

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;
Д.И. БОГДАН, канд. техн. наук, ХНАДУ, Харьков

НАЧАЛЬНЫЙ ЭТАП ДЕФОРМИРОВАНИЯ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ

Рассматривается колебание упругого полупространства в случае заданного на его поверхности кинематического воздействия. Используется осесимметричная постановка второй краевой задачи теории упругости. Решение строится в виде разложения в ряд по функциям Бесселя от радиальной координаты. Рассмотрен численный пример нахождения начальных перемещений на глубине полупространства при известном кинематическом воздействии на поверхности.

Ключевые слова: полупространство, кинематическое воздействие, система интегральных уравнений, вторая краевая задача.

Введение. В настоящее время необходимо совершенствовать методики расчета деформированных систем под действием нестационарных нагрузок. Совершенствование методов расчета такого рода механических систем состоит, в частности, в развитии способов решения для различных нестационарных задач теории упругости. В этой статье рассмотрено решение *прямой задачи теории упругости* для полупространства, в случае задания на его поверхности перемещений. Решение обуславливает рассмотрение начального этапа деформирования.

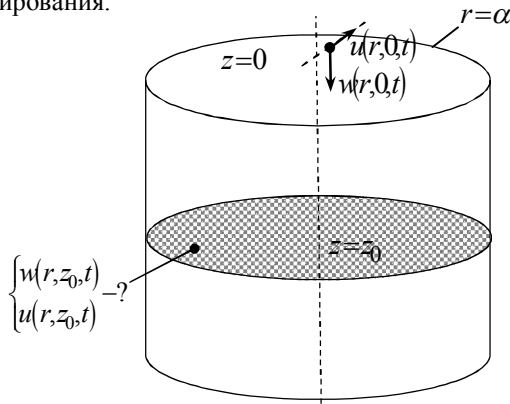


Рис. 1.– Полубесконечный цилиндр.

Постановка задачи. Рассматривается упругое полупространство, часть которого представляет полубесконечный цилиндр (рис.1). На границе полупространства задан вектор перемещения \mathbf{W} . Найти будем зависимости

© Е.Г. Янютин, Д.И. Богдан, 2012

перемещений от времени на некоторой глубине полупространства [4].

Рассмотрим осесимметричную постановку задачи в предположении осевой симметрии граничных условий.

Для решения примем следующие *уравнения движения* точек упругого полупространства, форма записи которых была использована В.М. Сеймовым [4]:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \beta^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \right) + (1 - \beta^2) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial z} \right) = \beta^2 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}; \\ -\frac{u}{r^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + (1 - \beta^2) \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial z} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \end{cases} \quad (1)$$

где $r = \bar{r}/\alpha$, $z = \bar{z}/\alpha$ – безразмерные переменные; \bar{r} и \bar{z} – действительные переменные; α – параметр, имеющий размерность длины; t – безразмерное время; w – функция изменения нормальных перемещений во времени; u – закон изменения касательных перемещений во времени;

$$\beta = \sqrt{(1 - 2\nu_0)/(2(1 - \nu_0))}.$$

Будем предполагать, что на границе полупространства задаваемые перемещения могут быть отличными от нуля только при $0 \leq r \leq \Delta$, где $\Delta < 1$.

Порядок решения. Введем потенциалы $\varphi(r, z, t)$ и $\psi(r, z, t)$, определяемые следующими выражениями [4]:

$$\begin{cases} w(r, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}; & u(r, z, t) = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial z}, \end{cases} \quad (2)$$

Подставим выражения для перемещений (2) в уравнения (1), которые после применения к ним преобразования Лапласа по времени будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} - \beta^2 s^2 \varphi = 0; & \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - s^2 \psi = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Решать систему дифференциальных уравнений в частных производных (3) будем с использованием разложений в ряды по *функциям Бесселя* [1]. Поэтому представим решение в виде

$$\varphi(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n(z, s) J_0(\lambda_n r), \quad \psi(r, z, s) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n(z, s) J_0(\lambda_n r), \quad (4)$$

где λ_n – корни уравнения $J_0(x) = 0$, расположенные в порядке возрастания; $A_n(z, s)$ и $B_n(z, s)$ – неизвестные коэффициенты разложения.

