

А.Л. ГРИГОРЬЕВ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»

Ю.Л. ГЕВОРКЯН, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

ЛИНЕЙНЫЕ И ЛИНЕАРИЗОВАННЫЕ МАТРИЧНЫЕ МОДЕЛИ ДЛЯ АНАЛИЗА ДИНАМИКИ И УСТОЙЧИВОСТИ КЛАПАННЫХ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Наведені матричні моделі для опису динаміки гідромеханічних систем з зосередженими параметрами. Виконаний якісний аналіз методів інтегрування цих рівнянь при застосуванні відомих різницевих схем.

Представлены матричные модели для описания динамики гидромеханических систем с сосредоточенными параметрами. Выполнен качественный анализ методов интегрирования этих уравнений при использовании известных разностных схем.

Represented by the matrix model to describe the dynamics of hydro-mechanical systems with concentrated parameters. Performed a qualitative analysis of the methods of integrating these equations using the known difference schemes.

Введение и постановка задачи. В этой статье будет приведено несколько примеров успешного использования матриц для динамического анализа так называемых *гидромеханических узлов*. В соответствии с терминологией, введенной в [1], под гидромеханическим узлом понимают относительно обособленную динамическую систему, состоящую из полостей, заполненных сжимаемой жидкостью и соединяемых короткими каналами, снабжёнными автоматическими клапанами. Гидродинамический узел описывают системой обыкновенных дифференциальных уравнений, но работу клапанных пружин, зачастую, моделируют уравнениями в частных производных или уравнениями с запаздывающей правой частью (подробности даны в [2,3]).

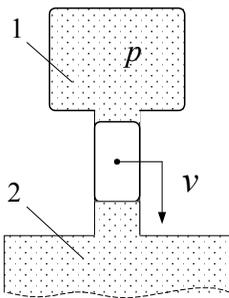


Рисунок 1 –
Схема устройства.

Подбор примеров отвечает принципу движения материала от простого к сложному, а сами примеры были получены авторами статьи в ходе выполненных ранее научных исследований, а также при подготовке учебника [4]. Продолжением этой статьи является публикация [5] из этого же сборника, где рассматривается использование матричных моделей для анализа динамической устойчивости клапанов.

Гидромеханический демпфер. Будем исследовать *свободные колебания*, возникающие в простейшей гидромеханической системе, показанной на рис. 1.

Полости 1 и 2 заполнены жидкостью, имеющей в полости 1 избыточное давление p . Это давление воздействует на плунжер и, кроме того, является

причиной перетекания жидкости через прецизионный зазор между плунжером и втулкой. На плунжер кроме силы давления действует сила трения, пропорциональная его скорости v .

Изменение давления p и скорости v при свободных колебаниях описываются системой уравнений

$$\{ \alpha \cdot w \cdot \dot{p} = -k_{ym} \cdot p - f_n \cdot v; \quad m \cdot \dot{v} = f_n \cdot p - f_{mp} \cdot v,$$

которую можно переписать в матричной форме:

$$\begin{pmatrix} \alpha \cdot w & 0 \\ 0 & m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{p} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_{ym} & -f_n \\ f_n & -f_{mp} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p \\ v \end{pmatrix}.$$

В этих уравнениях кроме переменных величин p, v все остальные физические величины (коэффициент сжимаемости α , объём полости w , коэффициенты утечек k_{ym} и трения f_{mp} , масса плунжера m и площадь его поперечного сечения f_n) считаются постоянными коэффициентами.

Прежде, чем интегрировать это уравнение, перейдём к обобщённым координатам (в этом случае они называются *фазовыми переменными*)

$$x = (\alpha \cdot w)^{1/2} \cdot p; \quad y = (m)^{1/2} \cdot v.$$

Сумма квадратов фазовых переменных пропорциональна полной механической энергии системы:

$$x^2 + y^2 = \alpha \cdot w \cdot p^2 + m \cdot v^2 = 2 \cdot (\alpha \cdot w \cdot (p^2 / 2) + m \cdot (v^2 / 2)) = 2 \cdot (E_{ном} + E_{кин}).$$

В результате матрица коэффициентов сохранит свою симметрию, но все её элементы будут иметь одинаковую физическую размерность – $[c^{-1}]$:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a & -f \\ f & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где $a = k_{ym} / (\alpha \cdot w)$; $b = f_{mp} / m$; $f = f_n / (\alpha \cdot w \cdot m)^{1/2}$.

