

Е.Г. ЯНЮТИН, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;
П.А. ЕГОРОВ, аспирант, ХНАДУ, Харьков

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, НЕСУЩЕЙ НЕСКОЛЬКО СОСРЕДОТОЧЕННЫХ МАСС

Механическая система состоит из закрепленной по контуру прямоугольной мембраны и присоединенных масс. При решении прямой задачи исследуются нестационарные колебания мембраны под действием известной импульсной распределенной нагрузки. При решении обратной задачи по известным перемещениям некоторой точки мембраны идентифицируется неизвестная нагрузка, которая вызвала колебания системы. Решение задач сводится к анализу систем интегральных уравнений, которые решаются численно. В случае построения решения обратной задачи используется метод регуляризации А.Н.Тихонова.

Ключевые слова: мембрана, сосредоточенная масса, распределенная нагрузка, контактная сила, перемещение, интегральное уравнение, идентификация, метод регуляризации.

Введение. В настоящее время существует необходимость построения математических моделей динамических систем, которые состоят из большого количества элементов. Часто учет всех этих элементов не представляется возможным. В случае, когда размерами элементов можно пренебречь, удобно выделять основной объект и исследовать его на основе некоторой теории, а инерционное воздействие контактирующих с ним объектов моделировать при помощи присоединенных масс. Рассматривая такую систему, воспользуемся упомянутым подходом и представим ее в виде мембраны с присоединенными массами.

Свободные колебания мембраны рассмотрены в [1]. Опираясь на [1], в [2] были получены решения задач о нестационарных колебаниях круглой и прямоугольной мембран, не несущих массы. Причем в [2] были рассмотрены постановки и решения как прямых, так и обратных задач. К настоящему же времени способы определения колебаний мембраны и способы идентификации неизвестной возмущающей нагрузки, действующей на мембрану, на которой находятся несколько сосредоточенных масс, развиты недостаточно хорошо.

Постановка задачи. Исследуемая система состоит из прямоугольной закрепленной по контуру мембраны, несущей на своей поверхности сосредоточенные массы. В данной статье для простоты описания решения рассмотрим мембрану с двумя присоединенными массами. На мембрану действует поперечная распределенная нагрузка, вызывающая колебания системы. В рамках решения *прямой задачи* необходимо определить перемещения точек

исследуемой системы с течением времени.

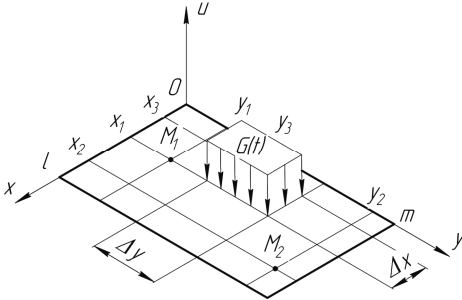


Рис. 1 – Схема нагружения мембраны.

известного двумерного волнового уравнения свободных колебаний мембраны [1]. Запишем упомянутое уравнение с учетом воздействия возмущающей нагрузки и присоединения к поверхности мембраны сосредоточенных масс:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + R_1(x, y, t) + R_2(x, y, t) + G(x, y, t), \quad (1)$$

где a – скорость распространения волн деформации,

$$R_1(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_1) \delta(y - y_1) R_1(t), \quad R_2(x, y, t) = \frac{1}{\rho} \delta(x - x_2) \delta(y - y_2) R_2(t)$$

– контактные силы, возникающие от действия масс, сосредоточенных в точках с координатами x_1, y_1 и x_2, y_2 соответственно,

$$G(x, y, t) = \frac{1}{\rho} (H(x - x_3) - H(x - x_3 - \Delta x)) H((y - y_3) - H(y - y_3 - \Delta y)) G(t)$$

– внешняя возмущающая нагрузка, распределенная по поверхности площадью $\Delta x \cdot \Delta y$, где ρ – поверхностная плотность материала, $\delta(z)$ – дельта-функция Дирака.

Воздействие присоединенных масс было заменено эквивалентными контактными силами при условном отсоединении масс от поверхности мембраны в предположении равенства перемещений масс перемещениям точек мембраны, соответствующих расположениям этих масс, то есть

$$\begin{aligned} u_{M_1}(t) &= u(x_1, y_1, t); \\ u_{M_2}(t) &= u(x_2, y_2, t). \end{aligned} \quad (2)$$

Задачу математической физики, включающую дифференциальное уравнение (1), решаем с учетом нулевых краевых условий (отвечающих закреплению границы мембраны) посредством разложения искомой функции $u(x, y, t)$ в двойные ряды Фурье по тригонометрическим функциям [2,3], то есть

В рамках решения *обратной задачи* необходимо определить неизвестное возмущающее воздействие, вызвавшее колебания системы, по известным перемещениям заданной точки мембраны.