После подстановки $\varphi(r, z, s), \psi(r, z, s)$ в систему (3) получим выражения

для коэффициентов разложения в виде:

$$A_k(z, s) = C_k(s) \frac{e^{-z\sqrt{\lambda_k^2 + \beta^2 s^2}}}{\sqrt{\lambda_k^2 + \beta^2 s^2}}, B_k(z, s) = D_k(s) \frac{e^{-z\sqrt{\lambda_k^2 + s^2}}}{\sqrt{\lambda_k^2 + s^2}}, \quad (5)$$

где $C_k(s)$ и $D_k(s)$ – неизвестные функции параметра s .

Коэффициенты $C_k(t)$ и $D_k(t)$ будем находить из заданных граничных условий на границе полупространства, а именно

$$w(r, 0, t) = w_0(r, t) \text{ и } u(r, 0, t) = u_0(r, t).$$

Здесь $w_0(r, t)$ и $u_0(r, t)$ являются заданными функциями. Для этого запишем выражения для потенциалов в пространстве оригиналов, выполняя обратное преобразование Лапласа для формул (5) [3]. В результате получим:

$$\begin{aligned} \varphi(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} H(t - z\beta) \int_0^{t-z\beta} C_k(\tau) \frac{1}{\beta} J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta} \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2 \beta^2}\right) d\tau J_0(\lambda_k r), \\ \psi(r, z, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} H(t - z) \int_0^{t-z} D_k(\tau) J_0\left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}\right) d\tau J_0(\lambda_k r). \end{aligned} \quad (6)$$

Далее запишем выражения для нормальных и касательных перемещений на границе полупространства, учтя упоминаемые ранее граничные условия:

$$\begin{aligned} w_0(r, t) &= \frac{-1}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) J_0(\lambda_k r) - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t D_k(\tau) J_0(\lambda_k(t-\tau)) d\tau J_0(\lambda_k r), \\ u_0(r, t) &= \frac{-1}{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\lambda_k} C_k(\tau) J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t-\tau)\right) d\tau J_1(\lambda_k r) + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \lambda_k (-J_1(\lambda_k r)). \end{aligned} \quad (7)$$

Представим заданные граничные условия $w_0(r, t)$ и $u_0(r, t)$, входящие в соотношения (7), на поверхности полупространства также в виде разложений по функциям Бесселя. Отметим, что в выражении для касательных перемещений составляющие правой части раскладываются в ряды Дини [1]. После выполнения указанных операций соотношения (7) будут иметь вид:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} w_{0k}(t) J_0(\lambda_k r) &= -\alpha^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} C_k(t) J_0(\lambda_k r) - \\ &\quad -\alpha^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t D_k(\tau) J_0(\lambda_k(t-\tau)) d\tau J_0(\lambda_k r), \\ \sum_{k=1}^{\infty} u_{0k}(t) J_1(\lambda_k r) &= -(\alpha\beta)^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t \frac{1}{\lambda_k} C_k(\tau) J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t-\tau)\right) d\tau J_1(\lambda_k r) + \\ &\quad + \alpha^{-2} \sum_{k=1}^{\infty} D_k(t) \lambda_k (-J_1(\lambda_k r)). \end{aligned} \quad (8)$$

Учитывая свойство ортогональности рядов Фурье-Бесселя и Дини, запишем систему уравнений для коэффициентов $C_n(t)$ и $D_n(t)$, которые являются функциями времени и определение которых по существу является основой решения прямой задачи

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} C_k(t) - \frac{1}{\alpha^2} \int_0^t D_k(\tau) J_0(\lambda_k(t-\tau)) d\tau &= w_{0n}(t), \\ -\frac{1}{\alpha\beta\lambda_k} \int_0^t C_k(\tau) J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t-\tau)\right) d\tau - \frac{\lambda_k}{\alpha^2} D_k(t) &= u_{0k}(t); \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Система (9) представляет собой связанную систему интегральных уравнений для функций $C_k(t)$ и $D_k(t)$, которую будем решать численным способом. Перейдем к дискретному времени [5], введение которого целесообразно для дальнейшего численного решения уравнений (9):

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{\alpha} C_k^m - \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^m D_k^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0(\lambda_k(t_m - \tau)) d\tau &= w_k^m, \\ -\frac{1}{\alpha\beta\lambda_k} \sum_{i=1}^m C_k^i \int_{(i-1)\Delta t}^{i\Delta t} J_0\left(\frac{\lambda_k}{\beta}(t_m - \tau)\right) d\tau - \frac{\lambda_k}{\alpha^2} D_k^m &= u_k^m. \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Матричная форма записи уравнений (10) следующая:

$$\begin{cases} CM_1 - DM_2 = W, \\ CM_3 - DM_4 = U. \end{cases} \quad (11)$$

Входящие в выражения (11) матрицы являются аналогами величин, которые содержатся в уравнениях (10).

