n+\tau,p+\tau,m,q)=K(n,m,p,q)=\langle u(n,m),u(p,q)\rangle,$$

таким чином, $\langle T_{\tau_1}x,T_{\tau_1}y\rangle_L=\langle x,y\rangle_L$. Аналогічно розглядається і $\langle T_t x,T_t y\rangle_L$. За неперервністю це продовжується на замикання $\overline{L}$ і звідси витікає, що T_τ,T_t є унітарними операторами. Їх комутуємость очевидна.

Розглянемо оператори зсуву на одиницю:

$$U_1 h = \sum_{k,l=1}^{N_1,N_2} u(k+1,l),\ \ U_2 h = \sum_{k,l=1}^{N_1,N_2} u(k,l+1)\,.$$

Якщо $u(n,m) = T_n u(0,m)$, $u(n,m) = T_m u(n,0)$, тоді $T_n = U_1^n, T_m = U_2^m$.

Ці зображення легко отримати за методом математичної індукції.

Якщо від $n = 0$ перейти до $n = -1$, отримаємо $T_n = U_1^{-n} = \left(U_1^{-1}\right)^n$. Аналогічні міркування є справедливими і для m. Отримуємо,

$$u(n,m) = U_1^n U_2^m u(0,0)\,,\ \ n,m \in \mathbb{Z}\,.$$

Позначимо $u(0,0) = u_0$. U_1^n, U_2^m – комутуючі унітарні оператори. Розглянемо спектральні розклади операторів U_1 і U_2. З комутуємості операторів U_1 і U_2 витікає комутуємость відповідних розкладів одиниці:

$$U_1 = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_1(\lambda), U_2 = \int_0^{2\pi} e^{i\mu} dE_2(\mu),\quad \left[E_1(\lambda), E_2(\mu)\right] = 0\,.$$

$$U_1 U_2 = U_2 U_1 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(\lambda+\mu)} E(d\lambda, d\mu),\quad E(d\lambda, d\mu) = dE_1(\lambda) dE_2(\mu)\,,$$

тоді для однорідного випадкового поля $u(n,m)$ отримуємо спектральний розклад

$$u(n,m) = U_1^n U_2^m u(0,0) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i\lambda n + i\mu m} E(d\lambda, d\mu) u_0$$

Розглянемо лінійне перетворенняё однорідного поля $u(n,m)$ – поле $V(n,m) = Bu(n,m)$, де оператор $B \in [H_u, H_u]$, $\|B\| < \infty$, і нехай $I - B^* B = \langle \cdot, e \rangle e$.

Означення. Поле $V(n,m) = Bu(n,m)$ назвемо *дилатацією першого порядку* однорідного поля $u(n,m)$.

Розглянемо кореляційну функцію поля $V(n,m)$:

$$K_{VV}(n,m,p,q) = \langle Bu(n,m), Bu(p,q) \rangle =$$
$$= K_{uu}(n,m,p,q) - \Phi(n,m)\overline{\Phi(p,q)}\,, \tag{1}$$

де

$$\Phi(n,m) = \langle u(n,m), e \rangle\,, \tag{2}$$

Відзначимо, що $\Phi(n,m)$ – лінійний функціонал від $u(n,m)$.

Теорема 2. *Для того щоб поле* $V(n,m)$ *було дилатацією першого порядку однорідного поля* $u(n,m)$*, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція* $K_{VV}(n,m,p,q)$ *мала вигляд (1), де* $\Phi(n,m)$ *– лінійний функціонал від* $u(n,m)$.

Доведення. Необхідність.

$$K_{uu}(n,m,p,q)=\langle u(n,m),u(p,q)\rangle=$$

$$=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\lambda_1 n+i\mu_1 m-i\lambda_2 n-i\mu_2 m}\left\langle E(d\lambda_1,d\mu_1)u_0,E(d\lambda_2,d\mu_2)u_0\right\rangle.$$

За властивостями розкладу одиниці E_λ, E_μ, отримуємо

$$K(n,m,p,q)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)\lambda+i(m-q)\mu}F(d\lambda,d\mu),\tag{3}$$

де $F(d\lambda,d\mu)=\left\|E(d\lambda,d\mu)u_0\right\|^2$.

