

**А.Л. ГРИГОРЬЕВ**, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПИ»;  
**Ю.Л. ГЕВОРКЯН**, канд. физ.-мат. наук, проф., НТУ «ХПИ»

## АЛГОРИТМЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ ЖЁСТКИХ УРАВНЕНИЙ КЛАПАННЫХ ГИДРОМЕХАНИЧЕСКИХ УЗЛОВ

Описан универсальный метод динамического расчёта гидромеханического узла, оснащенного автоматическими клапанами разных типов. Особенностями метода является использование матричных обозначений для записи жесткой системы дифференциальных уравнений гидромеханики и неявной консервативной схемы для её интегрирования.

**Ключевые слова:** гидромеханический узел, гидродинамический расчёт, жёсткие уравнения, схема Адамса, автоматический клапан.

**Общая характеристика метода и основные определения.** Статья продолжает цикл публикаций [1,2], в котором излагаются теоретические основы нового метода динамического анализа и расчёта сложных гидромеханических устройств. Апробация метода выполнялась на примерах гидродинамических расчётов дизельной топливной аппаратуры различных типов.

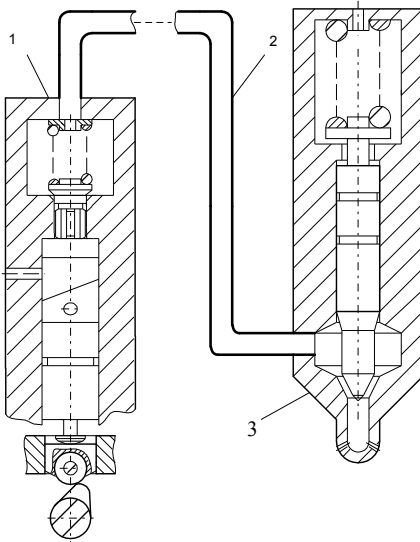


Рис.1 – Линия высокого давления: 1 – насос; 2 – трубопровод; 3 – форсунка.

Традиционная для большинства дизельных двигателей гидравлическая схема этой аппаратуры показана на рис.1. Линия высокого давления включает два гидромеханических узла – топливный насос и форсунку, соединяемых нагнетательным трубопроводом. Узлы оснащены автоматическими клапанами, относящимися по принципу своей работы к разным типам. На клапан, установленный между двумя полостями насоса, действует перепад давлений топлива; такие клапана мы далее будем именовать *простыми*. На иглу форсунки – *сложный клапан* – действует суммарная сила давления топлива со стороны кармана и канала распылителя; в полости пружины форсунки, как правило, топливо давления не имеет, но при организации гидравлического

запирания иглы эта полость также заполнена топливом, сжатым под высоким давлением.

В некоторых конструкциях топливной аппаратуры используются дополнительные узлы [3], в других – существенно возрастает сложность гидравлической схемы насоса [4] или форсунки [5]. В этих конструкциях применяются сложные клапаны ещё двух видов – дифференциальный проточный клапан (рис.2 а) и клапан – золотник (рис.2 б), причём между некоторыми полостями устанавливается по два клапана – прямой и обратный.

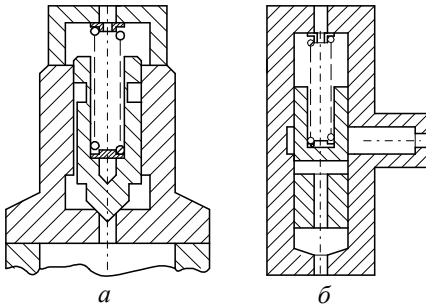


Рис.2 – Схемы сложных клапанов: а – дифференциального; б – золотникового.

Обоснование сделанного в методе выбора расчётной схемы для интегрирования жёсткой системы уравнений узла в пользу неявной схемы Адамса дано в [2,6], там же исследована взаимосвязь между сходимостью метода и устойчивостью моделируемой системы.

