

Список літератури: 1. Литвин О.М. Інтерлінація функцій та деякі її застосування. -Харків.: Основа, 2002. -544 с. 2. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Оптимальний за порядком точності метод обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є за допомогою інтерлінації. Праці науково-технічної конференції з міжнародною участю «Комп'ютерне моделювання в наукоємних технологіях», 18-21 трав., 2010р., Харків, Ч.1. – 2010. – С. 211–213. 3. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Про одну кубатурну формулу для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Доповіді НАН України. - 2010. № 3, - С. 24-29. 4. Литвин О.М., Нечуйвітер О.П. Кубатурна формула для обчислення 2 D коефіцієнтів Фур'є з використанням інтерлінації функцій // Вісник ХНУ. Серія «Математичне моделювання. Інформаційні технології. Автоматизовані системи управління». - 2010. № 926, - С.153-160. 5. Литвин О. М., Нечуйвітер О.П. Оптимальні за порядком точності кубатурні формули обчислення коефіцієнтів Фур'є функцій двох змінних з використанням сплайн-інтерлінації функцій. – Харків: ХНУРЕ, 2009. – 136 с.

Надійшла до редколегії 15.12.2011

УДК 519.6

О.М. ЛИТВИН, д-р фіз.-мат. наук, проф., УПА, Харків;
Ю.І. ПЕРШИНА, канд. фіз.-мат. наук, докторант, УПА, Харків

ПОБУДОВА РОЗРИВНИХ ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИХ, АПРОКСИМАЦІЙНИХ ТА ІНТЕРЛІНАЦІЙНИХ СПЛАЙНІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ТРАПЕЦЕВИДНИХ ЕЛЕМЕНТІВ

Побудовані розривні апроксимаційні, інтерполяційні та інтерлінаційні сплайни для наближення розривної функції двох змінних з областю визначення, яку можна розбити на прямокутні трапеції. Побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни. Запропоновані методи наближення можна використати для математичного моделювання розривних процесів в медичних, геологічних, космічних та інших дослідженнях.

Построены разрывные аппроксимационные, интерполяционные и интерлиначионные сплайны для приближения разрывной функции двух переменных с областью определения, которую можно разбить на прямоугольные трапеции. Построенные разрывные сплайны включают в себя, как частный случай, классические непрерывные сплайны. Предложенные методы приближения можно использовать для математического моделирования разрывных процессов в медицинских, геологических, космических и других исследованиях.

Are constructed discontinuous approximation, interpolation and interlination splints for approach of discontinuous function of two variables with definition range which can be divided into rectangular trapezes. Constructed discontinuous splints include, as a special case, classical continuous splints. Offered methods approximations can be used for mathematical modeling of discontinuous processes in medical, geological, space and other researches

Вступ. Весь розвиток обчислювальної та прикладної математики говорить про те, що використання кожної додаткової інформації про досліджуваний об'єкт може привести до більш точного і якісного відновлення цього об'єкту.

Задача наближення неперервних функцій неперервними сплайнами з достатньою повнотою описана в багатьох роботах вітчизняних та зарубіжних дослідників (див., наприклад, [1-4]). Задачі наближення розривних функцій виникають частіше, ніж задачі наближення неперервних функцій. Дивись, так в методах комп'ютерної томографії на даний час ніде не використовується інформація про внутрішню структуру тіла людини (шлунок має одну форму і відповідну щільність його тканин, печінка має іншу форму та іншу щільність його тканин, підшлункова залоза має свою форму та щільність тканин, хребет має свою щільність тощо); при дослідженні кори Землі за допомогою даних з кернів свердловинного буріння виникає задача відновлення внутрішньої структури кори між свердловинами. При цьому очевидним є той факт, що щільність ґрунту в різних точках кори є неоднорідною і найчастіше має розриви першого роду в точках поверхонь, які відділяють одну складову кори від іншої (чорнозем, пісок, глина, граніт тощо).

Тобто актуальною є розробка та дослідження теорії наближення розривних функцій за допомогою розривних функцій.

