

$\tilde{y} = M_0 g l (2EF)^{-1}$  – статическое перемещение торца стержня под действием собственного веса.

Величиной  $\tilde{y}$  выше пренебрегали. Для принятых исходных данных:  
 $\tilde{y} = 2,627 \cdot 10^{-7}$  м.

**Выводы.** Расчеты показали, что теории *Сен-Венана* и *Кокса* хорошо согласуются при различных отношениях масс соударяющихся тел, а компактные формулы (14) и (16) вполне пригодны для расчета коэффициента динамичности перемещений при продольном механическом ударе.

**Список литературы:** 1. *Лурье А.И.* Операционное исчисление и его приложения к задачам механики. – М.-Л.: Гостехиздат, 1951. – 431 с. 2. *Кильчевский Н.А.* Теория соударений твердых тел. – К.: Наукова думка, 1969. – 247 с. 3. *Гольдсмит В.* Удар. – М.: Госстройиздат, 1965. – 448 с. 4. *Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С.* Опір матеріалів.. – К.: Вища школа, 2004. – 655 с. 5. *Писаренко Г.С., Яковлев А.П., Матвеев В.В.* Справочник по сопротивлению материалов. – К.: Наукова думка, 1988. – 736 с. 6. *Шкельов Л.Т., Станкевич А.М., Пошивач Д.В.* Опір матеріалів. – К.: ЗАТ «Віпол», 2011. – 456 с. 7. Справочник по сопротивлению материалов / Е.Ф. Винокуров, М.К. Балыкин, И.А. Голубев и др. – Мн.: Наука и техника, 1988. – 464 с. 8. *Филиппов А.П.* Колебания механических систем. – М.: Машиностроение, 1970. – 734 с.

*Поступила в редколлегию 29.03.2012*

УДК 534

**К.Ю. ПЛАКСИЙ**, студентка, НТУ «ХП»;  
**Ю.В. МИХЛИН**, д-р фіз.-мат. наук, проф. НТУ «ХП»

### **СТІЙКІСТЬ НЕЛІНІЙНИХ НОРМАЛЬНИХ ФОРМ КОЛИВАНЬ ПРУЖИННО-МАЯТНИКОВОЇ СИСТЕМИ ТА ПРОЦЕС ЗРИВУ ВЕРТИКАЛЬНОЇ ФОРМИ**

Нормальні форми коливань пружинно-маятникової системи отримано кількома асимптотичними методами. Досліджено стійкість форм коливань. Аналізується процес зриву вертикальних коливань за методикою Старжинського. Чисельне інтегрування демонструє досить високу точність аналітичних результатів.

Нормальные формы колебаний пружинно-маятниковой системы получены несколькими асимптотическими методами. Исследована устойчивость форм колебаний. Анализируется процесс срыва вертикальных колебаний по методике Старжинского. Численное интегрирование демонстрирует достаточно высокую точность аналитических результатов.

Nonlinear normal modes of the spring-pendulum system are obtained by few asymptotic methods. It is investigated a stability of the vibration modes. A process of the vertical vibrations disruption is analyzed by the Starzhinsky approach. Numerical simulation shows a good exactness of the analytical results.

**Вступ.** Нелінійні нормальні форми коливань є узагальненням нормальних коливань лінійних систем [1-3]. В режимі нормальних коливань нелінійна система з кількома степенями свободи поводить себе подібно системі з однією степеню свободи. Виділення та дослідження локалізованих форм коливань є важливою проблемою для інженерних застосувань, зокрема, в задачах гасіння коливань [3]. Задача віброгасіння і локалізації енергії тісно поєднана з загальною задачею щодо перекачки енергії. Перша спроба описати явище нелінійної перекачки енергії зроблена у роботі [4], де розглядається взаємодія форм коливань пружинного маятника. Зазначимо, що саме маятникові системи є класичними моделями нелінійної теорії коливань, дослідження яких дозволяє виділити важливі нелінійні динамічні ефекти [5,6]. Зокрема, процес зриву вертикальних коливань та перекачка енергії в консервативній маятниковій системі описаний в роботі [5]. Взаємодія нормальних форм коливань в нелінійних системах досліджується в роботах [6,7]. Нормальні форми коливань в пружинно-маятниковій системі побудовано кількома методами в роботі [8].

В даній роботі уточнено розв'язки рівнянь руху пружинно-маятникової системи для стаціонарних режимів, що отримані в [8] *методами гармонічного балансу, багатьох масштабів та нормальних форм Розенберга*. Нормальні форми коливань проаналізовані на стійкість за допомогою *методів алгебраїзації за Айнсом, визначників Хілла* та чисельно-аналітичного методу. Досліджено процес зриву вертикальних коливань за *методикою Старжинського*. Порівняльне чисельне інтегрування дає добру відповідність аналітичним результатам.

**Нормальні форми коливань пружного маятника.** Розглядається пружний маятник (рис.1), рух якого задається наступною системою рівнянь:

$$\begin{cases} \ddot{x} + p^2 x - \alpha(\ddot{\theta} \sin \theta + \dot{\theta}^2 \cos \theta) = 0 \\ \ddot{\theta} + \sin \theta - \ddot{x} \sin \theta = 0, \end{cases} \quad (1)$$

а кінетична та потенційна енергії мають вигляд:

$$K = \frac{1}{2} \dot{x}^2 - \alpha \dot{x} \dot{\theta} \sin \theta + \frac{1}{2} \alpha \dot{\theta}^2,$$

$$V = \frac{1}{2} p^2 x^2 + \alpha(1 - \cos \theta),$$

де  $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ ,  $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ ,  $p = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ ,  $\alpha = m/(m+M)$ ,  $\tau = \omega_2 t$ .

