

**В.П. ОЛЬШАНСКИЙ**, д-р физ.-мат. наук, проф., ХНТУСХ, Харьков;  
**С.В. ОЛЬШАНСКИЙ**, ассистент., НТУ «ХПИ»

## УСТАНОВИВШИЕСЯ КОЛЕБАНИЯ СКОРОСТИ ПОТОКА ЗЕРНОВОЙ СМЕСИ НА ПЛОСКОМ ВИБРОРЕШЕТЕ

За допомогою функцій Кельвіна виражено амплітуди коливань швидкості руху вібророзрідженої зернової суміші на плоскому нахиленому решеті в усталеному режимі роботи. Вивчено вплив параметрів повздовжніх коливань решета і механіко-технологічних характеристик суміші на нерівномірність її потоку, коли зміна вібров'язкості суміші по товщині шару зерна описується степеневою функцією з від'ємним показником степені.

С помощью функций Кельвина выражены амплитуды колебаний скорости движения виброоживленной зерновой смеси на плоском наклонном решете в установившемся режиме работы. Изучено влияние параметров продольных колебаний решета и механико-технологических характеристик смеси на неравномерность её потока, когда изменение вибровязкости смеси по толщине слоя описывается степенной функцией с отрицательным показателем степени.

With the aid of the Kelvin pronounced amplitude of the velocity vibroliquefaction grain mixture on a flat inclined sieve in the steady state of his work. The influence of parameters of longitudinal vibration of the sieve and mechanical-technological characteristics of the mixture on the unevenness of its flow when a change of the vibroviscosity mixture of the layer of grain is described by a power function with a negative exponent.

**Постановка проблеми.** Вибрации решета интенсифицируют процесс разделения на нём зерновой смеси на две фракции. Движение виброоживленной смеси по наклонному решету имеет сходство с течением вязкой жидкости по наклонному лотку. Поэтому для описания потока зерна по вибрирующей поверхности в математических моделях стали использовать уравнения динамики однородной вязкой жидкости. Но специфика виброоживленной смеси проявляется в том, что её эффективная вязкость зависит от внутреннего трения и давления, которые возрастают с удалением от свободной поверхности вглубь слоя. При учёте этой особенности, движение смеси приходится описывать уравнениями течения неоднородной жидкости, у которой вязкость зависит от одной из пространственных координат. Разрабатывая уточнённые модели зернового потока по направляющей перфорированной поверхности желательного учитывать эту зависимость.

**Обзор последних исследований и публикаций.** Из работ, в которых математически моделировалось движение неоднородного зернового слоя, отметим [1-4,9]. В [1] определялась усреднённая за период колебаний скорость потока. Поэтому в уравнениях течения не учитывались (отбрасывались) инерционные члены. Колебания скорости движения неоднородного слоя,

вызванные продольными вибрациями решета, рассматривали в [2,3], где изменение вибровязкости по толщине слоя подчиняли линейной зависимости. Отличие работы [3] от [2] заключается в том, что в ней дополнительно учтено разделение потока зерна на перфорированной поверхности на потоки проходовой и сходовой фракций. В [4] рассмотрены установившиеся колебания скорости потока в линейно-неоднородном слое, вызванные поперечными вибрациями решета. Для безотрывного движения, *методом Бубнова-Галёркина* построены приближённые решения динамической краевой задачи. Колебания в слое движущейся зерновой смеси с нелинейным изменением вибровязкости по толщине слоя относятся к малоизученным вопросам, что стало мотивом к этой работе.

**Целью работы** является вывод формул для расчёта колебаний скорости потока зерновой смеси на плоском решете, совершающем продольные гармонические колебания, когда изменение эффективной вязкости смеси по толщине слоя нелинейное и аппроксимируется степенной функцией с отрицательным показателем степени.

Частным случаем этой аппроксимации является гиперболический закон увеличения вибровязкости с удалением от свободной поверхности слоя зерна.

**Постановка и аналитическое решение краевой задачи.** Рассматривая установившийся режим колебаний, полагаем проекцию абсолютной скорости  $u$  на координатную ось  $oy$  (см. рис. 1) равной нулю.

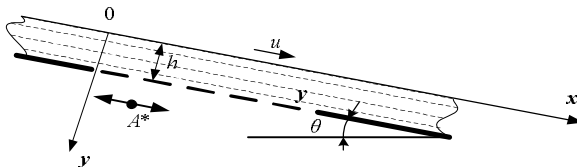


Рисунок 1 – Расчётная схема.