Аналіз останніх досліджень. На практиці використання кусково-аналітичних наближень, заданих різними формулами (поліномами відповідного степеня) в точках кожного елемента розбиття області наближення приводить інколи до знаходження великої кількості невідомих параметрів. Це привело до появи неконформних елементів в методі скінченних елементів [4]. Аналогічна задача досліджувалась в працях Попова Б.А. [5] та інших авторів, де розглядалися наближення неперервних та неперервно-диференційованих функцій за допомогою розривних сплайнів в *чебишовській нормі* (рівномірне наближення).

Таким чином, у вказаних роботах досліджувалося наближення неперервних функцій за допомогою неперервних та розривних сплайнів. Але загальної теорії таких наближень не існує. В даній роботі ми пропонуємо таку загальну теорію побудови розривних сплайнів, множина яких, як частинний випадок, включає множину неперервних сплайнів, що можуть мати розриви першого роду в заданих точках або на заданій множині ліній – межах елементів.

В роботі [6] був запропонований метод наближення розривних функцій двох змінних розривними інтерполяційними білінійними сплайнами, а в роботі [7] – інтерлінаційними розривними сплайнами на ректангульованій області визначення. Були також побудовані розривні інтерлінаційні сплайни для наближення функцій двох змінних, область визначення яких розбивається на прямокутні трикутники [8].

В даній роботі вперше будуються та досліджуються інтерполяційні, апроксимаційні та інтерлінаційні розривні сплайни для наближення розривних функцій з областю визначення, що розбивається на трапецевидні елементи.

Постановка задачі. Нехай задана розривна функція двох змінних $f(x, y)$ в області $D = [0, 1]^2$. Будемо вважати, що область D розбивається

прямими $x = x_k, y = y_l, k = \overline{1, n}, l = \overline{1, m}$, де $x_0 = 0 < x_1 < x_2 < \dots < x_m = 1$, $y_0 = 0 < y_1 < y_2 < \dots < y_n = 1$ на прямокутні елементи, а кожний прямокутник розбивається похилою лінією на прямокутну трапецію та прямокутний трикутник. Трапеції та трикутники не вкладаються один в один, а їх сторони не перетинаються. Функція $f(x, y)$ має розриви першого роду на межах між цими трапеціями та трикутниками (не обов'язково між всіма).

Метою роботи є побудова та дослідження розривного лінійного сплайн-інтерполянта, апроксиманта та інтерлінанта для наближення розривної функції з використанням трапецевидних елементів.

Побудова оператора розривної інтерполяції. Розглянемо чотири типи прямокутних трапецій з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j)

$$\begin{aligned} \text{TP}_{ij}^{(1)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, y_j < y < g_{j+1}^{(1)}(x)\}; & \text{TP}_{ij}^{(2)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, y_j < y < g_{j+1}^{(2)}(x)\}; \\ \text{TP}_{ij}^{(3)} &= \{x_{i-1} < x < x_i, g_{j-1}^{(3)}(x) < y < y_j\}; & \text{TP}_{ij}^{(4)} &= \{x_i < x < x_{i+1}, g_{j-1}^{(4)}(x) < y < y_j\}. \end{aligned}$$

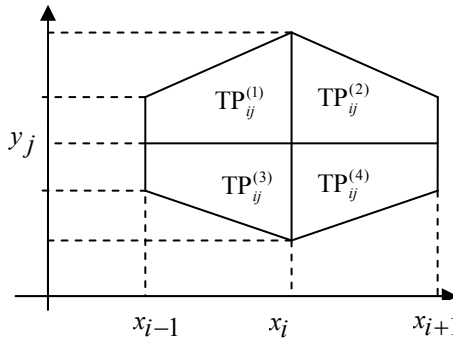


Рисунок 1 – Зображення можливих трапецевидних елементів з прямим кутом у вузлі (x_i, y_j) .