Пусть, для определённости, $a = 1 \text{ c}^{-1}$, $b = 3 \text{ c}^{-1}$, а коэффициент f является варьируемым параметром, величина которого зависит, например, от выбора площади плунжера f_n . Воспользуемся *методом Эйлера*, и будем искать решение уравнения (1) в виде

$$x(t) = \exp(\lambda \cdot t) \cdot x_0; \quad y(t) = \exp(\lambda \cdot t) \cdot y_0,$$

где x_0, y_0 – некоторые числа, не равные одновременно нулю. Подстановка этих функций в уравнение (1) приводит к матричному равенству

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -f \\ f & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} -1 - \lambda & -f \\ f & -3 - \lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Однородное матричное уравнение (2) будет иметь нетривиальное реше-

ние, если определитель матрицы коэффициентов равен нулю, то есть

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & -f \\ f & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0, \text{ или } \det(S - \lambda \cdot I) = 0, \text{ где } S = \begin{pmatrix} -1 & -f \\ f & -3 \end{pmatrix}.$$

Раскрывая этот определитель, получаем квадратное уравнение $\lambda^2 + 4 \cdot \lambda + 3 - f^2 = 0$, которое имеет два корня $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{(1-f^2)}$. Эти корни являются *собственными числами* матрицы S .

При $f < 1$ собственные числа оказываются вещественными и различными. Подставляя их по очереди в уравнение (2), получаем

$$\begin{pmatrix} 1 - (1 - f^2)^{1/2} & -f \\ f & -1 - (1 - f^2)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 + (1 - f^2)^{1/2} & -f \\ f & -1 + (1 - f^2)^{1/2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранги матриц, составленных из коэффициентов при неизвестных, равны 1, следовательно, эти системы имеют однопараметрические множества нетривиальных решений. В частности, решениями этих систем будут векторы - столбцы

$$\bar{X}_1 = \begin{pmatrix} f \\ 1 - \sqrt{1 - f^2} \end{pmatrix}; \quad \bar{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{1 - f^2} \\ f \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы являются *собственными векторами* матрицы S . Они имеют одинаковую длину и расположены симметрично относительно биссектрисы первого квадранта (рис. 2); такое их расположение не случайность, а является следствием симметрии уравнений (и законов природы). При возрастании f они «движутся» навстречу.

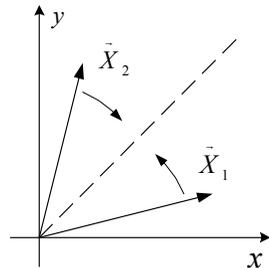


Рисунок 2 – Собственные векторы.

Теперь мы имеем возможность записать общее решение уравнения (1):

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = C_1 \cdot \exp(\lambda_1 t) \cdot \bar{X}_1 + C_2 \cdot \exp(\lambda_2 t) \cdot \bar{X}_2, \quad (3)$$

где C_1, C_2 – произвольные константы. Значения этих констант обычно определяются *начальными условиями*. Пусть в момент времени $t = 0$ фазовые переменные принимают известные значения $x(0), y(0)$.

Составим из столбцов $\bar{X}_{1,2}$ квадратную матрицу $X = (\bar{X}_1 \quad \bar{X}_2)$.

Тогда равенство (3) можно переписать в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 \cdot t) & 0 \\ 0 & \exp(\lambda_2 \cdot t) \end{pmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Проанализируем полученный результат. Сначала с точки зрения математики. Решение матричного уравнения (1)

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = S \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ удалось представить в виде: } \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \exp(S \cdot t) \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix}. \quad (6)$$

В качестве побочного результата получена диагонализация матрицы S . Теперь вернёмся к физике. Кривые, показанные на рис. 3, называются

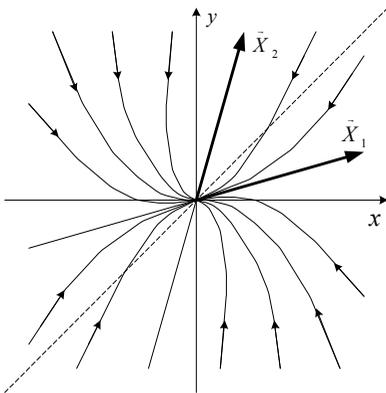


Рисунок 3 – Фазовые траектории.

фазовыми траекториями. В процессе движения система теряет энергию на трение, возникающее в прецизионном зазоре между слоями перетекающей жидкости и между поверхностями плунжера и втулки. Поэтому расстояние от точки фазовой траектории до начала координат с течением времени неуклонно уменьшается. При любых начальных условиях траектории приближаются к началу координат *монотонно*, то есть, оставаясь в пределах одного или максимум двух квадрантов. Такое колебание в физике называется *апериодическим* (рис. 4). Прямые траектории, идущие по

направлениям векторов \vec{X}_1, \vec{X}_2 , отвечают *собственным апериодическим колебаниям* системы. Числа $T_1 = -1/\lambda_1; T_2 = -1/\lambda_2$ имеют физическую размерность [с] и называются *постоянными времени* колебательных процессов.