Решение прямой задачи.

Поведение закрепленной по контуру прямоугольной мембраны будем рассматривать на основе

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{k,n}(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (3)$$

Решение двумерного волнового уравнения (1), учитывающее нулевые начальные условия, получим в виде:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m} \right), \quad (4)$$

где

$$C_{1k,n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y_1}{m}, \quad C_{2k,n} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{4}{l \cdot m} \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y_2}{m}, \\ C_{3k,n} = \frac{1}{\rho} \frac{4}{k \cdot n \cdot \pi^2} \left(\cos \frac{k\pi x_3}{l} - \cos \frac{k\pi(x_3 + \Delta x)}{l} \right) \cdot \left(\cos \frac{n\pi y_3}{m} - \cos \frac{n\pi(y_3 + \Delta y)}{m} \right), \\ \lambda_{k,n} = a \cdot \pi \sqrt{k^2 / l^2 + n^2 / m^2}.$$

Перемещения, условно отсоединенной от мембраны, массы определяют из дифференциального уравнения, составленного на основе *второго закона Ньютона*:

$$M \cdot u_M''(t) = -R(t). \quad (5)$$

Решение уравнения (5) запишем в виде:

$$u_M(t) = -\frac{1}{M} \cdot \int_0^t (t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (6)$$

На основе равенств (2) получаем систему интегральных соотношений для функций $R_1(t)$ и $R_2(t)$ следующего вида:

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{M_1} \int_0^t R_1(\tau)(t-\tau) d\tau &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ &\times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \left. \right) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m}; \\ -\frac{1}{M_2} \int_0^t R_2(\tau)(t-\tau) d\tau &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ &\times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \left. \right) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m}. \end{aligned} \right. \quad (7)$$

Уравнения *Вольтерра*, входящие в систему (7), будем решать числен-

ным методом, который основан на замене интегралов конечными суммами, то есть применим один из вариантов квадратурных формул. В результате получим:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{p=1}^j (R_{1p}) \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\frac{t_j - \tau}{M_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) d\tau + \\ & + \sum_{p=1}^j (R_{2p}) \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) \right) d\tau = \\ & = - \sum_{p=1}^j (G_p) \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) \right) d\tau; \\ & \sum_{p=1}^j (R_{1p}) \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau)) \right) \right) d\tau + \\ & + \sum_{p=1}^j (R_{2p}) \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\frac{t - \tau}{M_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t - \tau)) \right) d\tau = \\ & = - \sum_{p=1}^j (G_p) \int_{(p-1)\Delta t}^{p\Delta t} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t_j - \tau)) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) \right) d\tau. \end{aligned} \right. \quad (8)$$

Представим систему уравнений (8) в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_{11} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{12} = \mathbf{f}_1; \\ \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_{21} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{22} = \mathbf{f}_2. \end{cases} \quad (9)$$

Решение системы интегральных уравнений будем искать при помощи метода Крамера:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{f}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}}; \quad \mathbf{R}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{f}_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{vmatrix}}. \quad (10)$$

При известных величинах, входящих в уравнение (4), можно рассчитать значения прогибов в любой точке мембраны с течением времени.

В качестве примера рассмотрим такие исходные данные:

поверхностная плотность материала мембраны $\rho = 3.6 \text{ кг/м}^2$;

скорость распространения волн деформации $a = 30 \text{ м/с}$;

габариты мембраны $l = 0.6 \text{ м}$, $m = 0.4 \text{ м}$;

величины присоединенных масс

$M_1 = 1 \text{ кг}$ ($x_1 = 0.1 \text{ м}$, $y_1 = 0.1 \text{ м}$), $M_2 = 5 \text{ кг}$ ($x_2 = 0.2 \text{ м}$, $y_2 = 0.2 \text{ м}$);

интенсивность возмущающей нагрузки

$$q = 100 \text{ Н/м}^2 \quad (x_3 = 0.3 \text{ м}, y_3 = 0.2 \text{ м}, \Delta x = 0.1 \text{ м}, \Delta y = 0.1 \text{ м}).$$

Нагрузка во времени действует по закону «синуса» с циклической частотой колебаний $\omega_0 = 100 \text{ с}^{-1}$ в течение одного полупериода. Необходимое число членов ряда в рядах Фурье определялось на основе численного эксперимента по анализу сходимости соответствующих рядов.

На рис.2 представлено изменение во времени прогиба в 3 точках мембраны.