Модификация этого метода, позволяющая с большей эффективностью проводить расчёт проточных узлов, описана в завершающей части публикации.

Уточним некоторые определения. Часть гидромеханической системы, состоящую из полостей, связанных между собой дроссельными отверстиями или клапанами, будем называть узлом. Данный узел связан с другими узлами системы при помощи трубопроводов. Так, топливная система классического типа (рис.3 а) состоит из двух узлов (насос и форсунка), связанных одним нагнетательным трубопроводом. В системе, оснащенной модуляторами импульсов давления [3], последовательно установлены три узла и два трубопровода (рис.3 б). У топ-

Разработка метода динамического расчёта таких систем актуальна не только для топливной аппаратуры дизелей. Описанный здесь метод пригоден для расчёта разветвлённых гидравлических систем любой сложности. Отличительные особенности метода указаны в аннотации. Использование матрично-векторных обозначений позволило придать ему универсальную форму.

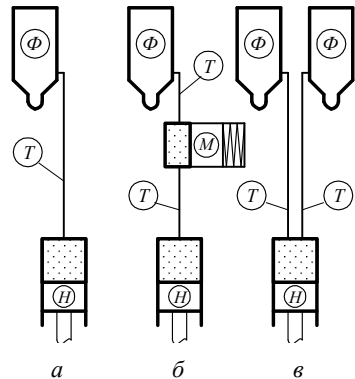


Рис.3 – Структурные схемы: Н – насос; Ф – форсунка; Т – трубопровод; М – модулятор.

ливной аппаратуры [4] согласно принятому определению также три узла и два трубопровода, но здесь трубопроводы установлены параллельно и соединяют один насос с двумя форсунками (рис.3 в). Волны давления и скорости распространяются по трубопроводам с конечной скоростью (скоростью звука  $a$ ), поэтому при динамическом расчёте системы изменение параметров любого её узла в пределах данного шага по времени не успевает оказать влияние на изменение параметров других узлов, и уравнения этих узлов могут интегрироваться независимо друг от друга.

**Составим уравнения гидромеханического узла.** Рассмотрим узел, состоящий из  $n$  полостей и  $m$  клапанов. Объём  $i$ -ой полости будем обозначать  $v_i$ , давление жидкости в ней –  $p_i$ , скорость и перемещение  $s$ -го клапана обозначим  $c_s$  и  $h_s$ , соответственно.

Площадь эффективного сечения канала, связывающего  $i$ -тую и  $j$ -тую полости, обозначим  $\mu f_{ij}$ ; часть площади поперечного сечения  $s$ -того клапана, на которую действует перепад давлений в полостях  $i$  и  $j$ , –  $f_{ij}^{(s)}$ .

Некоторые полости узла соединены с трубопроводами; площади поперечного сечения трубопроводов, связанных с  $i$ -ой полостью, будем обозначать  $f_{ik}^{mp}$ , где  $k$  – номер трубопровода. Если объём этой полости изменяется не только при перемещениях клапанов, но и за счёт движения плунжеров (рис.1), то соответствующую объёмную скорость движения обозначим  $q_i$ .

С учётом принятых обозначений уравнение объёмного баланса для  $i$ -той полости и уравнения движения  $s$ -того клапана примут вид:

$$\alpha v_i \frac{dp_i}{dt} = -\sum_j [\mu f_{ij} \cdot s(p_i - p_j) + \sum_s f_{ij}^{(s)} c_s] + \sum_k (f_{ik}^{mp} / (a\rho))(p_i - 2w_{ik}) + q_i(t), \quad (1)$$

$$m_s \frac{dc_s}{dt} = \sum_{i,j} f_{ij}^{(s)} (p_i - p_j) - k_s [c_s(t) + 2 \sum_{l=1}^{\infty} c_s(t - lT_s)] - F_{np.o}^{(s)}; \quad \frac{dh_s}{dt} = c_s(t), \quad (2)$$