Вважаємо, що на кожній із сторін заданих трапецій функція $f(x, y)$ може мати (а може і не мати) розриви першого роду, причому у вузлах заданої сітки функція набуває наступних значень

$$\begin{aligned} C_1^{(1)} &= f(x_i + 0, y_j + 0), & C_1^{(2)} &= f(x_i - 0, y_j + 0), \\ C_2^{(1)} &= f(x_{i+1} - 0, y_j + 0), & C_2^{(2)} &= f(x_{i-1} + 0, y_j + 0), \\ C_3^{(1)} &= f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & C_3^{(2)} &= f(x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), \\ C_4^{(1)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & C_4^{(2)} &= f(x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1^{(3)} &= f(x_i - 0, y_j - 0), & C_1^{(4)} &= f(x_i + 0, y_j - 0), \\
C_2^{(3)} &= f(x_{i-1} + 0, y_j - 0), & C_2^{(4)} &= f(x_{i+1} - 0, y_j - 0), \\
C_3^{(3)} &= f(x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & C_3^{(4)} &= f(x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), \\
C_4^{(3)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i+1} - 0)), & C_4^{(4)} &= f(x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0).
\end{aligned}$$

Визначення. Будемо називати *розривним інтерполяційним лінійним поліноміальним сплайном* в області $\text{TP}_{ij}^{(k)} \subset D$, $k = \overline{1, 4}$ наступну функцію:

$$\begin{aligned}
S(x, y) = s_{ij}^{(k)}(x, y) = & C_1^{(k)} \frac{\omega 4_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 4_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)}) \omega 3_{ij}^{(k)}(A_1^{(k)})} + C_2^{(1)} \frac{\omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 3_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 2_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)}) \omega 3_{ij}^{(k)}(A_2^{(k)})} + \\
& + C_3^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 4_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)}) \omega 4_{ij}^{(k)}(A_3^{(k)})} + C_4^{(1)} \frac{\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y)}{\omega 1_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)}) \omega 2_{ij}^{(k)}(A_4^{(k)})}, \quad (1)
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
\omega 1_{ij}^{(k)}(x, y) &= y - y_j, & \omega 2_{ij}^{(k)}(x, y) &= x - x_i, \\
\omega 3_{ij}^{(k)}(x, y) &= y - g^{(k)}(x), & \omega 4_{ij}^{(k)}(x, y) &= x - x_{i+1},
\end{aligned}$$

$$A_1^{(k)} = (x_i, y_j), \quad A_2^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, y_j + 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} - 0, y_j + 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} - 0, y_j - 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, y_j - 0), & k = 4, \end{cases}$$

$$A_3^{(k)} = \begin{cases} (x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0), & k = 1, \\ (x_i - 0, g_{j+1}^{(2)}(x_i) - 0), & k = 2, \\ (x_i - 0, g_{j-1}^{(3)}(x_i) + 0), & k = 3, \\ (x_i + 0, g_{j-1}^{(4)}(x_i) + 0), & k = 4, \end{cases} \quad A_4^{(k)} = \begin{cases} (x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0), & k = 1, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j+1}^{(2)}(x_{i-1}) - 0), & k = 2, \\ (x_{i-1} + 0, g_{j-1}^{(3)}(x_{i-1}) + 0), & k = 3, \\ (x_{i+1} - 0, g_{j-1}^{(4)}(x_{i+1}) + 0), & k = 4. \end{cases}$$

Теорема 1. Якщо $f(x, y)$ має розриви першого роду у деяких точках (x_i, y_j) та $f(x, y) \in C^{(r, r)}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, $r = 1, 2$, то залишок наближення функції $f(x, y)$ сплайном вигляду (1) на кожній трапеції буде мати вигляд