Проекцию абсолютной скорости потока  $u$  на ось  $ox$  считаем независимой от координаты  $x$  и определяем из решения краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( v(y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{\partial u}{\partial t} = -g \sin \theta; \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \Big|_{y=0} = 0; \quad u(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (2)$$

В выражениях (1), (2)  $v(y)$  – эффективная кинематическая вязкость виброоживленной зерновой смеси;  $g$  – ускорение свободного падения;  $\theta$  – угол наклона решета к горизонту;  $h$  – толщина движущегося слоя зерна;  $A^*$ ,  $\omega$  – амплитуда и частота продольных колебаний решета;  $t$  – время.

Далее предполагаем, что изменение  $v(y)$  с достаточной для практики точностью аппроксимируется выражением

$$v(y) = v_0(1 - \beta y)^{-\alpha}, \quad (3)$$

где  $v_0 = v(0)$  – вибровязкость на поверхности слоя;  $\alpha, \beta$  – неотрицательные постоянные, причём  $\beta h < 1$ .

При  $\alpha = 1$  зависимость (3) представляет гиперболический закон возрастания  $v(y)$  с увеличением  $y$ , который рассмотрен в [5] и [6].

Введём вспомогательную переменную

$$\xi = 1 - \beta y$$

и подстановкой (3) в (1) уравнение (1) преобразуем к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{1}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha \frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha. \quad (4)$$

Учитывая линейность (4), его решение ищем в виде суммы

$$u(y, t) = u_1(y) + u_2(y, t), \quad (5)$$

в которой первое слагаемое не зависит от  $t$ .

Выражение (5) будет решением (4), когда

$$\frac{d^2 u_1}{d \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{d u_1}{d \xi} = - \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha; \quad (6)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{\partial u_2}{\partial \xi} - \frac{1}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha \frac{\partial u_2}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

При этом, в силу (2), должны выполняться граничные условия:

$$\left. \frac{d u_1}{d y} \right|_{y=0} = u_1(h, t) = 0; \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial u_2}{\partial y} \right|_{y=0} = 0; u_2(h, t) = A^* \omega \sin(\omega t). \quad (9)$$

Краевая задача, представленная выражениями (6) и (8), имеет решение

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left( \frac{\xi^{\alpha+1} - \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\xi^{\alpha+2} - \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right), \quad (10)$$

где  $\xi_1 = 1 - \beta h > 0$ . Решение (10) находили, понижая (6) до уравнения первого порядка.

Формула (10) имеет неопределённость вида  $\|0/0\|$  при  $\beta \rightarrow 0$ . Раскрывая её, для указанного частного случая, получаем

$$u_1(y) = \frac{g \sin \theta}{2v_0} (h^2 - y^2), \quad (11)$$

что соответствует движению однородного слоя [2].

Формула (10) переходит в (11) также при  $\alpha \rightarrow 0$ .

Решение краевой задачи, представленной выражениями (7) и (9), ищем в виде

$$u_2(y, t) = \operatorname{Re} w(y) \cdot \sin(\omega t) + \operatorname{Im} w(y) \cdot \cos(\omega t), \quad (12)$$

где комплексная функция вещественного аргумента  $w(y)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} - \frac{\alpha}{\xi} \frac{dw}{d\xi} - \frac{i\omega}{v_0 \beta^2} \xi^\alpha w = 0, \quad i = \sqrt{-1} \quad (13)$$

и граничным условиям:

$$\operatorname{Re} w(h) = A^* \omega; \quad \operatorname{Im} w(h) = 0; \quad \operatorname{Re} w'_y(0) = \operatorname{Im} w'_y(0) = 0. \quad (14)$$

Общее решение уравнения (13) выражается через цилиндрические функции:

$$w(y) = (c_1 + ic_2) \eta^s e^{i \frac{s\pi}{2}} I_s \left( \eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) + (c_3 + ic_4) \eta^s e^{-i \frac{s\pi}{2}} K_s \left( \eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right). \quad (15)$$

Здесь  $s = \frac{\alpha + 1}{\alpha + 2}$ ;  $\eta = \lambda \xi^q$ ;  $\lambda = \frac{1}{\beta q} \sqrt{\frac{\omega}{v_0}}$ ;  $q = 1 + \frac{\alpha}{2}$ ;  $I_s(z), K_s(z)$  - модифицированная функция Бесселя и функция Макдональда индексов  $s$ ;  $c_1, c_2, c_3, c_4$  - вещественные произвольные постоянные.