Если начальная точка траектории не располагается на прямых, содержащих векторы \vec{X}_1, \vec{X}_2 , то колебательный процесс является результатом наложения двух собственных колебаний; именно по этой причине фазовая траектория может пересекать нулевую линию. Обращаем внимание на характер «закручивания» траекторий. При движении они как бы стремятся приблизиться к направлению собственного вектора \vec{X}_1 , отвечающего меньшему числу λ_1 . По-

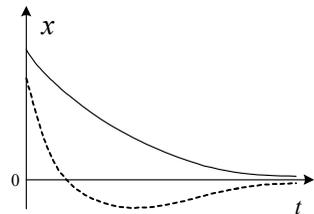


Рисунок 4 – Апериодическое колебание.

этому в разных областях «закрутка» линий различна.

Устройства, в которых все колебания являются аperiodическими, в механике называются *сильно демпфированными*. Данное устройство будет таковым, если $|a - b| > 2 \cdot f$.

Идеальный амортизатор. Если в этом гидромеханическом устройстве продолжать увеличивать площадь f_n поперечного сечения плунжера, то параметр f будет возрастать, а собственные вектора $\vec{X}_{1,2}$ – сближаться. При значении $f = 1 \text{ с}^{-1}$ они сольются, и решение (5) преобразуется в такое:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} \exp(\lambda_1 \cdot t) & t \cdot \exp(\lambda_1 \cdot t) \\ 0 & \exp(\lambda_1 \cdot t) \end{pmatrix} \cdot X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix},$$

где матрица $X = (\vec{X}_1 \quad \vec{Z})$, $\vec{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{Z} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ – *циклический вектор*.

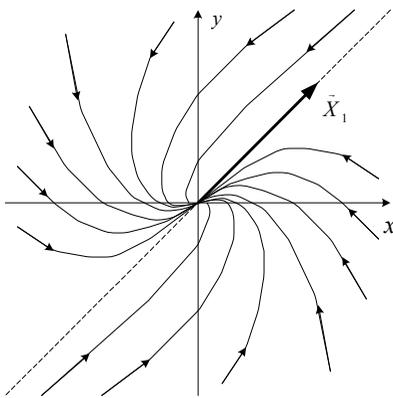


Рисунок 5 – Форма траекторий в предельном случае.

Таким образом, *центральная матрица* оказалась в этом случае не диагональной, а треугольной, и она является экспонентой от жордановой клетки. В анализируемом предельном случае матрица колебаний имеет вид:

$$S = X \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_1 \end{pmatrix} \cdot X^{-1}.$$

Изменяется и характер фазовых траекторий – они все закручены в одну сторону (рис. 5). «Векторный вихрь» уже сформировался, но он пока ещё не «кружит» вокруг начала координат, и характер колебаний остаётся аperiodическим.

Если нужно получить гидромеханический демпфер с наилучшим успокоением (*идеальный амортизатор*), то выбор его параметров необходимо подчинить условию $f = 1$. При этом постоянная времени $T_{1,2}$ достигнет своего предельно малого значения, и, что не менее важно, фазовые переменные будут пересекать нулевую линию только один раз (рис. 4, пунктир), а не многократно.

Гидромеханический маятник. Продолжим увеличивать площадь f_n поперечного сечения плунжера и выйдем в область, где $f > 1$. При этом соб-

ственные числа $\lambda_{1,2}$ матрицы S станут комплексно сопряженными:

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = -2 \pm i \cdot \sqrt{f^2 - 1},$$

а решение задачи приобретает вид:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X \cdot \Phi(t) \cdot X^{-1} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix},$$

где

$$\Phi(t) = \exp(\alpha t) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\beta t) & \sin(\beta t) \\ -\sin(\beta t) & \cos(\beta t) \end{pmatrix},$$

или

$$\Phi(t) = \exp\left(\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot t\right).$$

Матрица

$$Z = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$$

называется *матричным комплексом*.

Происхождение названия связано с тем, что эту матрицу можно представить в следующем виде:

$$Z = \alpha \cdot I + \beta \cdot K, \text{ где } I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ а кососимметричная матрица } K = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет любопытному равенству $K^2 = -I$.

В скалярной арифметике аналогичному равенству удовлетворяет мнимая единица i , поэтому матрица Z является аналогом комплексного числа $z = \alpha + i \cdot \beta$. Все матричные комплексы, как и обычные числа, перестановочны между собой, поэтому указанная аналогия касается всех алгебраических операций, то есть является полной. Кто до сих пор испытывает трудности с пониманием природы комплексных чисел, но уже привык к матричной арифметике, может просто отождествлять эти числа с соответствующими матричными комплексами.