$$\begin{aligned}
RS(x, y) = & R_1 R_2 f(x, y) + \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} R_1 f(x_i, y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} R_1 f(x_{i+1}, y) + \\
& + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} R_2 f(x, y_j) + \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} R_2 f(x, g_{j+1}^{(1)}(x)),
\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}
 R_1 f(x, y) &= \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} f^{(0,r)}(x, \eta) G1(x, y, \eta) d\eta, \quad x \in [x_i, x_{i+1}], \\
 R_2 f(x, y) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} f^{(r,0)}(\xi, y) G2(x, \xi) d\xi, \quad y \in [y_j, g_{j+1}^{(1)}(x)], \\
 G1(x, y, \eta) &= \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \frac{(y_j - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq \xi \leq y \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \\ \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{r-1}}{(r-1)!}, & y_j \leq y \leq \xi \leq g_{j+1}^{(1)}(x), \end{cases} \\
 G2(x, \xi) &= \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{(x_i - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq \xi \leq x \leq x_{i+1}, \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{(x_{i+1} - \xi)^{r-1}}{(r-1)!}, & x_i \leq x \leq \xi \leq x_{i+1}. \end{cases}
 \end{aligned}$$

Теорема 2. Оцінка похибки наближення функції $f(x, y)$ побудованим розривним інтерполяційним сплайном $S(x, y) = S_{ij}(x, y)$ на кожній трапеції має вигляд

$$\begin{aligned}
 &|f(x, y) - S(x, y)| \leq Q; \\
 Q &= \|f(x, y)\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{64} \times \\
 &\times \max \left\{ \left(y_j - y_{j+1}(x_i) \right)^2, \left(y_j - y_{j+1}(x_{i+1}) \right)^2 \right\} + \\
 &+ \max \left\{ \|f^{(0,2)}(x_i, y)\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_i) - y_j)^2}{8}, \right. \\
 &\left. \|f^{(0,2)}(x_{i+1}, y)\|_{L_\infty[y_j, y_{j+1}(x)]} \cdot \frac{(y_{j+1}(x_{i+1}) - y_j)^2}{8} \right\} + \\
 &+ \max \left\{ \|f^{(2,0)}(x, y_j)\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8}, \right. \\
 &\left. \|f^{(2,0)}(x, y_{j+1}(x))\|_{L_\infty[x_i, x_{i+1}]} \cdot \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{8} \right\}. \tag{2}
 \end{aligned}$$

Побудова оператора розривної апроксимації. Якщо значення функції у вузлах трапецевидної сітки невідомі, то для знаходження невідомих коефіцієнтів $C_p^{(k)}$, $p = \overline{1,3}$, $k = \overline{1,4}$, в даній роботі пропонується використовувати метод найменших квадратів, згідно з яким всі невідомі знаходяться з умови

$$J^{(k)}(C) = \sum_{\text{TP}_{ij}^{(k)} \subset D} \iint_{\text{TP}_{ij}^{(k)}} [f(x, y) - s_{ij}^{(k)}(x, y, C)]^2 dx dy \rightarrow \min_C. \quad (3)$$

І тоді отримаємо апроксимаційний розривний лінійний сплайн.

Теорема 3. Для оператора наближення розривної функції $f(x, y) \in C^{(2,2)}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$ розривним апроксимаційним сплайном $S(x, y)$ вигляду (1), побудованого за допомогою методу найменших квадратів, на кожному елементі розбиття $\text{TP}_{ij}^{(1)}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, справедлива наступна оцінка:

$$\|Sp(x, y)\|_{\infty} \leq \max\{|f(x_i, y_j)|, |f(x_{i+1}, y_j)|, |f(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i))|, |f(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}))|\} + Q,$$

де Q визначається формулою (2).

Наслідок. Якщо наближувана функція $f(x, y)$ є кусково-лінійною або кусково-сталою функцією в кожному трапецевидному елементі розбиття з точками розриву (x_i, y_j) , $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$ у випадку наближення її кусково-лінійним сплайном $S(x, y)$, визначеним формулами (1) з невідомими $C_m^{(k)}$, $m = \overline{1, 4}$, $k = \overline{1, 8}$, що знаходяться з умови (3), то отримаємо точно наближувану функцію, тобто $S(x, y) = f(x, y)$, де $f(x, y) = A(\text{const})$ або $f(x, y) = A_0 + A_1x + A_2y + A_3xy$.