В цій системі існують дві нелінійні нормальні форми:  $x$ -форма, або пружинна мода  $x = x(t)$ ,  $\theta = 0$ , що відповідає суто вертикальним коливанням і є локалізованою, та  $\theta$ -форма, або маятникова мода  $x = x(t)$ ,  $\theta = \theta(t)$ ,

що відповідає зв'язаним коливанням і є нелокалізованою.

За допомогою методу гармонічного балансу в [8] отримані аналітичні розв'язки для  $\theta$  – форми зв'язаних коливань у вигляді:

$$\begin{cases} x(\tau) = A_0 + A_1 \cos 2\omega\tau, \\ \theta(\tau) = B_1 \sin \omega\tau, \end{cases} \quad (2)$$

де  $A_0 = 0$ ;  $A_1 = \frac{\alpha\omega^2 B_1^2}{p^2 - 4\omega^2}$ ;  $B_1 = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2)(p^2 - 4\omega^2)}{2\alpha\omega^4}}$ .

Подальше уточнення розв'язків (2) методом гармонічного балансу є недоцільним у зв'язку зі значним ускладненням обчислень при збільшенні числа членів рядів Фур'є у відповідних розкладах, причому збіжність цих рядів суттєво залежить від початкових умов.

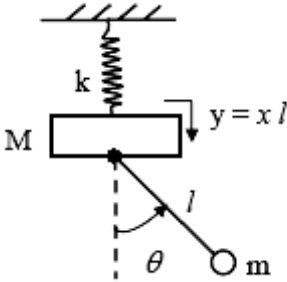


Рисунок 1 – Пружинно-маятникова система.

Уточнимо розв'язки, що отримані в [8] методом багатьох масштабів [6]. Застосування розкладень координат в асимптотичні ряди до членів  $O(\varepsilon^3)$  включно та введення масштабів часу до  $O(\varepsilon^{-3})$  приводить систему (1) до системи лінійних диференціальних рівнянь у частинних

похідних та дає наступні розв'язки:

для  $x$  – форми:

$$\begin{cases} x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 = 2\varepsilon a_0 \cos(p\tau), \\ \theta = \varepsilon\theta_0 + \varepsilon^2\theta_1 + \varepsilon^3\theta_2 = 0, \end{cases} \quad (3)$$

для  $\theta$  – форми:

$$\begin{cases} x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 + \varepsilon^3 x_2 = \varepsilon^2 \frac{4\alpha}{p^2 - 4} a_1^2 \cos\left(2\tau\left(1 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha a_1^2}{p^2 - 4}\right)\right), \\ \theta = \varepsilon\theta_0 + \varepsilon^2\theta_1 + \varepsilon^3\theta_2 = 2\varepsilon a_1 \sin\left(\tau\left(1 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha a_1^2}{p^2 - 4}\right)\right) - \varepsilon^3 \frac{2\alpha}{p^2 - 4} a_1^3 \times \\ \times \sin\left(3\tau\left(1 - \frac{4\varepsilon^2 \alpha a_1^2}{p^2 - 4}\right)\right). \end{cases} \quad (4)$$

Зазначимо, що обмежуючись першим та другим наближеннями у (4) і відповідно з першими двома масштабами часу, маємо розв'язок (4) у вигляді, наведеному в [8]:

$$\begin{cases} x = \varepsilon x_0 + \varepsilon^2 x_1 = \varepsilon^2 \frac{4\alpha}{p^2 - 4} \operatorname{Im}(A_\theta^2) \cos(2\tau), \\ \theta = \varepsilon \theta_0 + \varepsilon^2 \theta_1 = 2\varepsilon \operatorname{Im}(A_\theta) \sin(\tau), \end{cases} \quad (5)$$

який еквівалентний до виразу (2).

Розв'язок для  $\theta$ -форми може бути побудовано методом нормальних форм коливань, що базується на побудові траєкторії у конфігураційному просторі системи [1-3]. Відповідне рівняння може бути отримане шляхом переходу до нової незалежної змінної  $x$ , яка вводиться замість  $\tau$ , з використанням інтеграла енергії:

$$2(h - V(x))(1 - \alpha \sin^2 \theta)x'' + (-p^2 x x' \sin \theta - x' \sin \theta + \alpha \sin^2 \theta + p^2 x) \times \\ \times (x'^2 - 2\alpha x' \sin \theta + \alpha) + (h - V(x))(2\alpha x' \sin \theta \cos \theta - 2\alpha \cos \theta) = 0. \quad (6)$$

Точки максимальної еквіпотенціальної поверхні є особливими точками рівнянь (6). Наступні граничні умови забезпечують аналітичне продовження розв'язку на цю поверхню [1-3].

$$(-p^2 x x' \sin \theta - x' \sin \theta + \alpha \sin^2 \theta + p^2 x)(x'^2 - 2\alpha x' \sin \theta + \alpha) = 0. \quad (7)$$

Розв'язок для  $\theta$ -форми розшукується у такому вигляді:

$$x(\theta) = \varepsilon \tilde{x}_1(\theta) + \varepsilon^2 \tilde{x}_2(\theta) + O(\varepsilon^3), \quad (8)$$

де  $\tilde{x}_2(\theta) = a_0^{(2)} + a_1^{(2)}\theta + a_2^{(2)}\theta^2 + a_3^{(2)}\theta^3 + O(\theta^4)$ .

Підстановка (8) в рівняння (6) з урахуванням граничних умов (7) приводить до системи алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів розкладань (8):

$$\begin{aligned} \alpha a_0^{(2)} p^2 + 2\alpha a_2^{(2)} Y^2 = 0, \quad -\alpha a_1^{(2)} + \alpha a_1^{(2)} p^2 + 6\alpha a_3^{(2)} Y^2 = 0, \\ -4\alpha a_2^{(2)} + \alpha a_2^{(2)} p^2 = 0, \quad -6\alpha a_3^{(2)} - 3\alpha a_3^{(2)} + \alpha a_3^{(2)} p^2 = 0, \\ a_0^{(2)} p^2 = 0, \quad -a_1^{(2)} + a_1^{(2)} p^2 = 0. \end{aligned}$$

В результаті отримано, що:

$$a_0^{(2)} = a_1^{(2)} = a_2^{(2)} = a_3^{(2)} = 0.$$

Таким чином, розв'язок (8) набуває вигляду:

$$x(\theta) = \varepsilon \left( \frac{\alpha Y^2}{p^2 - 4} + \frac{-2\alpha}{p^2 - 4} \theta^2 + O(\theta^4) \right) + O(\varepsilon^3), \quad (9)$$

що відповідає розв'язку у формі (5) та результатам, отриманим в роботі [8].