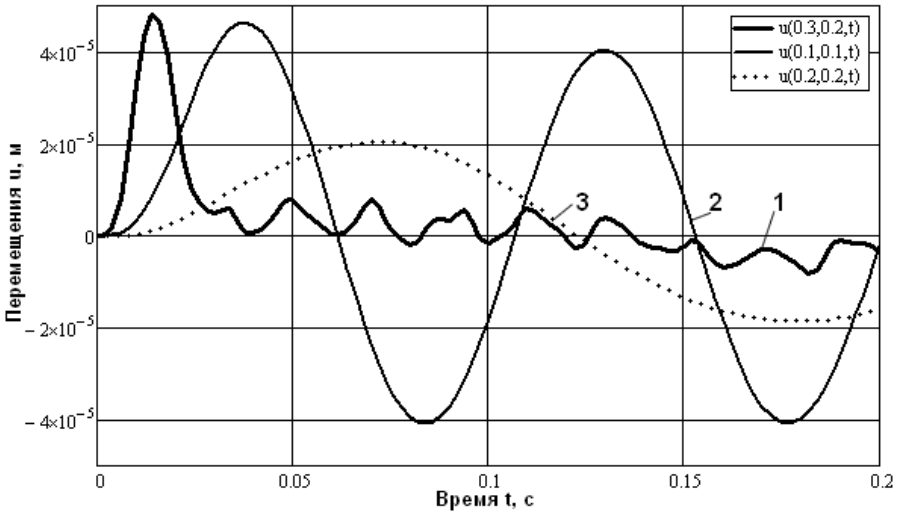


Рис.2 – Графики колебаний точек мембраны при наличии двух сосредоточенных масс.

Кривая 1 соответствует точке, принадлежащей области приложения нагрузки, эта же точка является геометрическим центром мембраны,

$$\text{координаты } x_3 = 0.3 \text{ м}, y_3 = 0.2 \text{ м}.$$

Кривая 2 отвечает точке расположения сосредоточенной массы $M_1 = 1 \text{ кг}$,

$$\text{координаты } x_1 = 0.1 \text{ м}, y_1 = 0.1 \text{ м},$$

а кривая 3 – точке расположения сосредоточенной массы $M_2 = 5 \text{ кг}$,

$$\text{координаты } x_2 = 0.2 \text{ м}, y_2 = 0.2 \text{ м}.$$

Решение обратной задачи. Обратная задача состоит в определении неизвестной возмущающей нагрузки по известным перемещениям некоторой точки мембраны, которые можно определить на основе физического или численного эксперимента. Для решения задачи необходимо решить систему ин-

тегральных уравнений следующего вида:

$$\left\{ \begin{aligned} & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_2(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \right) \sin \frac{k\pi x_e}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y_e}{m} \right) = u_e(t); \\ & \int_0^t R_1(\tau) \left(\frac{t-\tau}{M_1} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) \right) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \Big) d\tau + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m} \right) = 0; \\ & \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) + \\ & + \int_0^t R_2(\tau) \left(\frac{t-\tau}{M_2} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) d\tau + \\ & + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \cdot \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m} \right) = 0. \end{aligned} \right. \quad (11)$$

Первое уравнение системы (11) определяет перемещение $u_e(t)$ некоторой точки мембраны, которое при решении обратной задачи принимается, как известное. Второе и третье уравнения составлены на основе равенства перемещений массы перемещениям точки мембраны, соответствующей расположению этой массы.

Полученную систему будем решать численно, для чего используем замену интегралов конечными суммами [3]. Представляя систему уравнений (11) в матричном виде с квадратными матрицами \mathbf{A}_{ij} порядка m , получим:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{13} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{u}_e; \\ \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{23} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}; \\ \mathbf{A}_{31} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{32} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{33} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

Решение системы уравнений (12) будем искать при помощи метода Крамера с применением метода регуляризации А.Н.Тихонова [4]. Упомяну-

тое решение запишем в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_1; \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_2; \\ \mathbf{G} = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_3. \end{cases} \quad (13)$$

где $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ – квадратные блочные определители матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_e & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{u}_e & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{u}_e \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{0} \end{pmatrix};$$

α – параметр регуляризации; \mathbf{C} – трехдиагональная матрица, вид которой представлен в [2].

В качестве примера исходных данных для проведения вычислительного эксперимента примем такие же данные, как и в случае решения прямой задачи, за исключением возмущающей нагрузки. График изменения перемещений, по которым идентифицировалась возмущающая нагрузка, приведен на рис.3. Кривая рис.3 получена при решении соответствующей прямой задачи.