Якщо існує похідна $\dfrac{\partial^2 F(\lambda,\mu)}{\partial\lambda\partial\mu}=f(\lambda,\mu)$, яка називається *спектральною щільністю*, то

$$K(n-m,p-q)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i(n-p)\lambda+i(m-q)\mu}f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu.\tag{4}$$

Через те, що $I-B^*B=\langle\cdot,e\rangle e$, для функції

$$K_{VV}(n,m,p,q)=\langle Bu(n,m),Bu(p,q)\rangle=\langle B^*Bu(n,m),u(p,q)\rangle$$

легко отримуємо зображення (1).

Достатність. За спектральною мірою $F(d\lambda,d\mu)=F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо (не єдиним чином) оператори $\hat{U}_1$ і $\hat{U}_2$, відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n,m)=\hat{U}_1^n\hat{U}_2^m u_0$, яке має задану кореляційну функцію (3) або (4). Далі стандартним чином будуємо гільбертів простір $H_{\hat{u}}$. Через те. що $\Phi(n,m)$ – лінійний функціонал від $\hat{u}(n,m)$, то за теоремою Риса він має вигляд $\Phi(n,m)=\langle\hat{u}(n,m),\hat{h}\rangle_H$. Через те, що $H_{\hat{u}}=\overline{\bigvee_{n,m\in\mathbb{Z}}\hat{u}(n,m)}$, то $\forall\hat{h}\in H_{\hat{u}}$ отримуємо

$$\hat{h}=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0,\tag{5}$$

де $\varphi(\lambda,\mu)=\sum_{n,m=1}^{N_1,N_2} a_{n,m}e^{i\lambda n+i\mu m}$, або $\varphi(\lambda,\mu)$ є границею за метрикою $H_{\hat{u}}$ таких елементів. Отже, для h (як і для будь-якого елемента $H_{\hat{u}}$) маємо зображення $h=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0$ з невідомою функцією $\varphi(\lambda,\mu)$.

Через те, що

$$\Phi(n,m)=\langle u(n,m),h\rangle_H=\left\langle \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda n+i\mu m}E(d\lambda,d\mu)u_0, \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0\right\rangle,$$

але. згідно з властивостями диференціалів dE_λ, dE_μ, отримуємо

$$\Phi(n,m)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\varphi(\lambda,\mu)}F(d\lambda,d\mu),$$

де $F(d\lambda,d\mu)=\left\|E(d\lambda,d\mu)u_0\right\|^2$. $F(d\lambda,d\mu)=f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu$, тобто $f(\lambda,\mu)=\dfrac{\partial^2 F(\lambda,\mu)}{\partial\lambda\partial\mu}$.

Таким чином, $\Phi(n,m)=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\varphi(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu$, тобто $\Phi(n,m)$ – коефіцієнти подвійного ряда Фур'е для функції $\overline{\varphi(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)$.

Отже, $\overline{\varphi(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)=\sum\limits_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda n-i\mu m}\Phi(n,m)$.

Звідси $\varphi(\lambda,\mu)=\dfrac{1}{2\pi f(\lambda,\mu)}\sum\limits_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\Phi(n,m)}$. Остаточно отримуємо

$$h=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi f(\lambda,\mu)}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty} e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\Phi(n,m)}E(d\lambda,d\mu)u_0 .$$

За відомим h легко підібрати лінійний обмежений оператор B, такий що $I-B^*B=\langle\cdot,h\rangle h$.

Теорема доведена.

Розглянемо далі дилатації $r-$го порядку $I-B^*B=\sum\limits_{\alpha=1}^{r}\langle\cdot,e_\alpha\rangle e_\alpha$ та функцію.

$$K_{VV}(n,m,p,q)=K_{uu}(n,m,p,q)-\sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(n,m)\overline{\Phi_\alpha(p,q)}, \tag{4}$$

де $\Phi_\alpha(n,m)=\langle u(n,m),e_\alpha\rangle$ – лінійний функціонал від $u(n,m)$.