**Дослідження на стійкість нормальних форм коливань.** Для дослідження на стійкість отриманих розв'язків розглянемо рівняння у варіаціях в

лінеаризованому вигляді при варіаціях змінних  $x = \tilde{x} + u$ ,  $\theta = \tilde{\theta} + v$ :  
 для  $x$ -форми:

$$\ddot{u} + p^2 u = 0, \quad \ddot{v} + v(1 - \ddot{\tilde{x}}) = 0, \quad (10)$$

для  $\theta$ - форми:

$$\ddot{u} + p^2 u - \alpha(\ddot{\tilde{\theta}}v + 2\dot{\tilde{\theta}}\dot{v} + \ddot{v}\tilde{\theta}) = 0, \quad \ddot{v} + v - \ddot{\tilde{x}} \cdot v - \ddot{u}\tilde{\theta} = 0. \quad (11)$$

Зауважимо, що відхилення по координаті  $x$  не впливають на **стійкість вертикальної форми**, тому будемо розглядати лише друге рівняння системи (10).

При  $\theta \equiv 0$  для системи (1) маємо рівняння  $\ddot{\tilde{x}} + p^2 \tilde{x} = 0$ , розв'язок якого з урахуванням умов парності буде  $\tilde{x} = A \cos p\tau$ . Підставляючи цей розв'язок у друге рівняння (10), зведемо його до класичного *рівняння Матьє*

$$v'' + v(a + \mu \cos 2\tau_1) = 0, \quad (12)$$

де  $\tau_1 = p\tau/2$ ,  $v'' = d^2v/d\tau_1^2$ ,  $a = 4/p^2$ ,  $\mu = 4A$ , для якого границі стійкості/нестійкості є відомими [9]. Границі для головного та другого параметричних резонансів побудовані засобами пакету Matlab у вигляді залежностей амплітуди  $A$  від частоти  $p$ , що відповідно представлені на рис.2, 3. Нестійкість спостерігається всередині фігур, утворених граничними лініями.

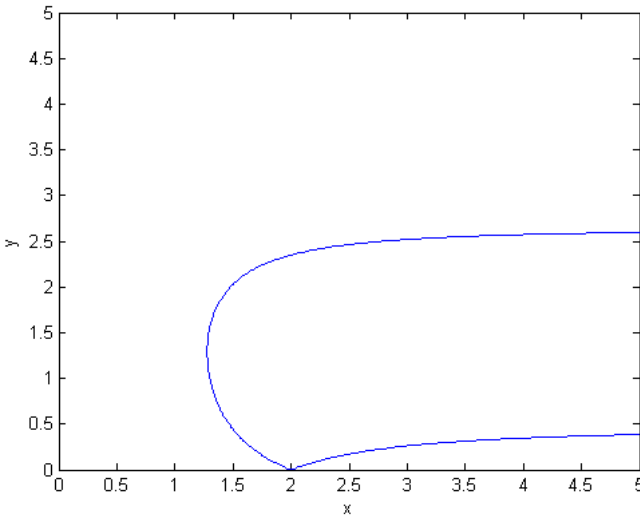


Рисунок 2 – Перша границя.

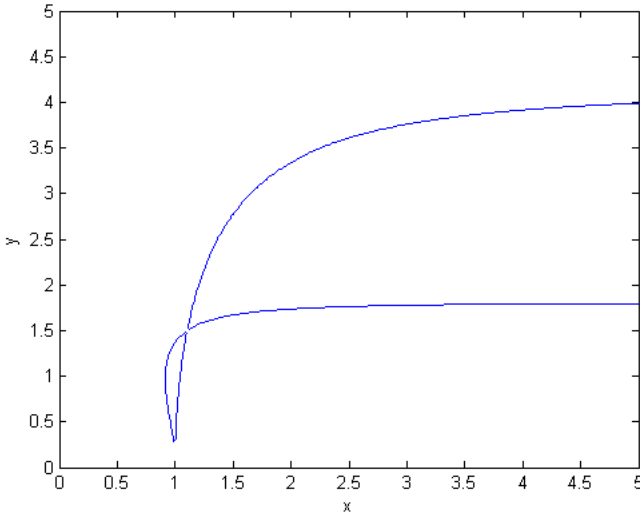


Рисунок 3 – Друга границя.

До рівняння (12) застосуємо також методику алгебраїзації за Айнсом [10], що за допомогою спеціальної заміни  $z = \sin^2 \tau_1$  приводить його до диференційного рівняння в алгебраїчній формі з особливими точками:

$$\frac{d^2v}{dz^2} \cdot 4z(1-z) + \frac{dv}{dz} \cdot 2(1-2z) + (a + 2\varepsilon - 4\varepsilon z) \cdot v = 0. \quad (13)$$

Підстановка в (13) розв'язків спеціального вигляду, що відповідають границям областей стійкості/ нестійкості [10,2,3],

$$v = a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3, \quad v = \sqrt{z} \cdot (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3),$$

$$v = \sqrt{1-z} \cdot (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3), \quad v = \sqrt{z} \cdot \sqrt{1-z} \cdot (a_0 + a_1z + a_2z^2 + a_3z^3),$$

приводить до систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів цих розв'язків.