Матрица K используется в квантовой механике, где она называется *спиновой матрицей Паули*. «Спин» в переводе означает вращение. Известно (смотри, например, [6]), что умножение элемента вещественного векторного пространства на комплексное число не только изменяет его длину, но и поворачивает на некоторый угол. То есть, *комплексные множители для вещественного векторного пространства* (в том числе – и для фазового пространства из этого примера) – это не скаляры, а *недиагональные матри-*

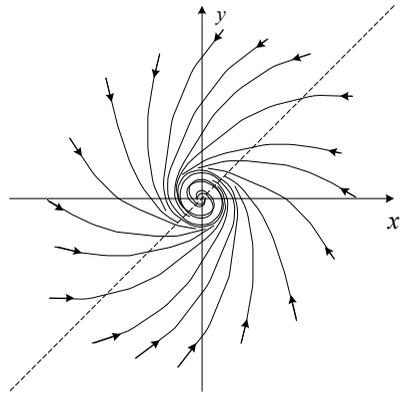


Рисунок 6 – Фазовые спирали.

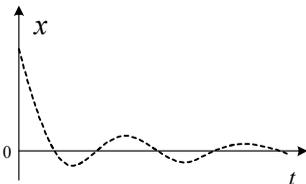


Рисунок 7 – Периодические затухающие колебания.

торного пространства на комплексное число не только изменяет его длину, но и поворачивает на некоторый угол. То есть, *комплексные множители для вещественного векторного пространства* (в том числе – и для фазового пространства из этого примера) – это не скаляры, а *недиагональные матри-*

цы особого вида – матричные комплексы.

Появление в решении задачи тригонометрических функций изменило форму фазовых траекторий (рис. 6). Вращение траектории вокруг начала координат приводит к тому, что число пересечений нулевой линии каждой фазовой переменной становится неограниченным, причём моменты пересечения повторяются с вполне определённым периодом (рис. 7). Такие колебания называются в механике *периодическими затухающими*. Период этих колебаний определяется формулой $T = 2 \cdot \pi / \beta$, а безразмерная величина $d = -\alpha \cdot T$ называется *логарифмическим декрементом* колебаний. Мнимая часть β собственного числа матрицы S называется *круговой частотой* колебаний, имеет стандартное обозначение ω и измеряется в [рад / с].

Жёсткая динамическая система. Напомним, что невырожденная матрица A называется *плохо обусловленной*, если

$$|\lambda_{\max}| \gg |\lambda_{\min}|,$$

где λ_{\min} , λ_{\max} – наименьшее и наибольшее (по модулю) собственные числа матрицы.

Если A является плохо обусловленной, то при численном решении уравнения вида

$$\dot{X} = A \cdot X$$

по методам Эйлера или Рунге – Кутта возникают проблемы, которые обсуждаются на материале этого пункта.

Методы Эйлера и Рунге – Кутта входят в стандартное математическое обеспечение любого компьютера и поэтому пользуются большой популярностью среди инженеров. Однако в различных областях техники, а особенно, в гидромеханике, приходится иметь дело с системами, в которых разностные схемы Эйлера или Рунге-Кутта оказываются в принципе не пригодными. Пример такого устройства показан на рис. 8. Оснащение плунжера дросселирующим каналом (жиклёром) привело к тому, что коэффициент a в матрице S существенно возрос, а при приближении перепада давления p к нулю (то есть вблизи точки равновесия) он стремится к бесконечности.

Причина такого поведения этого коэффициента связана с особенностью формулы, используемой для расчёта течения жидкости через жиклёр. Напомним некоторые сведения из курса элементарной физики.

Течение вязкой жидкости через прецизионный зазор считается *ламинарным* (слоистым), и здесь, в соответствии с законом ламинарного течения, расход q пропорционален перепаду давлений p :

$$q = k_{\text{ум}} \cdot p.$$

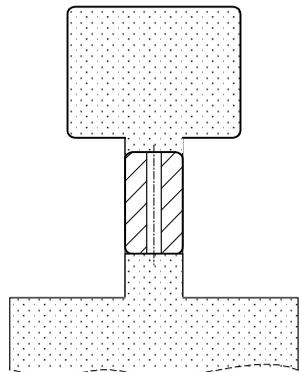


Рисунок 8 –
Плунжер с жиклёром.

Перетекание жидкости через жиклёр является *турбулентным* (вихревым) и описывается так называемым *законом Бернулли*:

$$q = \mu f \cdot \sqrt{[(2/(\rho \cdot |p|))] \cdot p},$$

где μf – эффективная площадь потока; ρ – плотность жидкости.

Поэтому в новом устройстве коэффициент k_{ym} оказывается пропорциональным $1/\sqrt{|p|}$, и при $p \rightarrow 0$ он стремится к бесконечности.