Теорема 3. *Для того щоб поле* $V(n,m)$ *було дилатацією* $r-$*го порядку однорідного поля* $u(n,m)$, *необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція* $K_{VV}(n,m,p,q)$ *мала вигляд (4), где* $\Phi_\alpha(n,m)$ *– лінійні функціонали від* $u(n,m)$.

Доведення. Необхідність. Нехай B – обмежений оператор, такий що

$$I-B^*B=\sum_{k=1}^{r}\langle\cdot,h_k\rangle h_k .$$

Тоді

$$K_{VV}(n,m,p,q)=\langle Bu(n,m),Bu(p,q)\rangle=\langle u(n,m),u(p,q)\rangle-$$
$$-\langle (I-B^*B)u(n,m),u(p,q)\rangle=K_{uu}(n,m,p,q)-\sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(n,m)\overline{\Phi_\alpha(p,q)},$$

де $\Phi_\alpha(n,m)=\langle u(n,m),h_\alpha\rangle_H$.

Достатність. За спектральною мірою $F(d\lambda,d\mu)=F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо оператори $\hat{U}_1$ і $\hat{U}_2$, відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n,m)=\hat{U}_1^n\hat{U}_2^m u_0$ і будуємо $H_{\hat{u}}$. Через те, що $\Phi_\alpha(n,m)$ – це лінійний функціонал від $\hat{u}(n,m)$, то за теоремою Риса він має вигляд $\Phi_\alpha(n,m)=\langle\hat{u}(n,m),\hat{h}_\alpha\rangle_H$. Оскільки $H_{\hat{u}}=\overline{\underset{n,m\in\mathbb{Z}}{V}\hat{u}(n,m)}$, то

$$\hat{h}_\alpha=\sum_{n,m=1}^{N_1,N_2}a_{n,m}^{(\alpha)}u(n,m)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi_\alpha(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0\ , \tag{6}$$

де $\varphi_\alpha(\lambda,\mu)=\sum_{n,m=1}^{N_1,N_2}a_{n,m}^{(\alpha)}e^{i\lambda n+i\mu m}$, або $\varphi_\alpha(\lambda,\mu)$ має вигляд границь (6) в середньоквадратичному.

Таким чином, $\Phi_\alpha(n,m)=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\varphi_\alpha(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)\,d\lambda d\mu$, тобто $\Phi_\alpha(n,m)$ – коефіцієнти подвійного ряда Фур'е для функції $\overline{\varphi_\alpha(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)$.

Отже, $\overline{\varphi(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)=\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}e^{-i\lambda n-i\mu m}\Phi_\alpha(n,m)$, звідси

$$\varphi_\alpha(\lambda,\mu)=\frac{1}{2\pi f(\lambda,\mu)}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\Phi_\alpha(n,m)}.$$

Остаточно отримуємо

$$h_\alpha=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{f(\lambda,\mu)}\sum_{n,m=-\infty}^{\infty}e^{i\lambda n+i\mu m}\overline{\Phi_\alpha(n,m)}E(d\lambda,d\mu)u_0 .$$

Завершення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 2.

Розв'язання задачі для ганкелевого випадкового поля. Розглянемо еволюційно зображене поле $u(n,m)=A_1^n A_2^m u_0$, де A_1, A_2 – самоспряжені перестановочні обмежені оператори у гільбертовому просторі

$$H=\overline{\underset{n,m\in\mathbb{Z}}{V}u(n,m)}.\ \forall h\in L: h=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}u(k,l)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0 ,$$

де $\varphi(\lambda,\mu)=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}\lambda^k\mu^l$. Кореляційна функція такого поля залежить від суми аргументів.