Учитывая, что [7]

$$e^{i \frac{s\pi}{2}} I_s \left( \eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{ber}_s(\eta) + i \operatorname{bei}_s(\eta); \quad (16)$$

$$e^{-i \frac{s\pi}{2}} K_s \left( \eta e^{i \frac{\pi}{4}} \right) = \operatorname{ker}_s(\eta) + i \operatorname{kei}_s(\eta),$$

вещественную и мнимую части решения (15) выражаем с помощью функций

Кельвина:  $ber_s(\eta), bei_s(\eta), ker_s(\eta), kei_s(\eta)$ :

$$\operatorname{Re} w = \eta^s [c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + c_3 ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta)]; \quad (17)$$

$$\operatorname{Im} w = \eta^s [c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + c_3 kei_s(\eta) + c_4 ker_s(\eta)]$$

Продифференцируем выражения (17) по  $\eta$ . Используя (16) и формулы [7]

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} \left[ \eta^s I_s \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] &= e^{i\frac{\pi}{4}} \eta^s I_{s-1} \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right); \\ \frac{d}{d\eta} \left[ \eta^s K_s \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right) \right] &= -e^{i\frac{\pi}{4}} \eta^s K_{s-1} \left( \eta e^{i\frac{\pi}{4}} \right), \end{aligned}$$

получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{Re} w) &= -\frac{\eta^s}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta)] + c_2 [ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta)] + \\ &+ c_3 [ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta)] + c_4 [ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta)]\}; \quad (18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\eta} (\operatorname{Im} w) &= \frac{\eta^s}{\sqrt{2}} \{c_1 [ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta)] - c_2 [ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta)] + \\ &+ c_3 [ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta)] - c_4 [ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta)]\}. \end{aligned}$$

Учитывая (14), (17) и (18), составляем систему алгебраических уравнений для определения постоянных  $c_j, j = \overline{1;4}$ :

$$\begin{aligned} c_1 ber_s(\zeta) - c_2 bei_s(\zeta) + c_3 ker_s(\zeta) - c_4 kei_s(\zeta) &= A^* \omega \zeta^{-s}; \\ c_1 bei_s(\zeta) + c_2 ber_s(\zeta) + c_3 kei_s(\zeta) + c_4 ker_s(\zeta) &= 0; \\ c_1 f_1 + c_2 f_2 + c_3 f_3 + c_4 f_4 &= 0; \\ c_1 f_2 - c_2 f_1 + c_3 f_4 - c_4 f_3 &= 0. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь

$$f_{1,2} = ber_{s-1}(\lambda) \pm bei_{s-1}(\lambda), \quad f_{3,4} = ker_{s-1}(\lambda) \pm kei_{s-1}(\lambda), \quad \zeta = \lambda(1 - \beta h)^q.$$

Решив (19), находим константы:

$$c_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \quad c_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \quad c_3 = \delta_1 c_1 + \delta_2 c_2; \quad c_4 = -\delta_2 c_1 + \delta_1 c_2; \quad (20)$$

$$\Delta = (ber_s(\zeta) + \delta_1 ker_s(\zeta) + \delta_2 kei_s(\zeta))^2 + (bei_s(\zeta) + \delta_1 kei_s(\zeta) - \delta_2 ker_s(\zeta))^2;$$

$$\Delta_1 = A^* \omega \zeta^{-s} (ber_s(\zeta) + \delta_1 ker_s(\zeta) + \delta_2 kei_s(\zeta));$$

$$\Delta_2 = -A^* \omega \zeta^{-s} (bei_s(\zeta) + \delta_1 kei_s(\zeta) - \delta_2 ker_s(\zeta));$$

$$\delta_1 = -\frac{f_1 f_3 + f_2 f_4}{f_3^2 + f_4^2}; \quad \delta_2 = \frac{f_1 f_4 - f_2 f_3}{f_3^2 + f_4^2}.$$

Таким образом, согласно (5), (10), (12), (17), колебания скорости потока виброожиженной смеси описываются выражением

$$u(y, t) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left( \frac{\xi^{\alpha+1} - \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\xi^{\alpha+2} - \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} \right) + \eta^s [c_1 ber_s(\eta) - c_2 bei_s(\eta) + c_3 ker_s(\eta) - c_4 kei_s(\eta)] \sin(\omega t) + \eta^s [c_1 bei_s(\eta) + c_2 ber_s(\eta) + c_3 kei_s(\eta) + c_4 ker_s(\eta)] \cos(\omega t), \quad (21)$$

в котором постоянные  $c_j$  следует вычислять по формулам (20).