Умовою існування нетривіальних розв'язків цих систем є рівність їхніх визначників нулю:

$$\begin{vmatrix} a+2\varepsilon & 2 & 0 & 0 \\ -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-4 & 12 & 0 \\ 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-16 & 30 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-36 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (a+2\varepsilon)-1 & 6 & 0 & 0 \\ -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-9 & 20 & 0 \\ 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-25 & 42 \\ 0 & 0 & -4\varepsilon & (a+2\varepsilon)-49 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (a+2\varepsilon)-1 & 2 & 0 & 0 \\ 1-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-11 & 12 & 0 \\ 4\varepsilon & 9-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-37 & 30 \\ 0 & 4\varepsilon & 25-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-79 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} (a+2\varepsilon)-4 & 6 & 0 & 0 \\ 4-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-22 & 20 & 0 \\ 4\varepsilon & 16-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-56 & 42 \\ 0 & 4\varepsilon & 36-4\varepsilon-(a+2\varepsilon) & (a+2\varepsilon)-106 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкриємо ці визначники засобами Mathcad 2000. Побудовані попарно за допомогою пакету Matlab, вони дають границі стійкості/нестійкості  $A(p)$ , представлені на рис. 4, 5.

Порівняльний аналіз побудованих границь областей стійкості/нестійкості для рівняння Мат'є та за методикою Айнса, дозволяє зробити висновок, що області нестійкості за Айнсом повністю покривають області нестійкості на рис. 2, 3, при цьому нижні границі областей відтворюються достатньо добре, а верхні границі відтворюються з запасом, що призводить до збільшення розмірів областей нестійкості. Присутні також малі області, яких немає на рис. 2, 3.

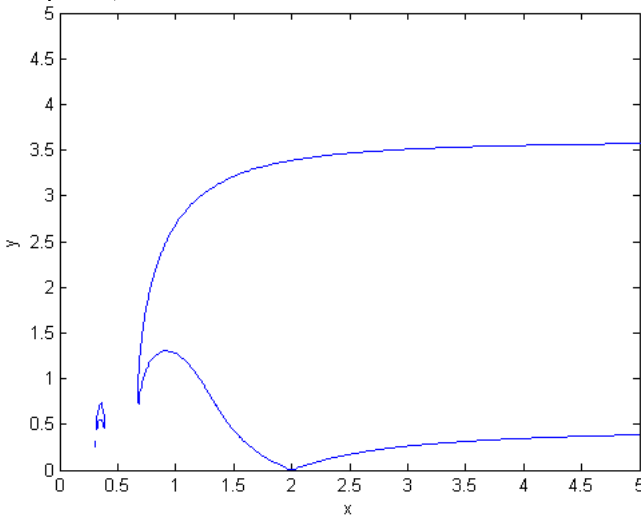


Рисунок 4 – Перша границя за Айнсом.

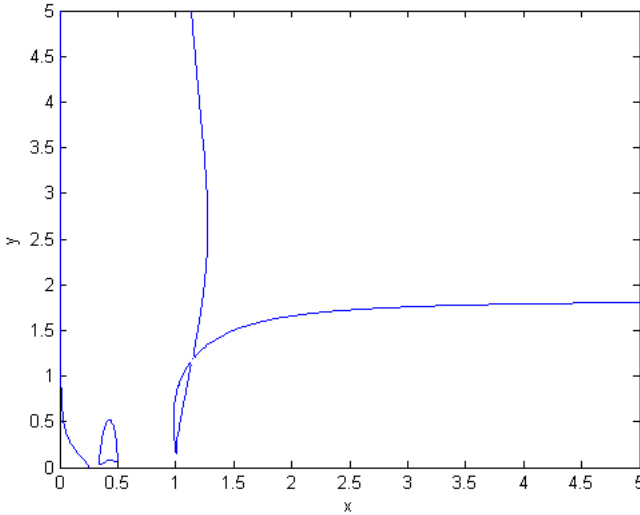


Рисунок 5 – Друга границя за Айнсом.

Для дослідження на **стійкість зв'язаної форми коливань** методом визначників Хілла друге рівняння системи (1) розв'яжемо відносно  $\theta$  за допомогою методу гармонічного балансу з урахуванням залежності (6). Представимо  $\theta = B \sin \omega \tau$ . Оскільки  $Y = \max \theta = |B|$ , то  $x(\tau) = A \cos 2\omega \tau$ , де  $A = (1 - \omega^2) / 2\omega^2$ . У результаті отримаємо:

$$\theta(\tau) = \sqrt{\frac{2(1 - \omega^2)}{R\omega^2}} \sin \omega \tau, \text{ де } R = \frac{4\varepsilon\alpha}{p^2 - 4}.$$

Підстановка в рівняння у варіаціях (8) залежностей  $\theta(\tau)$ ,  $x(\tau)$  та шуканих розв'язків, що відповідають границям стійкості/ нестійкості, у вигляді рядів Фур'є з невідомими коефіцієнтами та двома періодами: періоду  $T$

$$u = C_1 \cos 2\omega\tau + C_2 \cos 4\omega\tau, \quad v = N_1 \sin \omega\tau + N_2 \sin 3\omega\tau$$

та періоду  $2T$

$$u = C_3 \cos \omega\tau + C_4 \cos 2\omega\tau, \quad v = N_3 \sin \frac{\omega}{2}\tau + N_4 \sin \frac{3\omega}{2}\tau$$

приводить до систем однорідних лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів, умовою існування нетривіальних розв'язків яких є рівність нулю відповідних визначників Хілла:



$$\begin{vmatrix} p^2 - 4\omega^2 & 0 & -2\alpha\omega^2 B & 2\alpha\omega^2 B \\ 0 & p^2 - 16\omega^2 & 0 & -8\alpha\omega^2 B \\ -2\omega^2 B & 0 & 1 - \omega^2 - \frac{2\alpha\varepsilon}{p^2 - 4} B^2 \omega^2 & \frac{2\alpha\varepsilon}{p^2 - 4} B^2 \omega^2 \\ -2\omega^2 B & -8\omega^2 B & \frac{2\alpha\varepsilon}{p^2 - 4} B^2 \omega^2 & 1 - 9\omega^2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{8}\alpha\omega^2 B & \frac{1}{8}\alpha\omega^2 B \\ p^2 - \omega^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \frac{1}{4}\omega^2 & 0 \\ 0 & -2\omega^2 B & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

