УДК 621.9

В.М. БУРЛАЄНКО, канд. техн. наук, доц., НТУ «ХПІ»;
О.К. МОРАЧКОВСЬКИЙ, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»

ЗАСТОСУВАННЯ КІНЕМАТИЧНОГО КОНТАКТНОГО АЛГОРИТМУ З ЯВНОЮ СХЕМОЮ ІНТЕГРУВАННЯ ЗА ЧАСОМ У СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНИХ ЗАДАЧАХ ДИНАМІКИ ТІЛ З ТРІЩИНОЮ

Розглянуто кінематичний контактний метод в рамках явної схеми інтегрування за часом у скінченоелементному моделюванні. Означений алгоритм застосовується щодо розв'язання задач нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують між собою. Ефективність та стабільність алгоритму показано на прикладі розв'язання задачі щодо оцінки динамічної поведінки балки з композиційного тришарового матеріалу, в якому поміж верхнім та середнім шарами існує нещільність.

Ключові слова: динаміка тіла з тріщиною; контактний аналіз; метод скінчених елементів.

Вступ. Розробка методів розв'язання задачі динаміки тіла з тріщиною, береги якої взаємодіють між собою за рахунок контакту і/або тертя, є одною з важливих сучасних проблем механіки [1]. Узагалі підходи щодо рішення цієї задачі ґрунтуються на зв'язку методів теорії коливання тіла з контактними алгоритмами. При цьому, якщо коливання тіла, при деяких припущеннях, можуть бути змодельованими у лінійній постановці, то поведінка берегів тріщини у контакті описується тільки з позицій нелінійних моделей, оскільки одночасно заздалегідь невідоме ні поле переміщень, ні контактні сили, ні навіть контактні пари на взаємодіючих поверхнях. Тому основною характеристикою рішень подібних динамічних систем є їх значна нелінійність, негладкість та потенціальна погана обумовленість. В зв'язку з цим існують на сучасний момент значні труднощі в моделюванні динаміки тіла з тріщиною.

Метод скінчених елементів (МСЕ) один з найбільш поширених чисельних методів, що застосовуються у різних задачах механіки [2]. Скінченоелементний підхід також успішно використовується у рішенні контактних задач [3]. Але контактний аналіз за схемою МСЕ, у порівнянні з багатьма іншими лінійними та нелінійними структурними аналізами, на сьогоднішній день ще не має закінченості щодо точності і стабільності алгоритмів, які впроваджуються. Питання, які пов'язані з ефективним пошуком поверхонь, що мають бути у контакті, згладжуванням дискретизованих скінченими елементами контактуючих поверхонь, способом впровадження контактних умов на цих поверхнях та побудовою різних типів контактних моделей не вирішені остаточно і є предметом подальших наукових досліджень [4]. Крім того вирішення цих питань вимагає їх узгодженості зі схемами інтегрування за часом.

Добре відомо, що система скінченоелементних рівнянь руху може бути розв'язана методами, які поділяються на дві категорії: неявні та явні [2]. Для перших повна система диференціальних рівнянь для кожного кроку у часі вирішується з залучанням ітераційних схем та перевіркою критерію збіжності. Явні ж схеми переформульовувають систему диференціальних рівнянь у форму, що дозволяє їх безпосереднє розв'язання наприкінці кожного кроку часу без ітерацій. Завдяки цьому останні більш ефективні у задачах динаміки. Треба зазначити, що при виконанні контактного аналізу комбінація його компонентів, таких як методи дискретизації, контактні алгоритми та схеми інтегрування за часом, є неоднозначною. Наприклад відомо, що *метод коефіцієнтів Лагранжа з неявною схемою Ньюмарка* призводять до неіснуючих осциляцій у контактних силах та невиконанню принципу зберігання енергії у випадку обчислень за *формулою трапеції*, а *метод штрафу з явною схемою* порушує стабільність процесу інтегрування [3].

Підсумовуючи вище сказане очевидно, що оптимальний вибір контактного алгоритму спільно з визначеною схемою інтегрування за часом у скінченоелементних постановках задач з урахуванням контакту і/або тертя є головною запорукою для отримання надійних результатів та ефективного моделювання. У статті описується *кінематичний контактний алгоритм* у рамках явної схеми інтегрування за часом щодо його застосування у дослідженнях динамічної поведінки тіла з тріщиною, границі якої контактують поміж собою. Точність і ефективність вживаних процедур у динамічному контактному аналізі показано на прикладі розрахунку динамічній поведінки балки з композиційного тришарового матеріалу, яка має нещільною зоною поміж верхнім та середнім шарами.