Решая систему (11) методом Крамера, находим неизвестные коэффициенты $C_n(t)$ и $D_n(t)$, в интересующий исследователя момент времени, зная которые можно рассчитать закон изменения нормальных и касательных перемещений в произвольной точке полупространства. Для этого приведем формулы, которые вытекают из соотношений (2):

$$\begin{aligned} w(r, z, t) &= -\frac{H(t-z\beta)}{\alpha} \sum_{k=1}^{\infty} J_0(\lambda_k r) (-\beta C_k(t-z\beta)) + \\ &+ \int_0^{t-z\beta} C_k(\tau) \left(\frac{z\beta\lambda_k J_1\left(\lambda_k \beta^{-1} \left(\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2\beta^2} \right)\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2\beta^2}} \right) d\tau - \\ &- \frac{H(t-z)}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^2 (-J_0(\lambda_k r)) \int_0^{t-z} D_k(\tau) J_0\left(\lambda_k \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}\right) d\tau, \end{aligned} \quad (12)$$

$$u(r, z, t) = -\frac{H(t-z\beta)}{\alpha\beta} \sum_{k=1}^{\infty} J_1(\lambda_k r) \int_0^{t-z\beta} \frac{C_k(\tau)}{\lambda_k} J_0\left(\lambda_k \beta^{-1} \sqrt{(t-\tau)^2 - z^2 \beta^2}\right) d\tau +$$

$$+ \frac{H(t-z)}{\alpha^2} \sum_{k=1}^{\infty} (-\lambda_k J_1(\lambda_k r)) \left(D_k(t-z) + \int_0^{t-z} D_k(\tau) \frac{z \lambda_k J_1\left(\lambda_k \left(\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}\right)\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - z^2}} d\tau \right). \quad (13)$$

Укажем характерную особенность полученного решения, состоящую в том, что оно определяет только начальную реакцию упругого полупространства на кинематическое воздействие, приложенное на его поверхности при $0 \leq r < 1$. Построенное решение в рядах Фурье-Бесселя таково, что при $r = 1$ нормальные перемещения равны нулю для всех значений z и t , поскольку входящие в решение величины λ_k являются корнями уравнения

$$J_0(\lambda_k) = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \dots).$$

Это является некорректным допущением с точки зрения физического содержания распределения перемещений в упругом полупространстве. Данное обстоятельство существенно сужает область применимости решения.

Учитывая, что рассматриваются сугубо нестационарные деформационные процессы, укажем, что решение будет применимым в полубесконечном цилиндре

$$0 < r < 1, 0 < z < +\infty \text{ для времени } t < T,$$

где T – момент времени достижения продольной волны деформации цилиндрической поверхности $r = 1$.

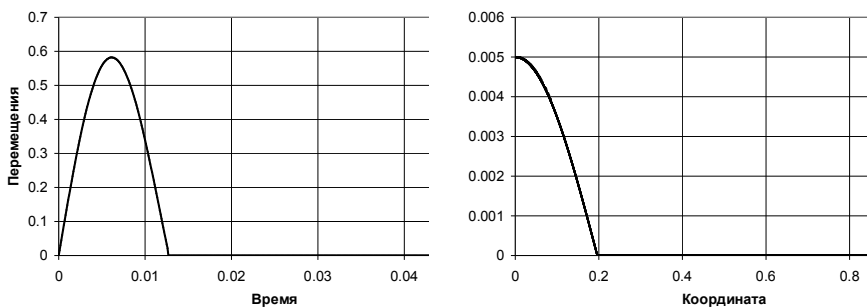
Можно расширить область применимости решения, отметив, что в точке с координатами (r, z) оно будет еще физически верным до момента времени

$$T \leq T_0,$$

где T_0 – момент прихода «отраженной» продольной волны деформации от стенки упомянутого цилиндра $r = 1$.

Здесь под словами «приход отраженной продольной волны деформации» понимается условный физический процесс, который может иметь место в рассматриваемой механической системе. Геометрическое описание области, в которой справедливо построенное решение, может быть представлено более подробно для конкретных вариантов геометрического распределения, задаваемых граничных кинематических воздействий.

Результаты моделирования. Используя найденные зависимости (11) и (12), в качестве примера выполним анализ закона изменения перемещений во времени для упругого полупространства при значениях $z \neq 0$. Граничных условия заданы на поверхности в форме функций безразмерных нормальных перемещений от времени и радиальной координаты (они представлены на рис. 2).