Застосування пакету Mathcad 2000 для розкриття цих визначників дає наступні залежності амплітуди  $A$  від частоти  $p$

для  $T$ -розв'язків:

$$-A \frac{16A^3 p^4 + 496A^2 p^4 - 2080A^2 p^2 - 25996Ap^2 - 393984A - 320p^4 + 6400p^2 - 20480}{(2A+1)^4} = 0,$$

та для  $2T$ -розв'язків:

$$\frac{0,25(p^2 - \frac{1}{(2A+1)}) \cdot A \cdot (10p^2 - 40)(1 - \frac{1}{4(2A+1)})}{(2A+1)^2} = 0.$$

Засобами пакету Matlab побудовані відповідні границі стійкості/нестійкості, зображені на рис.6, 7.

Отримано, що області нестійкості складаються з внутрішніх точок фігур, що утворені в результаті перетину граничних ліній. Показано, що в областях  $\{A > 0; |p| < 2\}$  та  $\{A < 0; |p| > 2\}$  коливання не можуть бути реалізовані. Таким чином, оскільки границі стійкості/нестійкості на рис.7 пролягають в області нереалізації коливань, то границі стійкості/нестійкості на рис.6 і є шуканими границями для  $\theta$ -форми.

Обидві форми коливань досліджені на стійкість також за допомогою чисельно-аналітичного критерію стійкості, що був запропонований у роботі [11], який має в основі класичне визначення стійкості за Ляпуновим [12]. Згідно з цим критерієм поточні значення збурень порівнюються з початковими значеннями.

Для  $x$ -форми критерій має вигляд:

$$\sqrt{(v(t) - v(0))^2} \leq \rho \sqrt{(v(0))^2}, \quad (14)$$

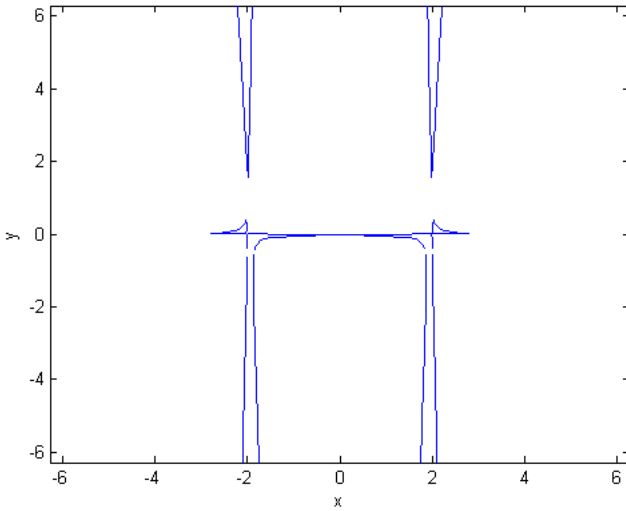


Рисунок 6 – Границя стійкості для T-розв’язку.

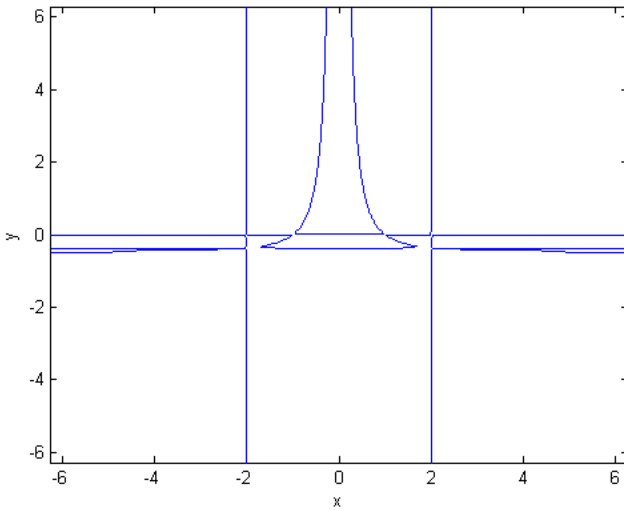


Рисунок 7 – Границя стійкості для 2T-розв’язку.

для  $\theta$  – форми критерій має вигляд:

$$\sqrt{(u(t) - u(0))^2 + (v(t) - v(0))^2} \leq \rho \sqrt{(u(0))^2 + (v(0))^2} . \quad (15)$$

Чисельне інтегрування методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі  $t \in [0, T]$  з кроком  $\Delta t = 0.01$  с рівнянь у варіаціях проведено при початкових

умовах  $u(0) = 0.01$  м,  $u'(0) = 0$  м/с,  $v(0) = 0.01$  рад,  $v'(0) = 0$  рад/с та  $\rho = 5$  на обраній сітці змінювання параметрів:  $0 \leq A \leq 2$ ,  $0 \leq p \leq 5$  з кроком по сітці  $\Delta A = 0.1$ ,  $\Delta p = 0.1$ . Розрахунок проводився в умовах  $t \in [0, T]$  до тих пір, поки границі областей стійкості/нестійкості не стабілізуються. Визначено, що границі областей стабілізуються вже при  $T = 50$  с. На рис.8, 9 отримані області нестійкості позначені значком \*.