Зауваження. Якщо $C_1^{(1)} = C_1^{(2)} = C_1^{(3)} = C_1^{(4)} = S(x_i, y_j)$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, або $C_1^{(5)} = C_1^{(6)} = C_1^{(7)} = C_1^{(8)} = S(x_i, y_j)$ то побудований розривний апроксимаційний сплайн вигляду (1) є неперервним лінійним апроксимаційним сплайном.

Побудова оператора розривної інтерлінації. Розроблені методи в подальшому будуть використовуватися для розв'язання плоскої задачі радонівської комп'ютерної томографії. Для цього доцільніше використовувати оператори інтерлінації функцій, оскільки ці оператори відновлюють функції (можливо, наближено) за відомими їх слідами на даній системі ліній. Тобто, вони надають можливість будувати оператори, інтеграли від яких по вказаних лініях (лінійні інтеграли) будуть дорівнювати інтегралам від самої відновлюваної функції. Звідси витікає, що інтерлінація є математичним апаратом, природно пов'язаним із задачею відновлення характеристик об'єктів за відомими їх проекціями.

Розглянемо трапецію типу $\text{TP}_{ij}^{(1)}$.

Вважаємо заданими наступні величини.

1. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_i$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i + 0} f(x, y) = f(x_i + 0, y), \quad \varphi m_i(y) = \lim_{x \rightarrow x_i - 0} f(x, y) = f(x_i - 0, y);$$

$$\varphi p p_{ij} = \varphi p_i(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\varphi p m_{ij+1} = \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0).$$

2. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $x = x_{i+1}$ (справа та зліва прямої відповідно):

$$\varphi p_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} + 0} f(x, y) = f(x_{i+1} + 0, y), \quad \varphi m_{i+1}(y) = \lim_{x \rightarrow x_{i+1} - 0} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y)$$

;

$$\varphi m p_{i+1,j} = \varphi p_{i+1}(y_j) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0),$$

$$\varphi m m_{i+1,j+1} = \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

3. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = y_j$ (над та під прямою відповідно):

$$\psi p_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j + 0} f(x, y) = f(x, y_j + 0), \quad \psi m_j(x) = \lim_{y \rightarrow y_j - 0} f(x, y) = f(x, y_j - 0),$$

$$\psi p p_{ij} = \psi p_j(x_i) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_i + 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_i + 0, y_j + 0),$$

$$\psi m p_{i+1,j} = \psi m_j(x_{i+1}) = \lim_{\substack{x \rightarrow x_{i+1} - 0 \\ y \rightarrow y_j + 0}} f(x, y) = f(x_{i+1} - 0, y_j + 0).$$

4. Сліди функції $f(x, y)$ на прямій $y = g_{j+1}^{(1)}(x)$ (під та над прямою відповідно):

$$\psi m_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) - 0), \quad \psi p_{j+1}(x) = f(x, g_{j+1}^{(1)}(x) + 0),$$

$$\psi p m_{i,j+1} = \psi m_{j+1}(x_i) = f(x_i + 0, g_{j+1}^{(1)}(x_i) - 0),$$

$$\psi m m_{i+1,j+1} = \psi m_{j+1}(x_{i+1}) = f(x_{i+1} - 0, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1}) - 0).$$

Визначення. Будемо називати *розривним інтерлінаційним поліноміальним сплайном в трапецевидному елементі* $TP_{ij}^{(1)}$ наступну функцію:

$$Lf(x, y) = (L_1 + L_2 - L_2 L_1) f(x, y), \quad (4)$$

де

$$L_1 f(x, y) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \varphi p_i(y) + \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \varphi m_{i+1}(y),$$

$$L_2 f(x, y) = \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \psi m_{j+1}(x) + \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \psi p_j(x).$$

Теорема 4. Якщо сліди функції $f(x, y)$ задовольняють співвідношенням:

$$\begin{aligned} \psi p_j(x_i) &= \varphi p_i(y_j), \quad \psi p_j(x_{i+1}) = \varphi m_{i+1}(y_j), \\ \varphi p_i(g_{j+1}^{(1)}(x_i)) &= \psi m_{j+1}(x_i), \quad \varphi m_{i+1}(g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) = \psi m_{j+1}(x_{i+1}), \end{aligned}$$