Скінченоелементні рівняння руху з урахуванням контакту. Скінченоелементна модель нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують, з припущеннями щодо лінійності матеріалу та малих деформацій, у подробицях розглянуто в роботі [5]. Тому у поточній статті ці основні положення наведено скорочено. Використовуючи скінченоелементну апроксимацію з урахуванням контактних сил, що передбачаються відомими у визначений момент часу, рух тіла визначаються наступною системою рівнянь:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F}^{ext} - \mathbf{F}^{cont}\left(\mathbf{U}, t_N, \mathbf{t}_T\right), \qquad (1)$$

де матриці **M**, **C** і **K** відповідають глобальним матрицям мас, демпфірування та жорсткості; $\ddot{\mathbf{U}}$, $\dot{\mathbf{U}}$ і **U** означають глобальні вектори невідомих прискорень, швидкостей та переміщень; $\mathbf{F}^{ext}$ і $\mathbf{F}^{cont}$ становлять глобальні вектори зовнішніх та контактних сил. Крім того рішення системи (1) узгоджене з заданими крайовими і початковими умовами та відповідає умовам контакту.

Рівняння стану, що визначають взаємодію берегів тріщини, взагалі, є функцією їх переміщень і контактних сил, діючих на них. Кінематика берегів тріщини у нормальному напрямку описується за допомогою скалярної *функції проникнення* g_N, яка задана для пари точок на контактуючих поверхнях, таких що точка $\mathbf{x}^+$ є найближчою до точки $\mathbf{x}^-$:

$$g_N \equiv \left(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-\right)\cdot \mathbf{n}^+ = g_0 + \left(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-\right)\cdot \mathbf{n}^+ , \qquad (2)$$

де $g_0 = \left(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-\right)\cdot \mathbf{n}^+$ – початкове значення функції та $\mathbf{n}^+$ – одинична зовнішня нормаль до поверхні контакту, яка є відновлена з $\mathbf{x}^+$.

Аналогічно, відносний рух контактуючих поверхонь у горизонтальному напрямку визначається вектор-функцією $\mathbf{g}_T$, тобто проекцією вектора $\left(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-\right)$ на одиничні вектори $\mathbf{a}_\alpha^+$, $\alpha = 1{,}2$, які тангенціальні до поверхні контакту у точці контакту і такі, що визначають тангенціальний напрямок руху:

$$\mathbf{g}_T \equiv \left[\left(\mathbf{x}^+ - \mathbf{x}^-\right)\cdot \mathbf{a}_\alpha^+\right]\mathbf{a}_\alpha^+ = \left[\left(\mathbf{X}^+ - \mathbf{X}^-\right)\cdot \mathbf{a}_\alpha^+ + \left(\mathbf{u}^+ - \mathbf{u}^-\right)\cdot \mathbf{a}_\alpha^+\right]\mathbf{a}_\alpha^+ \qquad (3)$$

Для того, щоб знайти траєкторію руху поверхонь одній по другій в умовах тертя ковзання, швидкість тангенціальної функція $\mathbf{g}_T$ визначається співвідношенням [4]:

$$\mathsf{L}_\upsilon \mathbf{g}_T = \left(\mathbf{v}^+ - \mathbf{v}^-\right)\cdot\left(\mathbf{a}^\alpha \otimes \mathbf{a}_\alpha\right), \qquad (5)$$

де L_υ позначає *похідну Лі* вектора-функції по напряму вектора швидкості тангенціального руху.

Контактний тиск $\mathbf{t}_c$ поміж поверхнями в розглянутій точці контакту може бути розкладений на нормальну $\mathbf{t}_N$ та тангенціальну $\mathbf{t}_T$ складові, такі що

$$\mathbf{t}_N = t_N \mathbf{n}^+ \ \text{ і } \ \mathbf{t}_T = -\left(\mathbf{I} - \mathbf{n}^+ \otimes \mathbf{n}^+\right)\cdot \mathbf{t}_c , \qquad (6)$$

де t_N визначає значення нормального контактного тиску.