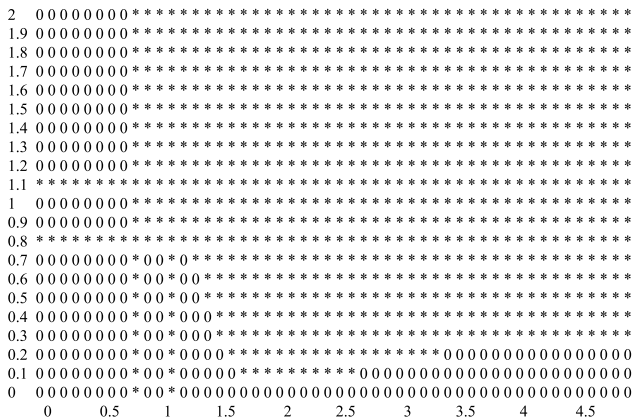


Рисунок 8 – Границя стійкості для  $x$  – форми.

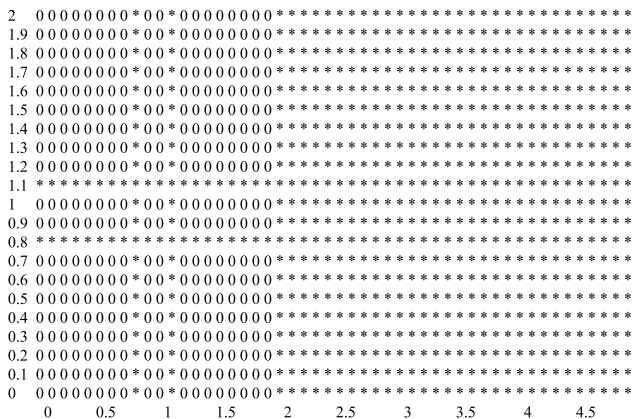


Рисунок 9 – Границя стійкості для  $\theta$  – форми.

Порівняння отриманих чисельних результатів сукупно з першою та другою границями стійкості/нестійкості для рівняння Матьє для  $x$  – форми та з границями стійкості/нестійкості, отриманих методом визначників Хілла для  $\theta$  – форми, дозволяє зробити такі висновки: чисельно-аналітичний експери-

мент за критеріями (14), (15) в цілому добре відтворює області стійкості/нестійкості для прямої форми, але не дозволяє побачити деякі особливості поведінки границь стійкості/нестійкості для зв'язаної форми, а саме те, що вертикаль  $p = 2$  є дотичною до границі стійкості/нестійкості на рис. 6. Для відтворення малих областей стійкості між вертикаллю  $p = 2$  та границею стійкості/нестійкості, очевидно, треба подрібнювати сітку параметрів  $A$  і  $p$ .

**Дослідження зриву форми вертикальних коливань.** При деяких значеннях параметрів відбувається зрив вертикальних коливань пружинно-маятникової системи в результаті скільки завгодно малих збурень по координаті  $\theta$ . Перехідний процес від форми вертикальних коливань до форми зв'язаних коливань був досліджений за допомогою методики Старжинського [5] для консервативних систем з використанням інтеграла енергії у формі:

$$2(K + V) = \dot{x}^2 + p^2 x^2 + \alpha \dot{\theta}^2 + \alpha \theta^2 - 2\alpha x \dot{\theta} = \mu^2.$$

Методика включає два наступні етапи.

На першому етапі до системи рівнянь (1) застосовується підстановка Ляпунова,  $x = (\rho/p) \sin \vartheta$ ,  $\dot{x} = \rho \cos \vartheta$ ,  $\theta = \rho z_1$ ,  $\dot{\theta} = \rho z_2$ , яка дозволяє понизити порядок системи на дві одиниці і отримати рівняння відносно малих відхилень по куту  $\theta$ :

$$p^2 \frac{d^2 \xi}{d\vartheta} + \xi = \frac{\mu}{(1 + \alpha \xi^2 + \alpha p^2 \xi'^2)^{1/2}} [\sin \vartheta (-p\xi + \alpha (\frac{2}{p} - p)\xi^3 + \alpha (p^3 - 6p)\xi\xi'^2) + \cos \vartheta (-p^3 \alpha \xi'^3 + 5\alpha p \xi' \xi'^2)] + O(\mu^2), \quad (15)$$

де  $\xi \equiv z_1$ ,  $\xi' \equiv \frac{d\xi}{d\vartheta}$ , а також рівняння для змінної  $\rho$ , фазового часу  $\vartheta$  та реального часу  $t$ :

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{3}} \mu + O(\mu^2), \quad \frac{d\vartheta}{dt} = 2 \pm \frac{1}{\sqrt{3}} (1 - \cos 2\vartheta) \mu + O(\mu^2),$$

$$t = \frac{1}{2} \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} (1 \mp \frac{1}{2\sqrt{3}} (1 - \cos \vartheta) \mu) d\vartheta. \quad (16)$$

Тривіальний розв'язок рівняння (10)  $\xi \equiv 0$  відповідає вертикальним коливанням  $x = Y \cos pt$  маси  $m + M$  на пружині з періодом  $T = 2\pi/p$ .

Застосування до (15) методу малого параметра з розкладенням розв'язку до членів порядку  $O(\mu^2)$  включно дозволяє відшукати «породжувальний» розв'язок

$$\xi_0 = \pm \sqrt{\frac{2}{\alpha}} \cos\left(\frac{\vartheta}{2} \mp \frac{\pi}{4}\right),$$

де «породжувальна» амплітуда знайдена з умов виключення вікових членів

при  $p = 2$ , коли кругові частоти у правій частині рівняння співпадають з частотою «породжувального» розв'язку:

$$\begin{cases} -1 - \alpha M_0^2 + 2\alpha N_0^2 = 0, \\ -1 - \alpha N_0^2 + 2\alpha M_0^2 = 0. \end{cases}$$

Були також отримані вирази для періоду коливань,  $T = 2T_{\text{вср}} \times (1 \mp (1/2\sqrt{3})\mu) + O(\mu^2)$ , та закону руху маятникової системи,

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{3}}{6} \mu \sin 2t, \\ \theta = \pm \frac{\sqrt{6\alpha}}{3\alpha} \mu \cos(t \mp \frac{\pi}{4}). \end{cases}$$

Визначено, що при зв'язаних коливаннях на долю вертикальних припадає  $\frac{1}{3}[1 + O(\mu^2)]$  енергії всього руху.