то оператор (5) інтерлінує $f(x, y)$ на $\partial \text{TP}_{ij}^{(1)} : Lf(x, y)|_{\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}} = f(x, y)|_{\partial \text{TP}_{ij}^{(1)}}$, тобто

$$\begin{aligned} Lf(x_i, y) &= \varphi p_i(x), \\ Lf(x_{i+1}, y) &= \varphi p_{i+1}(x), \\ Lf(x, y_j) &= \psi p_j(x), \\ Lf(x, g_{j+1}^{(1)}(x)) &= \psi m_{j+1}(x). \end{aligned}$$

Зауваження. Перестановність операторів відсутня, тобто $L_1 L_2 \neq L_2 L_1$.

Теорема 5. Нехай виконуються умови теореми 4, тоді для залишкового члена $Rf(x, y) = (I - L)f(x, y)$ виконується рівність

$$Rf(x, y) = \sum_{k=1}^2 \sum_{m=1}^2 P_{1,k}(x) P_{2,m}(x, y) \int_{x_k}^x \int_{y_m(x)}^y f^{(p,q)}(\xi, \eta) \frac{(x_k - \xi)^{p-1} (y_\ell - \eta)^{q-1}}{(p-1)!(q-1)!} d\xi d\eta$$

$1 \leq p, q \leq 2$, $y_1(x) = y_j$, $y_2(x) = g_{j+1}^{(1)}(x)$, а поліноми $P_{1,k}(x), P_{2,m}(x, y)$ мають вигляд:

$$\begin{aligned} P_{1,1}(x) &= \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & P_{1,2}(x) &= \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i}, \\ P_{2,1}(x) &= \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}, & P_{2,2}(x) &= \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)}. \end{aligned}$$

Оцінимо похибку наближення розривної функції $f(x, y)$ побудованим розривним інтерлінантом $Lf(x, y)$, визначеним формулою (4) в трапецевидному елементі $\text{TP}_{ij}^{(1)}$.

Теорема 6. Нехай $f(x, y) \in C^{p,q}(\text{TP}_{ij}^{(1)})$, $p = \overline{1,2}$, $q = \overline{1,2}$, тоді для залишкового члена $Rf(x, y)$ має місце оцінка

$$\|Rf(x, y)\|_{C(\text{TP}_{ij}^{(1)})} \leq M \cdot \int_{x_i}^{x_{i+1}} \int_{y_j}^{g_{j+1}^{(1)}(x)} |G_1(x, \xi) \cdot G_2(x, y, \eta)| d\xi d\eta.$$

де

$$M = \max_{(x,y) \in \text{TP}_{ij}^{(1)}} |f^{(p,q)}(x,y)|,$$

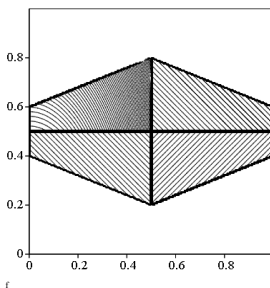
$$G_1(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdot \frac{(x_i - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x_i \leq \xi < x, \\ \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \cdot \frac{(x_{i+1} - \xi)^{p-1}}{(p-1)!}, & x \leq \xi \leq x_{i+1}, \end{cases}$$

$$G_2(x, y, \eta) = \begin{cases} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} \cdot \frac{(y_j - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y_j \leq \eta < y, \\ \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} \cdot \frac{(g_{j+1}^{(1)}(x) - \eta)^{q-1}}{(q-1)!}, & y \leq \eta < g_{j+1}^{(1)}(x). \end{cases}$$

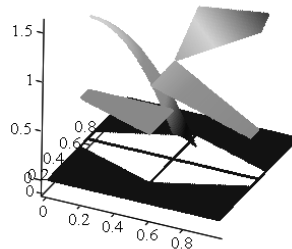
Зауваження. Якщо односторонні сліди функції на відповідних лініях, що утворюють границі трапецевидних елементів, збігаються, то розривна функція перетворюється в неперервну.