где  $t$  – время;  $s(\Delta p)$  – линейная скорость течения жидкости между полостями при перепаде давления между ними  $\Delta p$ ,

$$s(\Delta p) = \sqrt{(2/\rho) \cdot |\Delta p|} \cdot \text{sign}(\Delta p);$$

$\alpha, \rho$  – коэффициент сжимаемости и плотность жидкости;  $w_{ik}$  – величина отражённой волны давления [7], приходящей по  $k$ -тому трубопроводу в момент времени  $t$ ;  $m_s$  – масса клапана;  $k_s$  – коэффициент пропорциональности в формуле из [8] для определения силы пружины с учётом продольных колебаний её витков,

$$k_s = 0.5 \cdot z_s \cdot T_s;$$

$z_s, F_{np.o}^{(s)}$  – коэффициент жёсткости и усилие предварительной затяжки пружины клапана;  $T_s$  – период свободных колебаний этой пружины,

$$T_s = 2 \cdot \sqrt{m_{np}^{(s)} / z_s};$$

$m_{np}^{(s)}$  – масса движущихся витков пружины.

Некоторые из давлений  $p_j$ , используемые в правой части уравнений (1), (2), могут быть известными функциями времени либо константами и не относятся к динамическим параметрам узла.

Уравнения (1) становятся замкнутыми после добавления к ним известных формул [9], определяющих параметры жидкости  $a, \alpha, \rho$  в зависимости от значения давления  $p_i$ , а также площади  $\mu f_{ij}$  и объёмы  $v_i$  в зависимости от перемещения клапанов и плунжеров.

Объединим динамические параметры  $p_i, c_i, h_i$  в векторы-столбцы  $\vec{p}, \vec{c}, \vec{h}$  и перепишем систему уравнений (1),  $i = 1, \dots, n$  и (2),  $s = 1, \dots, m$  в матричной форме:

$$[V] \times d\vec{p} / dt = -\vec{Q}(\vec{h}, \vec{p}, t) - [FK] \times \vec{c} - [FT] \times \vec{p} + \vec{Q}_0(t); \quad (3)$$

$$[M] \times d\vec{c} / dt = [FK]^T \times \vec{p} - [Z] \times \vec{c} - \vec{F}_0(t); \quad d\vec{h} / dt = \vec{c}(t), \quad (4)$$

где  $[V], [FT], [M], [Z]$  – диагональные матрицы размеров  $[n \times n]$  и  $[m \times m]$ ,

$$V_{ii} = \alpha(p_i) \cdot v_i; FT_{ii} = \sum_k f_{ik}^{mp} / (a\rho); M_{ss} = m_s; Z_{ss} = k_s \quad i = 1, \dots, n; s = 1, \dots, m;$$

$[FK]$  – прямоугольная матрица размера  $[n \times m]$ , составленная из площадей  $f_{ij}^{(s)}$  поперечного сечения клапанов; компоненты вектора  $\vec{Q}$  имеют вид

$$Q_i = \sum_j \mu f_{ij}(\vec{h}, t) \cdot s(p_i - p_j).$$

**Перейдём к уравнениям в конечных разностях.** Параметры жидкости  $a, \alpha, \rho$  и объёмы полостей  $v_i$  за время одного шага интегрирования  $\Delta t$  изменяются незначительно и этим изменением можно пренебречь. Поэтому, считая все матричные коэффициенты системы (3), (4) постоянными, проинтегрируем её на промежутке времени  $t \in [t_o, t_o + \Delta t]$ , используя неявную консервативную схему, именуемую *интерполяционной формулой Адамса* [10].