На другому етапі за допомогою підстановки Ван-дер-Поля,

$$\xi = a \cos\left(\frac{\vartheta}{2} + \varphi\right), \quad \frac{d\xi}{d\vartheta} = -\frac{1}{2} a \sin\left(\frac{\vartheta}{2} + \varphi\right),$$

рівняння (15) при  $p = 2$  розділяється на систему рівнянь першого порядку відносно амплітуди і фази, що повільно змінюються у часі:

$$\begin{cases} \frac{da}{d\vartheta} = \frac{\mu}{4} (1 + \alpha a^2)^{-1/2} [(2a + \alpha a^3) \sin \vartheta \sin(\vartheta + 2\varphi) + \frac{\alpha a^3}{2} \cos \vartheta + \\ \quad + \alpha a^3 \cos \vartheta \cos(\vartheta + 2\varphi) - \frac{3\alpha a^3}{2} \cos \vartheta \cos(2\vartheta + 4\varphi)], \\ \frac{d\varphi}{d\vartheta} = \frac{\mu}{4} (1 + \alpha a^2)^{-1/2} [(2 + \alpha a^2) \sin \vartheta + (2 + \alpha a^2) \sin \vartheta \cos(\vartheta + 2\varphi) + \\ \quad + 2\alpha a^2 \cos \vartheta \sin(\vartheta + 2\varphi) + \frac{3\alpha a^2}{2} \cos \vartheta \sin(2\vartheta + 4\varphi)]. \end{cases} \quad (17)$$

Усреднюючи (17) по незалежному змінному  $\vartheta$ , що явно входить у рівняння, отримаємо скорочені рівняння Ван-дер-Поля і їх перший інтеграл. Наближене інтегрування цих рівнянь у припущенні, що амплітуда коливань не перевершує «породжувальної» амплітуди, дає наближений закон змінення амплітуди

$$a = \left( \frac{2}{\sqrt{\alpha}} b_0 \exp\left(\frac{\mu\vartheta}{4}\right) \right) / \left| 1 - b_0^2 \exp\left(\frac{\mu\vartheta}{2}\right) \right|, \quad (18)$$

де  $b_0 = \left( \sqrt{\frac{1}{\alpha} + a_0^2} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) / a_0$ , та момент появи «породжувальної» амплітуди для фазового часу

$$\tilde{g} = \frac{4}{\mu} \ln \left[ a_0 \left( \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \right) / \left( \sqrt{\frac{1}{\alpha} + a_0^2} - \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \right) \right]. \quad (19)$$

Зі співвідношень (16) отримаємо таку залежність для реального часу:

$$\tilde{t} = \frac{g}{2} \left( 1 \mp \frac{\mu}{2\sqrt{3}} \right) + O(\mu^2). \quad (20)$$

Зазначимо, що значення реальної амплітуди по координаті  $\theta$  можна обчислити, якщо відоме значення  $a$  для відповідного моменту часу,

$$A_\theta = \rho a = \frac{\mu a}{\sqrt{1 + \alpha a^2}},$$

а час появи максимальної амплітуди можна оцінити з (20), поклавши

$$\tilde{g}_{\max} = \frac{2 \ln(1/b_0^2)}{\mu}.$$

На рис. 10 зображений наближений закон змінення амплітуди (18) при  $a_0 = 0,01$ ,  $\mu = 0,1000025$ ,  $\alpha = 0,5$ , обчислений для таких початкових умов:

$$x(0) = 0,05, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \theta(0) = 0,001, \quad \dot{\theta}(0) = 0.$$

Чисельне інтегрування *методом Рунге-Кутта 4-го порядку* на інтервалі  $\mathcal{G} \in [0, 300]$  с з кроком  $h = 0,01$  с системи рівнянь відносно амплітуди та фази

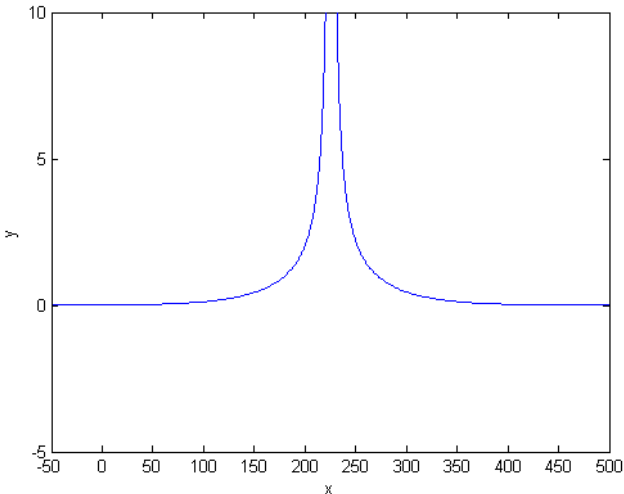


Рисунок 10 – Наближений закон  $a(\mathcal{G})$ .

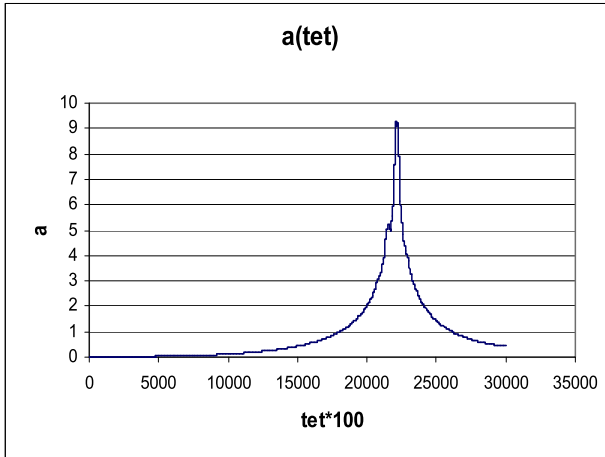


Рисунок 11 – Залежність  $a(\vartheta)$ .