Лема. *Для того щоб поле було ганкелевим , необхідно та достатньо, щоб кореляційна функція цього поля задовольняла співвідношенню*

$$K(n,m,p,q)=K(n+p,m+q). \tag{7}$$

Доведення. Необхідність. За означенням кореляційної функції

$$K(n,m,p,q)=\langle u(n,m),u(p,q)\rangle_{H_u}=\langle A_1^n A_2^m u_0, A_1^p A_2^q u_0\rangle_{H_u}=$$
$$\langle A_1^{n+p}A_2^{m+q}u_0,u_0\rangle_{H_u}==K(n+p,m+q).$$

Достатність. Вкладемо поле $u(n,m)$ в гільбертів простір H_u, який є замиканням елементів вигляду $h=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}A_1^k A_2^l u_0$. Тоді з умови (7) легко отримати співвідношення

$$\langle A_1 h,f\rangle_{H_u}=\langle h,A_1 f\rangle_{H_u}, \tag{8}$$

де $f=\sum_{p,q=1}^{N_1,N_2}b_{p,q}A_1^p A_2^q u_0$ Переходячи до замикання в (8) отримуємо, що

$$\langle A_1 h_1,h_2\rangle_{H_u}=\langle h_1,A_1 h_2\rangle_{H_u}\quad \forall h_1,h_2\in H_u .$$

Звідси витікає $A_1 = A_1^*$. Рівність $A_2 = A_2^*$ можна отримати аналогічно, якщо урахувати умову $\left[A_1, A_2\right] = 0$. Лема доведена.

Такі поля та їх збурення розглядались у [3,4]

Розглянемо спектральні розклади операторів A_1 і A_2:

$$A_1 = \int_{a_1}^{b_1} \lambda dE_1(\lambda),\ A_2 = \int_{a_2}^{b_2} \mu dE_2(\mu),\quad \left[E_1(\lambda), E_2(\mu)\right] = 0.$$

$$A_1 A_2 = A_2 A_1 = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \lambda\mu E(d\lambda, d\mu),\quad E(d\lambda, d\mu) = dE_1(\lambda) dE_2(\mu),$$

тоді для ганкелева випадкового поля $u(n,m)$ отримуємо спектральний розклад $u(n,m) = A_1^n A_2^m u_0 = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \lambda^n \mu^m E(d\lambda, d\mu) u_0$.

Розглянемо лінійне перетворення ганкелева поля $u(n,m)$ – поле $V(n,m) = Bu(n,m)$, де оператор $B \in [H_u, H_u]$, $\|B\| < \infty$ і $I - B^* B = \langle \cdot, e \rangle e$.

Означення. *Поле* $V(n,m) = Bu(n,m)$ *назвемо дилатацією першого порядку ганкелевого поля* $u(n,m)$.

Розглянемо кореляційну функцію поля $V(n,m)$

$$K_{VV}(n,m,p,q) = \left\langle Bu(n,m), Bu(p,q) \right\rangle = K_{uu}(n,m,p,q) - \Phi(n,m)\overline{\Phi(p,q)}, \tag{7}$$

де

$$\Phi(n,m) = \left\langle u(n,m), h \right\rangle, \tag{8}$$

Відзначимо, що $\Phi(n,m)$ – лінійний функціонал від $u(n,m)$.

Через те, що $K_{uu}(n,m,p,q) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \lambda^{n+p} \mu^{m+q} F(d\lambda, d\mu)$, або, якщо існує похідна $\dfrac{\partial^2 F(\lambda,\mu)}{\partial\lambda\partial\mu} = f(\lambda,\mu)$, тобто $F(d\lambda, d\mu) = f(\lambda,\mu) d\lambda d\mu$, то

$$K_{uu}(n,m,p,q) = \int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2} \lambda^{n+p} \mu^{m+q} f(\lambda,\mu) d\lambda d\mu. \tag{9}$$

Теорема 4. *Для того щоб поле* $V(n,m)$ *було дилатацією першого порядку ганкелева поля* $u(n,m)$, *необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція*

$K_{VV}(n,m,p,q)$ мала вигляд (7), де $\Phi(n,m)$ – лінійний функціонал від $u(n,m)$.

Доведення. Необхідність. За властивостями розкладу одиниць E_λ, E_μ, отримуємо

$$K_{uu}(n,m,p,q)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\lambda^{n+p}\mu^{m+q}F(d\lambda,d\mu), \tag{10}$$

де $F(d\lambda,d\mu)=\left\|E(d\lambda,d\mu)u_0\right\|^2$.