Використовуючи введені позначення, умови непроникності берегів тріщини записуються у формі *критерію Куна-Такера* як наступні:

$$t_N \ge 0 ,\ g_N \le 0 \ \text{ та } \ t_N g_N = 0 \qquad (7)$$

У випадку тангенціального контакту функція $\mathbf{g}_T$ ненульова лише в ситуації ковзання, яке асоціюється з явищем тертя. Уживаючи *закон тертя Кулона* у формі аналогічній теорії пластичності [3], умови злипання і ковзання берегів тріщини набувають вигляду нерівностей:

$$\Phi\left(\mathbf{t}_T , t_N\right) = \left|\mathbf{t}_T\right| - \mu t_N \le 0 ,\ \mathsf{L}_\upsilon \mathbf{g}_T = \dot{\gamma}\, \mathbf{t}_T \big/ \left|\mathbf{t}_T\right| ,\ \dot{\gamma} \ge 0 ,\ \Phi\dot{\gamma} = 0 \qquad (8)$$

Отже, стан інтерфейсу поміж берегами тріщини визначається нерівностями (7) і (8), котрі створюють додаткові умови щодо рішення системи (1).

Неявна схема інтегрування за часом. Матричне рівняння (1) є системою нелінійних диференціальних рівнянь, яка, в загальному випадку, для знаходження невідомих переміщень вимагає *використання інкрементально-*

ітераційних процедур рішення [2]. Таким чином система (1) на скінченому числі кроків у часі переписується у вигляді системи рівнянь

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}_{i+1} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_{i+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{F}_{i+1}^{ext} - \mathbf{F}_{i+1}^{cont}, \quad (9)$$

де прискорення $\ddot{\mathbf{U}}_{i+1}$, швидкості $\dot{\mathbf{U}}_{i+1}$ і переміщення $\mathbf{U}_{i+1}$, також як зовнішні та контактні сили, відповідають прирощенню часу $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$.

Слідуючи алгоритму явної схеми інтегрування за часом, що використовує скінчено-різницевий оператор, розв'язання системи (1) на початку кожного кроку Δt_{i+1} виконується за формулою обчислення прискорення:

$$\ddot{\mathbf{U}}_i = \widetilde{\mathbf{M}}^{-1} \cdot \left(\mathbf{F}_i^{ext} - \mathbf{F}_i\right), \quad (10)$$

де $\widetilde{\mathbf{M}}$ – діагональна матриця мас; $\mathbf{F}_i^{ext}$ – вектор зовнішніх сил на момент часу t_i; $\mathbf{F}_i$ – сума сил в вузлах трьох типів: внутрішніх $\mathbf{F}_i^{int} = \mathbf{K}\mathbf{U}_i$, демпфірування $\mathbf{F}_i^{damp} = \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}_i$ та контактних $\mathbf{F}_i^{cont}$. Ці сили є відомими з обчислень, виконаних раніше на кроці Δt_i. Далі скінчено-різницевий оператор просуває рішення щодо обчислення швидкостей на момент часу $t_i + 0.5\Delta t_{i+1}$ і переміщень на момент $t_i + \Delta t_{i+1}$ за формулами

$$\dot{\mathbf{U}}_{i+\frac{1}{2}} = \dot{\mathbf{U}}_{i-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta t_{i+1} + \Delta t_i}{2}\ddot{\mathbf{U}}_i \;\text{ і }\; \mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i + \Delta t_{i+1}\dot{\mathbf{U}}_{i+\frac{1}{2}}, \quad (11)$$

де початкове запізнення у швидкості $\dot{\mathbf{U}}_{i-\frac{1}{2}}$ обчислюється в залежності від заданих початкових умов.

Зазначимо, що явна схема інтегрування за часом є *умовно стабільною*, тобто значення інкременту Δt_i у (9) повинно бути менше, чим границя стабільності скінчено-різницевого оператора [2]. Приблизною оцінкою цієї границі може бути час, за який звукова хвиля проходить через найменший елемент скінченоелементної сітки.

Кінематичний контактний алгоритм. Як було зазначене вище, передбачається, що вектор контактних сил в системі (9) обчислюється за кінематичним контактним алгоритмом. Цей алгоритм відноситься до *методу предиктор-коректор*, який дозволяє точно накласти кінематичні обмеження (7) і (8), що обумовлені контактом. Основні кроки контактного алгоритму на інкременті інтегрування Δt_{i+1} явної схеми є наступними.

У фазі *предиктор* кінематичний стан моделі обчислюється за формулами (10) і (11), ігноруючи контактні умови (7) і (8). Таким чином, проникнення між контактуючими поверхнями може виникнути. Сила, що ставить опір прониканню (або нормальна складова контактного тиску) може бути знайденою за формулою:

$$f_N = m d_N^{pred} / \left(\Delta t_{i+1}\right)^2 , \qquad (12)$$

де m – маса вузла $\mathbf{x}^{-}$, що проникнув у поверхню контакту та d_N^{pred} – глибина проникання.