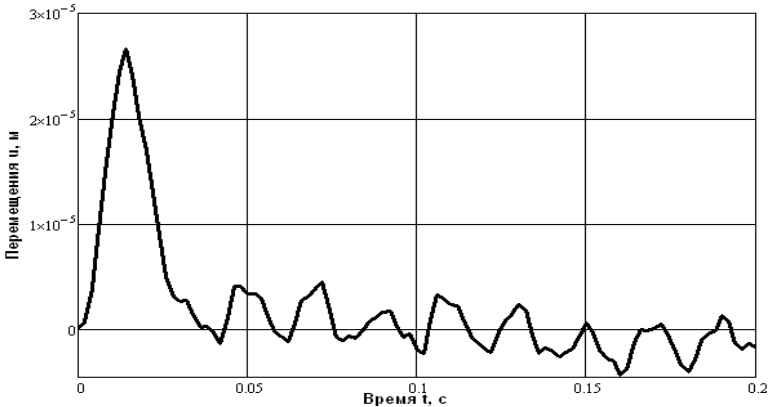


Рис.3– График перемещений точки мембраны с координатами $x_e = 0.3\text{ м}, y_e = 0.35\text{ м}$.

Кривой, состоящей из точек, на рис.4 обозначены значения возмущающей нагрузки действующей по закону «синуса» в течение одного полупериода, тонкой сплошной кривой – значения идентифицированной нагрузки при параметре регуляризации $\alpha = 10^{-40}$. Кривые практически совпадают, что свидетельствует об эффективности метода регуляризации при решении такого рода задач.

Выводы. В статье исследованы нестационарные колебания мембраны с несколькими (двумя) сосредоточенными массами, идентифицирована нестационарная нагрузка, воздействующая на мембрану, несущую сосредото-

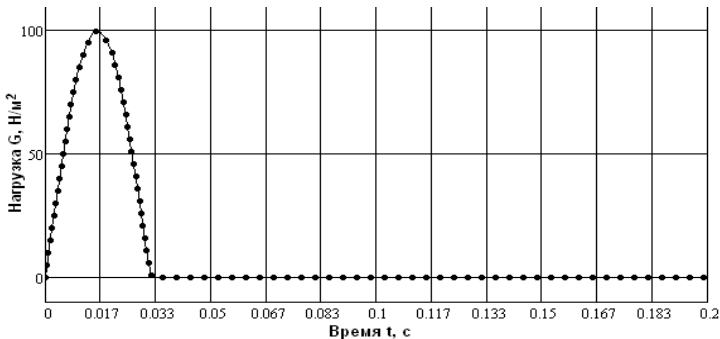


Рис. 4 – Графики приложенной и идентифицированной нагрузок.

ченные массы. Описанный подход является эффективным и может быть использован для построения математических моделей систем, содержащих большее количество присоединенных элементов.

Список литературы: 1. Араманович И.Г., Левин В.И. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1969. – 288 с. 2. Янютин Е.Г., Янчевский И.В. Импульсные воздействия на упругодеформируемые элементы конструкций. – Харьков: Изд-во ХГАДТУ (ХАДИ), 2001. – 184 с. 3. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Янютин Е.Г., Янчевский И.В., Воропай А.В., Шараната А.С. // Монография. – Харьков: ХНАДУ, 2004. – 392 с. 4. Верлань А.Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / Верлань А.Ф., Сизиков В.С. // К.: Наук. думка, 1986. – 544 с.

Поступила в редколлегию 28.09.2012

УДК 539.3

Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс / Е.Г. Янютин, П.А. Егоров // Вісник НТУ «ХП». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХП». – 2012. – № 54(960). – С.209-216. – Бібліогр.: 4 назв.

Механічна система складається із закріпленої вздовж контуру прямокутної мембрани та приєднаних до неї мас. При розв'язанні прямої задачі досліджуються нестационарні коливання мембрани під дією відомого імпульсного розподіленого навантаження. При розв'язанні оберненої задачі за відомими переміщеннями деякої точки мембрани ідентифікується невідоме навантаження, яке викликало коливання системи. Вирішення задач зводиться до аналізу систем інтегральних рівнянь, які розв'язуються чисельно. У випадку побудови рішення оберненої задачі використовується метод регуляризації А.М.Тихонова.

Ключові слова: мембрана, зосереджена маса, розподілене навантаження, контактна сила, переміщення, інтегральне рівняння, ідентифікація, метод регуляризації.

Mechanical system consists of the rectangular membrane, which is fixed over the contour, and connected to it masses. The transient vibrations of the membrane under the known impulse distributed load are studied at solving the direct problem. The unknown load, which caused mechanical system vibrations, is identified over the known displacements of certain point at solving the inverse problem. Solving the problems resolves into analysis of Volterra integral equation sets, which are solved numerically. In case of solving the inverse problem the Tikhonov regularization method is used.

Key words: membrane, a concentrated mass, load distribution, contact force, displacement, integral equation, identification, regularization method.