Через те, що $I-B^*B=\langle\cdot,e\rangle e$, то для функції

$$K_{VV}(n,m,p,q)=\langle Bu(n,m),Bu(p,q)\rangle=\langle B^*Bu(n,m),u(p,q)\rangle$$

легко отримати зображення (7).

Достатність.

За спектральною мірою $F(d\lambda,d\mu)=F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо (не єдиним чином) оператори $\hat{A}_1$ и $\hat{A}_2$, відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n,m)=\hat{A}_1^n\hat{A}_2^m u_0$, яке має задану кореляційну функцію (9) або (10). Далі стандартным чином будуємо гільбертів простір $H_{\hat{u}}$. Через те, що $\Phi(n,m)$ – лінійний функціонал від $\hat{u}(n,m)$, то за теоремою Риса він має вигляд $\Phi(n,m)=\left\langle\hat{u}(n,m),\hat{h}\right\rangle_H$. Оскільки $H_{\hat{u}}=\overline{\bigvee_{n,m\in\mathbb{Z}}\hat{u}(n,m)}$, то $\forall\hat{h}\in H_{\hat{u}}$ отримуємо

$$\hat{h}=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}u(k,l)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0 \text{, де } \varphi(\lambda,\mu)=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a_{k,l}\lambda^k\mu^l$$

або $\varphi(\lambda,\mu)$ є границею за метрикою $H_{\hat{u}}$ таких елементів. Отже, для h маємо зображення:

$$h=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0$$

з невідомою функцією $\varphi(\lambda,\mu)$.

Через те, що

$$\Phi(n,m)=\langle u(n,m),h\rangle_H=\left\langle\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\lambda^n\mu^m E(d\lambda,d\mu)u_0,\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\varphi(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0\right\rangle,$$

але за властивостями dE_λ, dE_μ, отримуємо

$$\Phi(n,m)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\lambda^n\mu^m\overline{\varphi(\lambda,\mu)}F(d\lambda,d\mu)\text{, де } F(d\lambda,d\mu)=\left\|E(d\lambda,d\mu)u_0\right\|^2.$$

Звідки

$$F(d\lambda,d\mu)=f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu\text{, тобто } \frac{\partial^2 F}{\partial\lambda\partial\mu}=f(\lambda,\mu).$$

Таким чином, $\Phi(n,m)=\int_{a_1}^{b_1}\int_{a_2}^{b_2}\lambda^n\mu^m\overline{\varphi(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)d\lambda d\mu$,і ми отримуємо двомірну проблему моментів. Умови розв'язання проблеми моментів у випадку, що розглядається, мають вигляд [5]: $\left|\left\langle P_1^{(n)}(A_1)P_2^{(m)}(A_2)u_0,h\right\rangle\right|<C$ $\forall n,m>0$, де $P_1^{(n)}(A_1)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(I-A_1^{\,n-k}\right)^k$, $P_2^{(m)}(A_2)=\sum_{j=0}^{m}C_m^j\left(I-A_2^{\,m-j}\right)^j$.

За $\Phi(n,m)$ відновлюємо $\overline{\varphi(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)$, тобто отримуємо зображення для елемента $\hat{h}$. За відомим $\hat{h}$ легко підібрати лінійний обмежений оператор B такий, що $I-B^*B=\langle\cdot,h\rangle h$. Теорема доведена.

Розглянемо далі дилатації $r-$го порядку $I-B^*B=\sum_{\alpha=1}^{r}\langle\cdot,e_\alpha\rangle e_\alpha$.та функцію

$$K_{VV}(n,m,p,q)=K_{uu}(n,m,p,q)-\sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(n,m)\overline{\Phi_\alpha(p,q)}, \tag{11}$$

де $\Phi_\alpha(n,m)=\langle u(n,m),e_\alpha\rangle$ – лінійний функціонал від $u(n,m)$.

Теорема 5. *Для того щоб поле* $V(n,m)$ *було дилатацією* $r-$*го порядку однорідного поля* $u(n,m)$*, необхідно і достатньо, щоб кореляційна функція* $K_{VV}(n,m,p,q)$ *мала вигляд (11), де* $\Phi_\alpha(n,m)$ *– лінійний функціонал від* $u(n,m)$.