Аналогічно, сила опору ковзанню вузла $\mathbf{x}^{-}$ по контактній поверхні відносно вузла $\mathbf{x}^{+}$ в одному із напрямків (або тангенціальна складова контактного тиску) знаходиться

$$f_T = -m \dot{d}_T^{pred} / \Delta t_{i+1} , \qquad (13)$$

де $\dot{d}_N^{pred}$ – швидкість відносного тангенціального руху у напрямку α.

У фазі *коректор* прискорення вузлів, які мали проникнення і/або ковзання тертя корегуються за формулою:

$$\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}^{-}}^{cor} = \ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}^{-}}^{pred} + \ddot{\mathbf{U}}_N + \ddot{\mathbf{U}}_T , \qquad (14)$$

де $\ddot{\mathbf{U}}_{\mathbf{x}^{-}}^{pred}$ – прискорення у фазі предиктор, $\ddot{\mathbf{U}}_N$ та $\ddot{\mathbf{U}}_T$ – корекції до прискорення, що відображають вплив властивостей поверхні контакту на сили f_N і f_T, відповідно [7]. Далі, кореговані прискорення вживаються до обчислення швидкостей і переміщень за формулами (11), котрі будуть точно відповідати зазначеним контактним умовам. Оновлені швидкості використовуються щодо обчислення траєкторій ковзання. Таким чином, наприкінці поточного інкременту Δt_{i+1} вектори переміщень і контактних сил повністю визначені з урахуванням нерівностей (7) і (8).

Важливо зазначити, що кінематичний контактний алгоритм усуває існуючі проникнення і/або ковзання наприкінці інкременту, тобто алгоритм не впливає на граничне значення інкременту і, як наслідок, стабільність схеми інтегрування за часом на протягу контактного аналізу.

Скінченоелементне моделювання. Для оцінки точності та ефективності пропонованого вище підходу у рішенні задачі динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують між собою, виконано динамічний аналіз балки з тришарового композиційного матеріалу, що має дефект при зв’язку між окремими шарами. Експериментальні результати динамічних властивостей композиційної балки з нещільністю наведено у статті [8].

Балка була закріплена з одного кінця, та збуджена короткотерміновою силою на незакріпленому кінцю для отримання її коливань. У презентованій статті ця балка була змодельована за допомогою програмного комплексу ABAQUS/Explicit [9], реалізуючого явну схему інтегрування за часом спільно з кінематичним контактним алгоритмом. Рис. 1 показує деформовану форму балки у момент часу, коли нещільність найбільш розкрита. Крім того геометрія скінченоелементної моделі балки також ілюструється на цьому малюнку. Виконані чисельні розрахунки у формі історій прискорення та переміщення у часі для точки вільного кінця балки були трансформовані у амплітудно-частотні криві процедурами пакету Matlab.

Порівняння обчисленої амплітудно-частотної кривої з експериментальними даними [8] представлено на рис. 2. Можна бачити добрий збіг між представленими результатами, що свідчить о високій точності та стабільності чисельного рішення. Ефективність моделювання за описаною у статті схемою визначалась порівнянням з чисельними результатами, отриманими у рамках неявної схеми інтегрування спільно з контактним алгоритмом коефіцієнтів Лагранжа. Зазначимо, що ця чисельна схема не була в змозі виконати розрахунок в зв'язку з нестабільністю рішення в наслідок обробки контактних умов. Деякі штучні дії впроваджувались для отримання рішення, але вони значно змінили результати розрахунків (рис. 2).

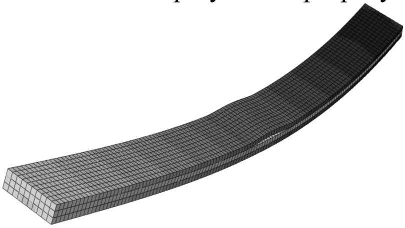

Рис. 1 – Тривимірна скінченоелементна модель балки.

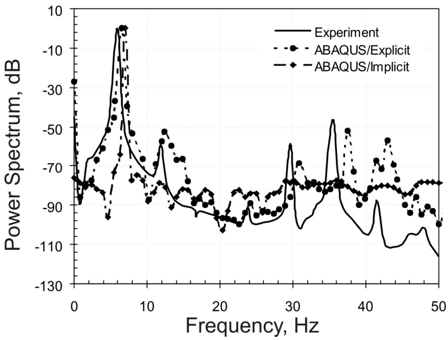

Рис. 2 – Порівняння амплітудно - частотних кривих.