при початкових умовах  $a_0 = 0,01$ ,  $\varphi_0 = 0,0001$  (рис. 11) показало добре співпадання з отриманими аналітичними результатами при амплітудах, що не перевершують «породжувальну» амплітуду. При цьому значення «породжувальної» амплітуди  $a = 2$  та максимальна амплітуда  $a_{\max} = 9,1$ , досягаються відповідно при значеннях фазового часу  $\vartheta = 199.452$  та  $\vartheta = 225.790$ , обчислених з (19). У перерахунку на амплітуду по координаті  $\theta$  та на час  $t$  згідно з (20) отримано, що «породжувальна» амплітуда  $A_\theta = 0.1155$  і максимальна амплітуда  $A_{\theta \max} = 0.1397$  досягаються відповідно при  $t = 102.60$  с,  $t_{\max} = 116.15$  с. Достовірність цих результатів підтверджується чисельним ін-

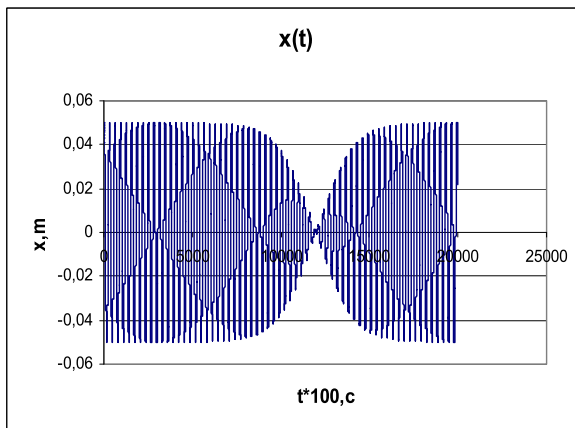


Рисунок 12 – Наближений закон  $a(\vartheta)$ .

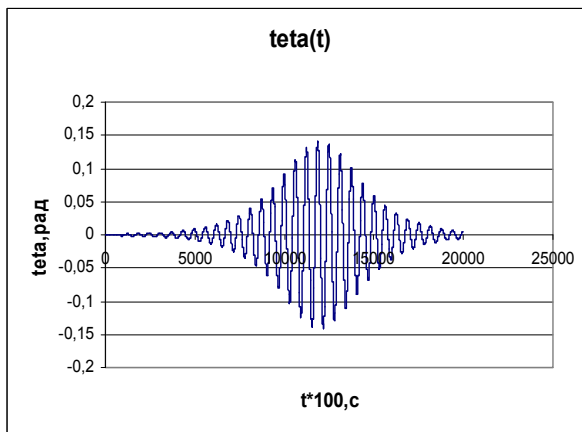


Рисунок 13 – Залежність  $\theta(t)$ .

тегруванням системи (1) методом Рунге-Кутта 4-го порядку на інтервалі  $t \in [0, 200]c$  (рис. 12). Залежності на рис. 12, 13 сукупно демонструють процес «перекачки» енергії у системі в області внутрішнього резонансу.

**Висновки.** Таким чином, уточнено результати, що приведені в роботі [8], відповідні розв'язки досліджені на стійкість, досліджено умови зриву вертикальних коливань та процес переходу до форми зв'язаних коливань пружинно-маятникової системи. Отримані результати є актуальними для розробки віброгасників нелінійних коливань в механічних системах.

**Список літератури:** 1. *Rosenberg R.M.* On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom// *R.M. Rosenberg* // – Adv. Appl. Mech. 1966. Vol.9. p. 156- 243. 2. *Vakakis A.F., Manevitch L.I., Mikhlin Yu.V., Pilipchuk V.N., Zevin A.A.*, 1996, Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems, Wiley Interscience, New York. 3. *Аврамов К.В., Михлин Ю.В.* Нелинейная Динамика Упругих Систем, 2010, Регулярная и хаотическая динамика, Москва-Ижевск. 4. *Витт А. А., Горелик Г. С.* Колебания упругого маятника как пример двух параметрически связанных линейных систем// Журн. техн. Физики. – 1933. - т. 3, № 2-3, С. 294 – 307. 5. *Старжинский В.М.* Прикладные методы нелинейных колебаний// *В.М. Старжинский* - М: Наука, 1977. – 254 с. 6. *Nayfeh A.H., Mook D.* Nonlinear oscillations. New York: Wiley. – 1984, 704 p. 7. *Vakakis AF, Gendelman OV, Bergman LA, McFarland DM, Kerschen G, Lee YS* (2008) *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, Springer Science, Series “Solid mechanics and its applications”, Vol. 156. 8. *Wang F.* Nonlinear Normal Modes and Their Bifurcations for an Inertially-Coupled Nonlinear Conservative System/ *Wang F., Bajaj A., Kamiya K.*//Purdue university, 2005.- 54 p. 9. *Хаяси Т.* Нелинейные колебания в физических системах//*Т. Хаяси.* – М.: Мир,1968. – 432 с. 10. *Ince E.L.* Ordinary differential equations// *E.L. Ince.* – Longmans Green, London, 1926. 11. *Mikhlin Yu. V.* Lyapunov definition and stability of regular or chaotic vibration modes in systems with several equilibrium positions / *Yu. Mikhlin, T. Shmatko, G. Manucharyan.*// Computers and Structures. – 2004. – V.82.-P.2733-2742. 12. *Ляпунов А.М.* Общая задача об устойчивости движения// *А.М. Ляпунов* – Харьков, 1892. Собр. соч., т.II, 1956, с. 7 – 263.

Надійшла до редколегії 10.05.2012