Чисельний експеримент. Приклад 1. Нехай задана функція на одиничному квадраті $[0,1] \times [0,1]$ (дивись рис. 2)

$$f(x,y) = \begin{cases} x+y, & 0.5 < x < 1, 0.5 < y < -0.4x+1, \\ 1.5-4x^2-y^2, & 0 < x < 0.5, 0.5 < y < 0.4x+0.6, \\ 0.5, & 0 < x < 0.5, 0.4-0.4x < y < 0.5 \\ -x+1.5, & 0.5 < x < 1, 0.4x < y < 0.5. \end{cases}$$



а)



б)

Рисунок 2 – Графічне зображення: а) області визначення функції $f(x,y)$; б) функції $f(x,y)$.

Тобто на лініях фігури, зображеної на рисунку 2 а), функція $f(x,y)$ має розриви першого роду. Нехай задані лінії: $x_1 = 0, x_2 = 0.5, x_3 = 1$,

$$y_1 = -\frac{2}{5}x + 1, \quad y_2 = \frac{2}{5}x + \frac{3}{5}, \quad y_3 = \frac{2}{5} - \frac{2}{5}x, \quad y_4 = \frac{2}{5}x.$$

Вони розбивають область визначення функції $f(x, y)$ на вісім трапецевидних елементів (один з кутів обов'язково є прямокутним).

Спочатку побудуємо розривний інтерполяційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $TR_{ij}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x, y) = f(x_i, y_j) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + f(x_{i+1}, y_j) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$

$$+ f(x_i, g_{j+1}^{(1)}(x_i)) \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + f(x_{i+1}, g_{j+1}^{(1)}(x_{i+1})) \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}.$$

Отримаємо інтерполяційний сплайн, графічний вигляд якого наведений на рис.3.

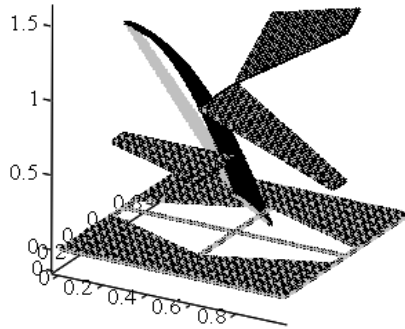


Рисунок 3 – Графічний вигляд розривного інтерполяційного сплайну (світлий колір), та заданої функції (темний колір).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.3.$$

Приклад 2. Тепер побудуємо розривний апроксимаційний сплайн на заданій сітці, який, наприклад, для трапеції $TR_{ij}^{(1)}$ задається формулою

$$S(x, y) = C_1^{(1)} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} + C_2^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - g_{j+1}^{(1)}(x)}{y_j - g_{j+1}^{(1)}(x)} +$$

$$+ C_3^{(1)} \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j} + C_4^{(1)} \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \frac{y - y_j}{g_{j+1}^{(1)}(x) - y_j}.$$

Після знаходження коефіцієнтів цього сплайну з умови (3), отримаємо

сплайн, наведений на рисунку 4.

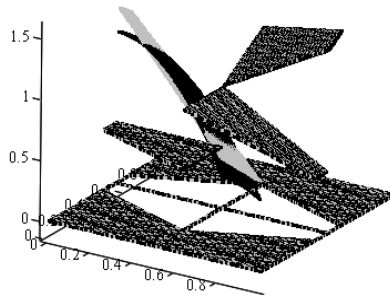


Рисунок 4 – Графічний вигляд розривного апроксимаційного сплайну (світлий колір), та заданої функції (темний колір).

Як на рис.3, так і на рис. 4 бачимо, що задана функція наближується точно там, де вона задана константою або лінійною функцією (графіки функції $f(x, y)$ та наближуючи сплайнів співпадають).

Далі визначимо максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| \approx 0.08 .$$

Приклад 3. Тепер побудуємо розривний інтерлінаційний сплайн вигляду (4) на заданій сітці (рис.5).