Доведення. Необхідність. Нехай B – обмежений оператор, такий що $I-B^*B=\sum_{k=1}^{r}\langle\cdot,h_k\rangle h_k$. Тоді

$$K_{VV}(n,m,p,q)=\langle Bu(n,m),Bu(p,q)\rangle=\langle u(n,m),u(p,q)\rangle-$$
$$-\left\langle\left(I-B^*B\right)u(n,m),u(p,q)\right\rangle=K_{uu}(n,m,p,q)-\sum_{\alpha=1}^{r}\Phi_\alpha(n,m)\overline{\Phi_\alpha(p,q)},$$

де $\Phi_\alpha(n,m)=\langle u(n,m),h_\alpha\rangle_H$.

Достатність. За спектральною мірою $F(d\lambda,d\mu)=F_1(d\lambda)F_2(d\mu)$ відновлюємо (не єдиним чином) оператори $\hat{A}_1$ і $\hat{A}_2$, відповідно відновлюємо і однорідне поле $\hat{u}(n,m)=\hat{A}_1^n\hat{A}_2^m u_0$ і будуємо $H_{\hat{u}}$. Через те, що $\Phi_\alpha(n,m)$ – лінійний функціонал від $\hat{u}(n,m)$, то за теоремою Риса він має вигляд $\Phi_\alpha(n,m)=\langle\hat{u}(n,m),\hat{h}_\alpha\rangle_H$. Оскільки $H_{\hat{u}}=\overline{\underset{n,m\in\mathbb{Z}}{V}\hat{u}(n,m)}$, то $\forall\hat{h}\in H_{\hat{u}}$ отримуємо $\hat{h}=\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\varphi_\alpha(\lambda,\mu)E(d\lambda,d\mu)u_0$, де

$$\varphi_\alpha(\lambda,\mu)=\sum_{k,l=1}^{N_1,N_2}a^{(\alpha)}{}_{k,l}\lambda^k\mu^l\,, \tag{12}$$

або щільність $\varphi_\alpha(\lambda,\mu)$ має вигляд границь (12) в средньоквадратичному.

Таким чином, $\Phi_\alpha(n,m)=\int\limits_{a_1}^{b_1}\int\limits_{a_2}^{b_2}\lambda^n\mu^m\overline{\varphi_\alpha(\lambda,\mu)}f(\lambda,\mu)\,d\lambda d\mu$. Тобто мизнову приходимо до двомірної проблеми моментів, умови розв'язання якої були наведені раніше. Завершення доведення проводиться аналогічно доведенню теореми 4.

Висновки. У статті розглянуто лінійні перетворення деяких класів випадкових полів. Отримано відповідні необхідні та достатні умови в термінах кореляційних функцій для того, щоб перетворене поле належало тому чи іншому класу. На відміну від стандартного підходу до лінійних перетворень полів у статті лінійні перетворення розглядалися над двопараметричними послідовностями у гільбертовому просторі, які будуються за початковим дискретним випадковим полем.

Список літератури: **1.** *Яглом А.М.* Введение в теорию стационарных случайных функций // УМН. – 1952. –Т. 1. – Вып.5(51),– С.3-168. **2.** *Цзян Цзе Пей* О линейной экстраполяции непрерывного однородного поля // Теория вероятностей и ее применения. – 1957. – Т. 2. – №1. – С. 60-91. **3.** *Шаронова Н.В., Черемская Н.В.* Корреляционная теория одного класса неоднородных случайных полей // Вестник Херсонского технического университета.– 2004. – №1(19). – С.343-348. **4.** *Назиров З.Ф., Черемська Н.В., Янцевич А.А.* Про один клас неоднорідних випадкових полів // Вісник Національног технічного університету „Харківський політехнічний університет". Збірник наукових праць. Тематичний випуск Математичне моделювання в техниці та технологіях. Харків: НТУ"ХПІ". 2011. №13.–С.146-153. **5.** *Shohat J.A., Tamarkin J.D.* The Problem of Moments // New Jork, 1943.– 140 p.

Надійшла до редколегії 27.09.2011