Решение (21) существенно упрощается когда  $\alpha = 0$ . При этом значении показателя степени движущийся слой смеси однороден. Индекс у функций Кельвина  $s = 1/2$  и они сводятся к элементарным функциям:

$$\begin{bmatrix} ber_{1/2}(\eta) \\ bei_{1/2}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta}} \left\{ e^{\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 + \frac{\pi}{8}\right) \\ \sin\left(\eta_1 + \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} - e^{-\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 - \frac{\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\eta_1 - \frac{\pi}{8}\right) \end{bmatrix} \right\};$$

$$\begin{bmatrix} ker_{1/2}(\eta) \\ kei_{1/2}(\eta) \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\eta}} e^{-\eta_1} \begin{bmatrix} \cos\left(\eta_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \\ -\sin\left(\eta_1 + \frac{3\pi}{8}\right) \end{bmatrix}, \quad \eta_1 = \frac{\eta}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому колебания скорости потока однородного слоя в работе [8] описаны с помощью гиперболических и тригонометрических функций.

Интегрируя (21), по формуле

$$\bar{Q}(t) = \int_0^h u(y, t) dy = \frac{1}{\beta q \lambda^{1/q}} \int_{\zeta}^{\lambda} \eta^{1-2s} u(\eta, t) d\eta \quad (22)$$

определяем удельную производительность решета.

Поскольку [7]

$$\int \eta^{1-s} \begin{bmatrix} ber_s(\eta) \\ bei_s(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \frac{\eta^{1-s}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ber_{s-1}(\eta) - bei_{s-1}(\eta) \\ ber_{s-1}(\eta) + bei_{s-1}(\eta) \end{bmatrix};$$

$$\int \eta^{1-s} \begin{bmatrix} ker_s(\eta) \\ kei_s(\eta) \end{bmatrix} d\eta = \frac{\eta^{1-s}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} ker_{s-1}(\eta) - kei_{s-1}(\eta) \\ ker_{s-1}(\eta) + kei_{s-1}(\eta) \end{bmatrix},$$

то подстановка (21) в (22) позволяет описать колебания удельной производительности решета выражением

$$\bar{Q}(t) = \frac{g \sin \theta}{v_0 \beta^2} \left[ \frac{1 - \xi_1^{\alpha+2}}{(\alpha+1)(\alpha+2)\beta} - \frac{1 - \xi_1^{\alpha+3}}{(\alpha+2)(\alpha+3)\beta} + \frac{h \xi_1^{\alpha+2}}{\alpha+2} - \frac{h \xi_1^{\alpha+1}}{\alpha+1} \right] + \frac{1}{\sqrt{2\beta q \lambda^{1/q}}} \left[ (c_1 s_1 - c_2 s_2 + c_3 s_3 - c_4 s_4) \sin(\omega t) + (c_1 s_2 + c_2 s_1 + c_3 s_4 + c_4 s_3) \cos(\omega t) \right]$$

В нём

$$s_{1,2} = \lambda^{1-s} [ber_{s-1}(\lambda) \mp bei_{s-1}(\lambda)] - \zeta^{1-s} [ber_{s-1}(\zeta) \mp bei_{s-1}(\zeta)];$$

$$s_{3,4} = \lambda^{1-s} [ker_{s-1}(\lambda) \mp kei_{s-1}(\lambda)] - \zeta^{1-s} [ker_{s-1}(\zeta) \mp kei_{s-1}(\zeta)]$$

С целью апробации полученных решений краевой задачи проведены вычисления изменений скорости потока смеси при следующих исходных данных:  $\rho = 750 \text{ кг/м}^3$ ;  $h = 0,006 \text{ м}$ ,  $v_0 = 0,00005 \text{ м}^2/\text{с}^{-1}$ ;  $\alpha = 1$ ;  $\beta = 0,1 \text{ м}^{-1}$  которые соответствуют зерновой смеси пшеницы [2]. Колебания решета характеризовали параметрами:  $\theta = 5^0$ ;  $A^* = 0,0075 \text{ м}$ ;  $\omega = 52,33 \text{ с}^{-1}$ .

Вычисленные по формуле (21) изменения скорости по толщине слоя и по времени показаны графически на рис. 2-5.