Вернёмся к задаче о колебаниях гидромеханического демпфера и, не меняя остальных элементов матрицы

$$S = \begin{pmatrix} -a & -f \\ f & -b \end{pmatrix},$$

изучим поведение собственных чисел λ этой матрицы при $a \rightarrow +\infty$.

Анализируя проведенное ранее решение, замечаем, что уравнение для этих чисел имеет вид

$$\det(S - \lambda \cdot I) = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем квадратное уравнение

$$\lambda^2 - (a+b) \cdot \lambda + (a \cdot b + f^2) = 0,$$

которое имеет два вещественных корня

$$\lambda_{1,2}(a) = -\frac{a+b}{2} \pm \frac{\sqrt{[(a-b)^2 - f^2]}}{2}.$$

Если $a \rightarrow +\infty$, то, вычисляя соответствующие пределы, выясняем, что при любом значении f корень $\lambda_1 \rightarrow -b$, а корень $\lambda_2 \rightarrow (-\infty)$. При этом

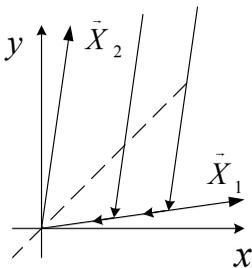


Рисунок 9 – Диаграммы для жёсткой системы.

собственные векторы \vec{X}_1, \vec{X}_2 приближаются к осям координат, а фазовые диаграммы становятся похожими на ломаную линию, состоящую из двух прямолинейных отрезков (рис. 9).

В соответствии с определением, принятым в механике, колебательный процесс, описываемый

уравнением $\dot{X} = S \cdot X$ называется *жёстким*, если матрица S имеет ненулевые собственные числа λ_1 и λ_2 , модули которых различаются на несколько порядков. В исследуемом здесь процессе

при $a \rightarrow +\infty$ выполняются условия

$$-\lambda_1 \geq b \quad \text{и} \quad \lambda_2 / \lambda_1 \approx a/b \rightarrow \infty,$$

поэтому при больших a он становится жёстким. Характер изменения фазовой переменной во время такого процесса показан на рис. 10 сплошной линией.

Поскольку $\lambda_2 \rightarrow (-\infty)$, то число $\lambda_2 \cdot \Delta t$ при любом положительном шаге Δt выйдет за пределы круга (или овала) устойчивости (смотри [7]), и мы при использовании схем Эйлера или Рунге – Кутта получим в расчёте

растущую по амплитуде «пилу», показанную на том же рисунке пунктиром.

В результате, мы попали в сложное положение, из которого нужно искать выход. Таких выходов существует несколько. Укажем два варианта решения.

- Во-первых, можно изменить расчётную схему.

Например, если применить так называемую *неявную схему Адамса*, то формула для передаточной матрицы C , используемой на каждом шаге интегрирования в рекуррентном равенстве

$$X(t + \Delta t) = C \cdot X(t),$$

будет иметь следующий вид:

$$C = [I - (\Delta t / 2) \cdot S]^{-1} \cdot [I + (\Delta t / 2) \cdot S].$$

Замечательной особенностью этой формулы является то, что отвечающее ей условие устойчивости

$$\left| [I - (\Delta t / 2) \cdot \lambda_j]^{-1} \cdot [I + (\Delta t / 2) \cdot \lambda_j] \right| \leq 1$$

выполняется для всех чисел λ_j из левой комплексной полуплоскости. То есть, при использовании метода Адамса *физическая устойчивость моделируемой системы автоматически влечёт устойчивость её расчётной схемы*.

При расчёте жёсткого колебательного процесса метод Адамса полностью не убирает «пилу», но теперь она не растёт по амплитуде, а убывает (рис. 10, прерывистая линия).

- Во-вторых, можно пересмотреть используемую физическую (и математическую) модель.

Дело в том, что при малых перепадах давления скорость течения жидкости через дроссель уменьшается настолько, что основные потери энергии происходят не на входе и выходе из канала, а в самом канале, где режим течения становится ламинарным. Поэтому, если учесть указанное обстоятельство, то коэффициент k_{ym} станет ограниченным во всём диапазоне давлений, а значение шага Δt будет «отграниченным от нуля».

Имея этот теоретический результат, в остальном, казалось бы, можно положиться на высокое быстродействие современной вычислительной техники. Поэтому второй выход со всех точек зрения может показаться вам лучше первого. Но это иллюзия.

Если через жиклёр перетекает жидкость с малой вязкостью (например, бензин или дизельное топливо), то предпринимаемая компьютерной программой попытка «загнать» все собственные числа $\lambda_j \cdot \Delta t$ в зону устойчивости может окончиться плачевно. Кривой, убывающей по экспоненциальному

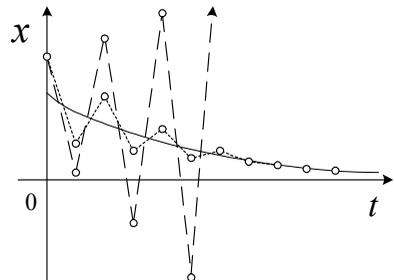


Рисунок 10 – Результаты расчёта жёсткой системы.