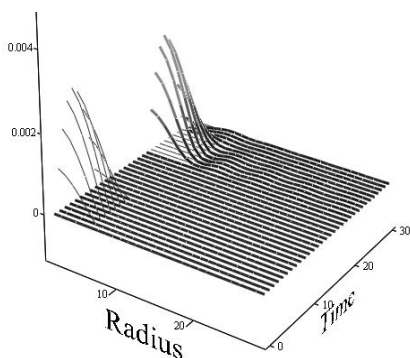
a

б

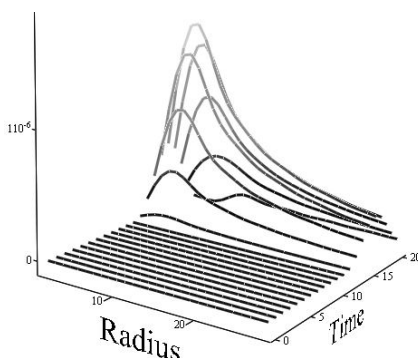
Рис. 2 – Временное (*a*) и пространственное (*б*) распределения нормального граничного перемещения $w_0(r, t)$.

На рис. 2, *a* изображено изменение перемещений во времени, а на рис. 2, *б* – распределения перемещений по поверхности полупространства вдоль координаты r . Для выявления влияния нормальной составляющей граничного вектора перемещения на компоненты вектора перемещения при $z \neq 0$ касательные перемещения на поверхности полупространства принимаются равными нулю. В результате численных расчетов получаем набор кривых, описывающих поведение различных точек полупространства.

Приведем результаты для сечения $z = 0,04$. На рис. 3 они представлены в виде набора кривых, причем вдоль одной из осей откладывается время, а вдоль другой – радиус точки, в которой эти функции вычисляются.



a – изменение нормальных перемещений во времени.



б – изменение касательных перемещений во времени.

Рис.3 – Изменение перемещений на глубине полупространства при $z = 0,04$.

На рис.3, *a* приводятся нормальные перемещения w , а на рис.3, *б* – касательные u .

Перемещения на границе показаны тонкими линиями, а при $z = 0,04$ – более толстыми.

На графиках отчетливо просматривается сдвигка во времени, которая характеризует волны деформации, развивающиеся в глубине упругого полупространства.

Как следует из графиков рис.3, *б*, наличие нормальных перемещений на поверхности полупространства (где $z = 0$) вызывает возникновение при $z \neq 0$ касательных перемещений даже в случае их отсутствия на границе, хотя их значения значительно меньше, чем значения нормальных перемещений.

Список литературы: 1. *Ватсон Г.Н.* Теория Бесселевых функций // М.: Изд. иностр. лит. – 1949. – 799 с. 2. *Власов В. З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / *В. З. Власов, Н.И.Леонтьев.* // М.: Физматгиз, 1960. – 492 с. 3. *Дидкин В. А.* Операционное исчисление / *В. А. Дидкин, А. П. Прудников* // М.: Высшая школа, 1966. – 405 с. 4. *Сеймов В.М.* Динамические контактные задачи. – К.: Наук. думка, 1976. – 224 с. 5. *Янютин Е. Г.* Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций / *Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский.* – Харьков: Изд-во ХАДИ, 2001. – 184 с.

Поступила в редколлегию 16.10.12

УДК 539.3

Начальный этап деформирования упругого полупространства при кинематическом воздействии / Е.Г. Янютин, Д.И. Богдан // Вісник НТУ «ХП». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХП». – 2012. – 54(960). – С.202-208. – Бібліогр.: 5 назв.

Розглянуто коливання пружного півпростору у випадку, коли на його поверхні задано зміну переміщень у часі. Використано вісесиметричну постановку другої крайової задачі. Розв'язок знаходиться у вигляді розкладання в ряд за функціями Бесселя від радіальної координати. Розглянуто чисельний приклад знаходження переміщень на глибині півпростору у випадку відомих переміщень на поверхні.

Ключові слова: півпростір, кинематичне збурення, система інтегральних рівнянь, друга крайова задача.

The elastic oscillations of a half-space in case of the kinematics influence set on its surface are described in article. Axisymmetric statement of the second boundary value problem is considered. The problem is solved by using of an expansion in a series on cylindrical functions. The numerical example on finding of moving on depth of a half-space is considered at known kinematics impact on surfaces.

Key words: half, the kinematics effects, the system of integral equations of the second boundary value problem.