Висновки. Представлено кінематичний контактний метод в рамках явної схеми інтегрування за часом у скінченоелементному моделюванні задачі нелінійної динаміки тіла з тріщиною. Точність, стабільність та ефективність алгоритму доказано на прикладі рішення задачі щодо оцінки динамічної поведінки балки з композиційного тришарового матеріалу, в якому поміж окремими шарами існувала нещільність.

Список літератури: 1. *Babitsky V.I.*, Theory of vibro-impact systems and applications, Springer, Berlin, 1998. – 352 p. **2**. *Belytschko T., Liu W.K., Morgan B.*, Nonlinear finite elements for continua and structures. – John Wiley & Sons Inc., New York, USA, 2000. – 667 p. **3**. *Wriggers P.*, Computational contact mechanics. – John Wiley & Sons Ltd, England, 2002. – 441 p. **4**. *Meguid S.A., Czekanski A.*, Advances in computational contact mechanics// Int. J. Mech. Mater. Des. 4, 2008, p.p. 419-443. **5**. *Бурлаєнко В.М.***,** *Морачковський О.К.*, Скінченноелементна модель нелінійної динаміки тіла з тріщиною, береги якої контактують// Вісник НТУ «ХПІ» –2012.– №2. – С. 44-51. **7**. *Taylor L.M., Flanagan D.P.*, PRONTO 3D a three-dimensional transient solid dynamics program// Sandia National Laboratory, Albuquerque, NM, 1989. **8**. *Prime M.B., Shevitz D.W.*, Linear and Nonlinear Methods for Detecting Cracks in Beams// Proc. of the 15th International Modal Analysis Conference, 1995, p.p.1437-1443. **9**. *ABAQUS.* User Manual, Dassault Systèmes Simulia Corp. – Providence, RI, USA, 2010.

Надійшла до редколегії 25.10.2012

УДК 621.9

Застосування кінематичного контактного алгоритму з явною схемою інтегрування за часом у скінченоелементних задачах динаміки тіл з тріщиною / В.М. Бурлаєнко, О.К. Морачковський // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання у техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.19–25. – Бібліогр.: 9 назв.

Рассмотрен кинематический контактный метод, используемый в рамках явной схемы интегрирования по времени в конечноэлементном моделировании. Этот алгоритм применяется здесь для решения задач нелинейной динамики тела с трещиной, границы которой могут находиться в контакте. Эффективность и устойчивость алгоритма показана на примере решения задаче о динамическом поведении балки из композиционного трехслойного материала, который частично расслоён в соединении между верхним и средним слоями.

***Ключевые слова*:** динамика тел с трещиной; контактный анализ; метод конечных элементов.

A kinematical numerical contact method used with an explicit time integration scheme in finite element modelling is considered. The algorithm is applied to dynamical problems of a body with a crack whose edges are able to come into contact. Its effectiveness and robustness is demonstrated on predictions of dynamic response of a sandwich beam containing a detached region between the top and middle plies.

***Key words*:** dynamics of body with crack; contact analysis; finite element method.

УДК 539.1

В.А. ВАНИН, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;
А.А. ГРИГОРЬЕВ, аспирант, НТУ «ХПИ»

МОДЕЛИРОВАНИЕ СИНФАЗНЫХ УПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ В ВОЛНОВОДАХ И СОНОТРОДАХ ВИНТОВОЙ ФОРМЫ

Разработаны математические модели волнового синфазного поля продольных и связанных колебаний винтового стержня. Установлен изоморфизм между двумя полями связанных колебаний – волновым и обычным, что позволило распространить на волновое поле методы расчёта стержня на прочность и теорию солитонов Рассела. Описаны примеры использования волновых полей для передачи энергии ультразвуковых колебаний.

Ключевые слова: винтовой стержень, упругие колебания, волновое поле, солитоны Рассела, ультразвуковой волновод, сонотрод.

Введение и постановка задачи. Синфазные колебания упругих континуумов (так называемые *стоячие волны*, амплитуда которых образует *волновое поле*) обычно возникают при изменении граничных условий по гармоническому закону с определённой (*синфазной*) частотой. Особенностью исследуемых в данной работе колебаний является то, что они возбуждаются в нелинейной системе, имеют одинаковую для всех её точек амплитуду изменения