закону, мы всё равно не получим, но будем наблюдать хаотический разброс расчётных точек, а, если очень не повезёт, то и горизонтальную линию, показанную на рис. 11.

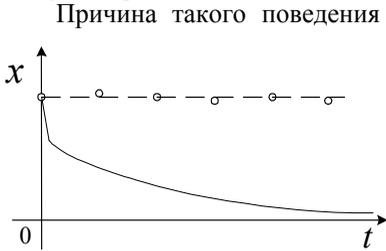


Рисунок 11 – Влияние погрешности округления.

Причина такого поведения решения связана с округлением чисел в ЭВМ. Например, если величина $|\lambda_1 \cdot \Delta t|$ окажется меньше, чем 10^{-12} , то экспонента от этого числа будет в точности равна единице. Но это означает, что в той новой задаче, которую «сочинил» и решает компьютер, «мягкая» составляющая колебательного процесса полностью отсутствует.

Чтобы избежать негативного влияния погрешности округления, достаточно добиться того, чтобы наименьшее по модулю собственное число λ_1 матрицы S , ответственное за основную составляющую колебательного процесса, удовлетворяло неравенству

$$0.01 < |\lambda_1 \cdot \Delta t| < 0.1.$$

Если при таком выборе шага интегрирования Δt некоторое другое собственное число λ_j выйдет за пределы области устойчивости, то нужно менять расчётную схему.

Статическая неустойчивость прямого клапана. На практике иногда встречаются и такие ситуации, когда движение гидромеханической системы оказывается неустойчивым, и в ней наблюдаются колебания, быстро растущие по амплитуде. Правда, бесконечного возрастания амплитуды на самом деле не происходит, так как система выходит за те пределы, для которых составлена модель; например, при высокой амплитуде колебаний какие-то звенья механизма начинают контактировать с упорами, что в ней не учтено.

Поскольку «раскачка» колеблющейся части системы остаётся конечной, то на её реализацию будет затрачена конечная энергия. Эта энергия может быть позаимствована у другой части этой же системы, в которой она, например, была запасена заранее.

Так, в гидравлической системе, показанной на рис. 12, роль «резервуара» энергии играет сжатая жидкость. Если давление p_1 выше, чем давление p_2 , то эта жидкость будет перетекать через клапан

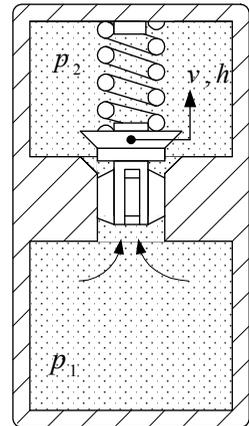


Рисунок 12 – Клапанный узел.

по направлению, указанному стрелками. При этом возникнет перепад давления на клапане, который будет стремиться поднять клапан выше. Но этому противодействует пружина.

При определённой высоте h подъёма клапана (обозначим её h_0) между силой давления жидкости

$$F_{\text{зидр}} = f \cdot (p_1 - p_2)$$

и силой пружины

$$F_{\text{нр}} = z_{\text{нр}} \cdot (h_{\text{нр},0} + h)$$

возникает равновесие –

$$F_{\text{зидр}} = f \cdot \Delta p_0 = F_{\text{нр}} = z_{\text{нр}} \cdot (h_{\text{нр},0} + h_0),$$

и клапан, если давления в полостях не будут изменяться, теоретически может оставаться в этом положении неподвижным. Действительно, при любых отклонениях от положения h_0 будет возникать *восстанавливающая сила*, и

положение h_0 будет являться положением статического равновесия (рис. 13).

Но объёмы полостей ограничены, поэтому по мере перетекания жидкости перепад давления $p_1 - p_2$ будет уменьшаться, а, значит, точка статического равновесия начнёт смещаться вниз. Процессу выравнивания давлений будет противодействовать так называемый *насосный эффект клапана* (при своём опускании он будет для обеих полостей играть роль поршня), а также то, что уменьшение подъёма клапана снижает проходное сечение потока. В результате начнётся сложная игра различных динамических факторов, описываемая следующей системой дифференциальных уравнений:

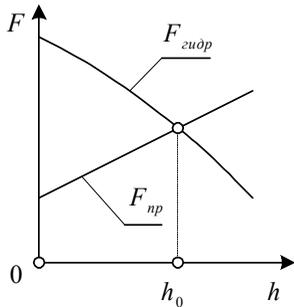


Рисунок 13 – Зависимости движущих сил от подъёма клапана.