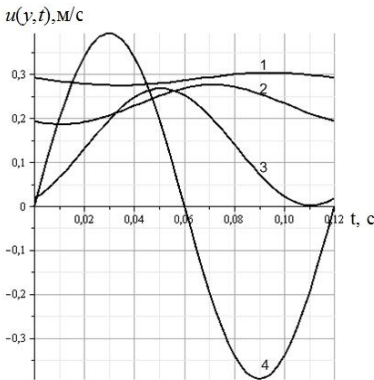


Рисунок 2 – Колебания скорости при разных  $y$ : 1,2,3,4 -  $y/h = 0,25; 0,5; 0,75; 1$

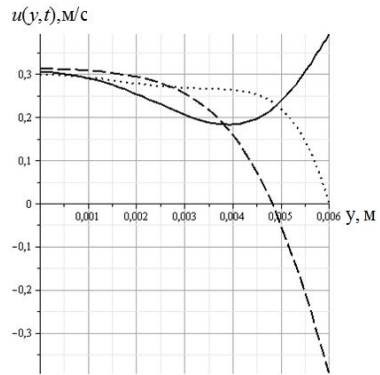


Рисунок 3 – Профили скорости в различные моменты времени: —  $t = \frac{\pi}{\omega}$ ; .....  $t = \frac{3\pi}{\omega}$ ; ---  $t = \frac{5\pi}{\omega}$

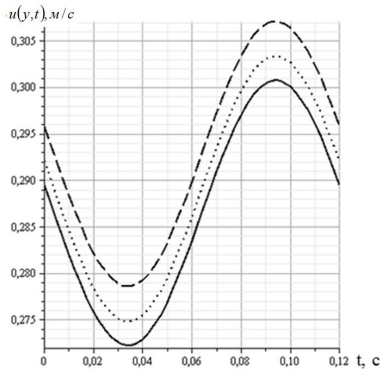


Рисунок 4 – Колебания скорости при различных значениях  $\alpha$ : —  $\alpha = 0,1$ ;  $\cdots$   $\alpha = 0,4$ ; ---  $\alpha = 0,7$  и  $\beta = 0,01 \text{ м}^{-1}$ ;  $y h^{-1} = 0,25$

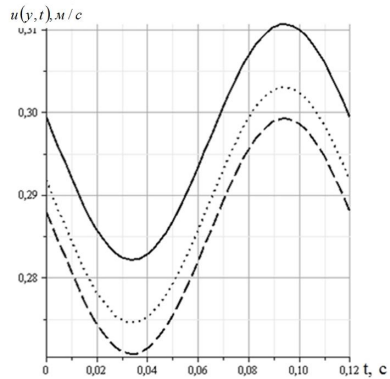


Рисунок 5 – Колебания скорости при различных значениях  $\beta$ : —  $\beta = 0,005 \text{ м}^{-1}$ ;  $\cdots$   $\beta = 0,075 \text{ м}^{-1}$ ; ---  $\beta = 0,01 \text{ м}^{-1}$  и  $\alpha = 1$ ;  $y h^{-1} = 0,25$

**Выводы.** Расчёты подтверждают быстрое затухание вибрационного поля с удалением от поверхности виброрешета в сторону свободной поверхности слоя. Это затухание усиливается неоднородностью вибровязкости зернового слоя по его толщине, поскольку у свободной поверхности она меньше, чем у поверхности решета.

**Список литературы:** 1. *Ольшанский В.П., Кучеренко С.И., Бурлака В.В.* К расчёту движения зерновой смеси по плоскому вибрирующему решету // Технічний сервіс АПК, техніка та технології у сільськогосподарському машинобудуванні: Вісник ХНТУСГ. – Харків: ХНТУСГ, 2009. – Вип. 77. – С. 238-244. 2. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Гидродинамика сепарирования зерна. – Харьков: “Міськдрук”, 2010. – 174 с. 3. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* О колебаниях скорости неоднородного слоя зерновой смеси на плоском виброрешете // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10. Т.7. – С. 32-42. 4. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В., Дидур В.А.* Колебания скорости неоднородного слоя зерновой смеси, вызванные поперечными вибрациями решета // Праці Таврійського державного агротехнологічного університету. – Мелітополь: ТДАТУ, 2010. – Вип. 10. Т.7. – С. 173-180. 5. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчёту колебаний неоднородного слоя зерновой смеси на виброрешете // Вібрації в техніці та технологіях. 2011. – №1 (61) – С.182-185. 6. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Виброрешётная сепарация зерновых смесей. – Харьков: “Міськдрук”, 2011. – 280с. 7. *Абрамовиц А., Стиган И.* Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами) – М.: Наука, 1979. – 832 с. 8. *Тищенко Л.Н., Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* К расчёту движения зерновой смеси на вибрирующем плоском наклонном решете // Вібрації в техніці та технологіях. 2009. – № 1(53). – С. 109-113. 9. *Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.* Колебания скорости потока сепарируемой зерновой смеси на цилиндрическом виброрешете // Динамика и прочность машин. Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ, 2010. – Вип. 69. – С. 100-108.

Поступила в редколлегию 01.09.2011