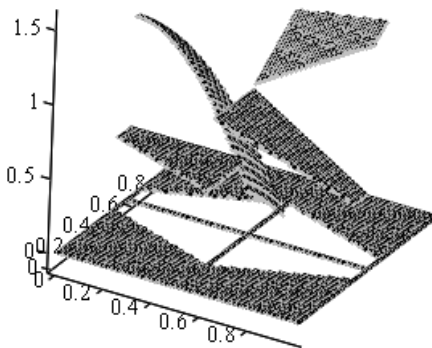


Рисунок 5 – Графічний вигляд розривного інтерлінаційного сплайну (світлий колір), та заданої функції (темний колір).

Максимальне відхилення наближуваної функції $f(x, y)$ від побудованого сплайну $S(x, y)$:

$$\max |f(x, y) - S(x, y)| = 0.$$

Порівняння результатів. Як бачимо, побудований розривний інтерлінаційний сплайн наближує розривну функцію краще, ніж інтерполяційний та апроксимаційний. Побудовані розривні інтерполяційні та апроксимаційні сплайни точно наближують ту частину функції, де вона є постійною або лінійною, що і підтверджує викладену вище теорію.

Перспективи подальших досліджень. Автори вважають перспективним розвиток теорії наближення розривних функцій багатьох змінних розривними сплайнами та побудову математичних моделей розривних процесів на основі розробленої теорії, оскільки, як вже було зазначено, задачі дослідження процесів, що мають розриви, виникають значно частіше, ніж задачі дослідження неперервних процесів.

В подальшому авторами планується розробити теорію наближення розривних функцій розривними функціями у випадку, коли невідомі вузли, в яких знаходиться розрив, та застосувати цю теорію до розв'язання двовимірної задачі комп'ютерної томографії.

Висновки. Таким чином, в роботі запропонована математична модель розривного процесу, що описується функцією однієї змінної, побудована за допомогою розривного інтерполяційного сплайну. Визначений загальний вигляд похибки наближення функції побудованою розривною конструкцією в інтегральному вигляді, та наведені оцінки похибки наближення в кожному інтервалі розбиття. В роботі також запропонована математична модель розривного процесу, що побудована за допомогою розривного апроксимаційного сплайну, коефіцієнти якого знаходяться методом найменших квадратів. Причому побудовані розривні сплайни включають в себе, як частинний випадок, класичні неперервні сплайни першого степеня.

Список літератури: 1. Корнейчук Н.П. Сплайны в теории приближения. – Москва: Наука, 1984. – 352 с.; 2. Варга Р. Функциональный анализ и теория аппроксимации в численном анализе. Перевод с английского Ю. А. Кузнецова. - Изд-во "Мир", Москва. 1974. - 124с.; 3. Завьялов Ю.С., Квасов Б.И., Мирошниченко В.Л. Методы сплайн-функций. М.: Наука. 1976; 4. Ф.Сьярле. Метод конечных элементов для эллиптических задач. Перевод с английского Б.И. Квасова. - Изд-во "Мир", Москва. 1980. - 512с.; 5. Попов Б. А. Равномерное приближение сплайнами. – Киев.: Наукова думка, 1989.– 272с.; 6. О.М. Литвин, Ю.І. Першина. Побудова кусково-білінійних сплайнів для наближення функцій з розривами першого роду у вузлах ректангуляції двовимірної області // Таврійчий вісник інформатики та математики. – Симферополь. – 2011. – №1. – С. 63 – 72.; 7. О.Н. Литвин, Ю.І. Першина. Приближение разрывной функции двух переменных с помощью разрывных сплайнов двух переменных (прямоугольные элементы) – Компьютерная математика. – Киев, 2011. – №1. –С.96 – 105.; 8. О.М. Литвин, Ю.І. Першина. Приближение разрывных функций двух переменных с разрывами первого рода на линиях триангуляции двумерной области // Управляющие системы и машины.– Киев, 2011, №5. – С.34–47.

Надійшла до редколегії 15.12.11