$$\alpha \cdot w_1(h) \cdot \dot{p}_1 = -f \cdot v - q(p_1 - p_2; h); \quad (7)$$

$$\alpha \cdot w_2(h) \cdot \dot{p}_2 = f \cdot v + q(p_1 - p_2; h); \quad (8)$$

$$m \cdot \dot{v} = f \cdot (p_1 - p_2) - z_{\text{нр}} \cdot (h_{\text{нр},0} + h); \quad (9)$$

$$z_{\text{нр}} \cdot \dot{h} = z_{\text{нр}} \cdot v, \quad (10)$$

где α, ρ – коэффициент сжимаемости и плотность жидкости; w_1, w_2 – объёмы жидкости в полостях; $q(\Delta p; h)$ – объёмная скорость течения жидкости через клапан при перепаде давления Δp и перемещении клапана h ,

$$q(\Delta p; h) = \mu f(h) \cdot \sqrt{[(2/(\rho \cdot |\Delta p|))]} \cdot (\Delta p); \quad (11)$$

$\mu f(h)$ – площадь эффективного проходного сечения клапана, зависящая от величины его перемещения h (и, иногда, от направления течения); m, v, f – масса и скорость клапана, площадь его поперечного сечения; $z_{np}, h_{np,0}$ – коэффициент жёсткости и предварительная деформация пружины клапана.

В этой системе уравнения (7) и (8) называются *уравнениями сжимаемости*, а зависимость (11) соответствует известному правилу гидравлики – *закону Бернулли* для расчёта объёмной скорости течения жидкости через малое отверстие. Уравнения (9) и (10) являются простейшими *уравнениями движения*, составленными для клапана.

Мы видим, что в уравнении (10) обе части можно сократить на коэффициент z_{np} , однако не спешим это делать. На то есть две причины.

- Во-первых, при таком сокращении, была бы потеряна симметрия уравнений, а такую потерю математик допустить не может.
- Во-вторых, этого не нужно делать и с физической точки зрения.

Если мы сейчас умножим каждое уравнение на «свою» переменную и просуммируем их, то в левой части получим производную от полной механической энергии системы

$$E_{\text{мех}} = \alpha \cdot w_1 \cdot p_1^2 / 2 + \alpha \cdot w_2 \cdot p_2^2 / 2 + m \cdot v^2 / 2 + z_{np} \cdot (h + h_{np,0})^2 / 2,$$

а в правой части – мощность $N_{\text{ном}}$, теряемую на клапане при массообмене:

$$\dot{E}_{\text{мех}} = -N_{\text{ном}} = -q(\Delta p; h) \cdot (\Delta p) = -\mu f(h) \cdot (2/\rho)^{1/2} \cdot |\Delta p|^{3/2} \leq 0.$$

Выражение для объёмной скорости q содержит нелинейные сомножители – корень из перепада давлений и зависимость $\mu f(h)$. Эту функцию вблизи положения равновесия можно линеаризовать:

$$q \approx a \cdot (\delta p_1 - \delta p_2) + b \cdot \delta h,$$

где

$a = q_0 / (2 \cdot \Delta p_0) \geq 0$; $b = [\mu f'(h_0) / \mu f(h_0)] \cdot q_0$; $q_0 = \sqrt{[(2/(\rho \cdot |\Delta p_0|))]} \cdot (\Delta p_0)$; $\delta p_1, \delta p_2, \delta h$ – отклонения давлений p_1, p_2 и перемещения клапана h от их значений, отвечающих точке статического равновесия.

После линеаризации запишем систему в матричной форме:

$$D \cdot \dot{Y} = A \cdot Y,$$

$$\text{где } D = \text{diag}(\alpha \cdot w_1, \alpha \cdot w_2, m, z_{np}); Y = \begin{pmatrix} \delta p_1 \\ \delta p_2 \\ v \\ \delta h \end{pmatrix}; A = \begin{pmatrix} -a & a & -f & -b \\ a & -a & f & b \\ f & -f & 0 & -z_{np} \\ 0 & 0 & z_{np} & 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку коэффициент $b \neq 0$, то матрица A не является блочной J-симметричной матрицей (так называемой *матрицей колебаний*, смотри [4]).

Поэтому мы не будем выполнять симметричное окаймление матрицы A матрицами $D^{-1/2}$, а, вместо этого, запишем характеристическое уравнение этой задачи в следующей эквивалентной форме:

$$\det(\lambda \cdot D - A) = 0.$$

Матрица A имеет пропорциональные строки, поэтому одно из её собственных чисел равно 0. Остальные собственные числа являются корнями кубического уравнения

$$\lambda^3 + \frac{a}{\alpha w} \lambda^2 + \frac{z_{np} \alpha w + f}{\alpha w m} \lambda + \frac{a z_{np} + f b}{\alpha w m} = 0,$$

где w – так называемый *эффективный гидравлический объём системы*,

$$1/w = 1/w_1 + 1/w_2.$$

Для исследования решений кубического уравнения применяем *критерий Рауса – Гурвица* [7] и получаем, что при условии

$$a \cdot f < \alpha \cdot w \cdot b \quad (12)$$

среди собственных чисел имеется вещественное положительное число $\lambda_2 > 0$ (рис. 14), а при выполнении условия

$$b \cdot f < -a \cdot z_{np}, \quad (13)$$

имеется пара комплексно сопряжённых собственных чисел с положительной вещественной частью (рис. 15).

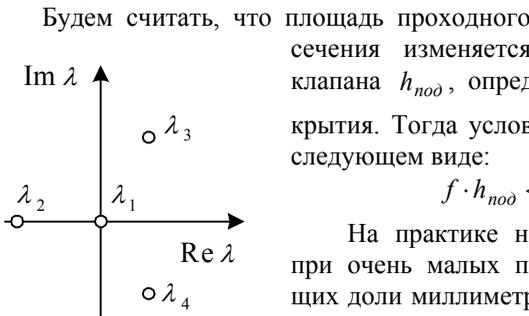


Рисунок 15 – Неустойчивость циклического типа.

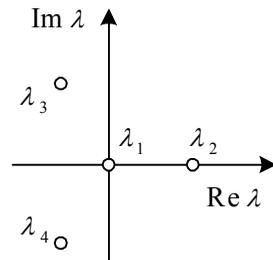


Рисунок 14 – Расположение собственных чисел при неустойчивости аperiодического типа.

сечения изменяется пропорционально подъёму клапана h_{nod} , определяемому с момента его открытия. Тогда условие (12) можно представить в следующем виде:

$$f \cdot h_{nod} < 2 \cdot \alpha \cdot w \cdot \Delta p_0. \quad (14)$$

На практике неравенство (14) выполняется при очень малых подъёмах клапана, составляющих доли миллиметра. Поэтому, если клапан имеет так называемый цилиндрический *разгружающий поясок* (показанный на рис. 12), то он буквально проскакивает эту зону, как бы «не замечая» её.

Если разгружающего пояска нет, а перепад

давлений Δp_0 чуть превышает давление открытия клапана

$$p_0 = z_{np} \cdot h_{np,0} / f ,$$

то точка равновесия попадёт в зону неустойчивости. И если даже удастся оставить клапан в этом положении равновесия неподвижным, то на него неизбежно будут воздействовать случайные отклонения (*флуктуации*) сил, которые в этих условиях способны раскачать его. В результате клапан начнёт совершать колебания, сопровождающиеся ударами о седло.

Амплитуда этих колебаний будет не меньше, чем ширина зоны динамической неустойчивости (рис. 16), но, если эта зона узкая, то амплитуда останется малой. Однако, по сравнению с чрезвычайно малым начальным возмущением системы, которое можно считать близким к нулю (другими словами, *в масштабе флуктуации*), наблюдаемое изменение конечного положения клапана соизмеримо с бесконечностью.

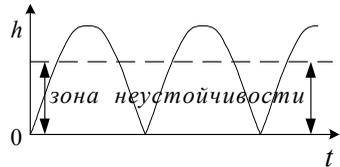


Рисунок 16 – Характер движения клапана при автоколебаниях.

Многочисленные удары клапана о седло создают определённый акустический эффект, который в некоторых случаях используется для диагностирования технического состояния клапанного узла.

Выводы. Даны примеры использования матриц для описания свободных колебаний гидромеханических узлов. Разъяснены преимущества применения разностной схемы Адамса для расчёта узлов, которые описываются жёсткой системой дифференциальных уравнений, имеющей плохо обусловленную матрицу коэффициентов при неизвестных. Составлена линеаризованная модель клапанного гидромеханического узла и получены условия его статической устойчивости.

Список литературы: 1. Григорьев А.Л. Универсальный метод динамического расчёта гидромеханического узла // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. - Харьков: ХГПУ, 2000. – Вып.104. – С.75-84. 2. Григорьев А.Л., Вештак И.А. Динамический анализ цилиндрической пружины при симметричных условиях закрепления её крайних витков // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 1999. – Вып.42. – С.125-134. 3. Григорьев А.Л., Деряженко А.И., Король С.А. Динамический анализ цилиндрических пружин дизельной топливной аппаратуры // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков: НТУ «ХПИ». – 2005. – № 1. – С. 90-99. 4. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Учебник. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2002. – 542 с. 5. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Абсолютная и относительная динамическая устойчивость гидромеханических узлов // см. статью в настоящем сборнике. – С. 88-106. 6. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1981. 7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967.

Поступила в редколлегию 29.12.11