Значения динамических параметров  $\vec{p}(t), \vec{c}(t), \vec{h}(t)$ , отвечающие началу и концу промежутка, будем обозначать соответственно строчными ( $\vec{p}, \vec{c}, \vec{h}$ ) и прописными ( $\vec{P}, \vec{C}, \vec{H}$ ) буквами. Тогда соотношения между известными и неизвестными величинами примут следующий вид:

$$[V] \times (\bar{P} - \bar{p}) = -\Delta t / 2 \cdot (\bar{Q}(\bar{h}, \bar{p}, t_0) + \bar{Q}(\bar{H}, \bar{P}, t_0 + \Delta t)) + [FK] \times (\bar{C} + \bar{c}) + [FT] \times (\bar{P} + \bar{p}) - \bar{Q}(t_0) - \bar{Q}(t_0 + \Delta t), \quad (5)$$

$$[M] \times (\bar{C} - \bar{c}) = \Delta t / 2 \cdot ([FK]^T \times (\bar{P} + \bar{p}) - [Z] \times (\bar{C} + \bar{c}) - \bar{F}_0(t_0) - \bar{F}_0(t_0 + \Delta t)); \quad (6)$$

$$\bar{H} - \bar{h} = \Delta t / 2 \cdot (\bar{C} + \bar{c}).$$

Перепишем эти равенства так:

$$\bar{C} = \Phi_c(\bar{P}) = [[M] + \Delta t / 2 \cdot [Z]]^{-1} \times (([M] - \Delta t / 2 \cdot [Z]) \times \bar{c} + \Delta t / 2 \cdot ([FK]^T \times (\bar{P} + \bar{p}) + \bar{F}_0(t_0) + \bar{F}_0(t_0 + \Delta t)));$$

$$\bar{H} = \Phi_h(\bar{C}) = \bar{h} + \Delta t / 2 \cdot (\bar{C} + \bar{c}); \bar{P} = \Phi_p(\bar{P}, \bar{C}, \bar{H}) = \bar{p} - \Delta t / 2 \cdot ([V] + \Delta t / 2 \cdot [FT])^{-1} \times (\bar{Q}(\bar{H}, \bar{P}, t_0 + \Delta t) + \bar{Q}(\bar{h}, \bar{p}, t_0) + [FK] \times (\bar{C} + \bar{c}) + [FT] \times \bar{p}).$$

Полученная система эквивалентна нелинейному векторному уравнению вида

$$\bar{P} = \Phi(\bar{P}) = \{\phi_1(P_1, \dots, P_n), \dots, \phi_n(P_1, \dots, P_n)\}, \quad (7)$$

где

$$\Phi(\bar{P}) = \Phi_p(\bar{P}, \Phi_c(\bar{P}), \Phi_h(\Phi_c(\bar{P}))).$$

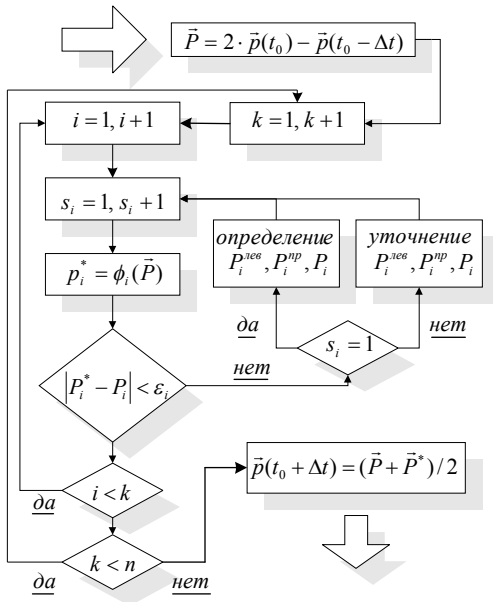


Рис.4 – Алгоритм метода интегрирования уравнений гидромеханического узла.

метод простой итерации или метод Ньютона [10]. Ниже будет показано, как

Функцию  $\Phi(\bar{P})$  можно трактовать как *нелинейный оператор*, действующий в  $n$ -мерном линейном пространстве векторов  $\bar{P}$ . Тогда решение уравнения (7) является *неподвижной точкой* оператора.

Укажем метод решения конечно – разностных уравнений. Для выбора метода решения уравнения (7) нужно знать свойства функции  $\Phi(\bar{P})$ . К сожалению, поскольку

$$s(\Delta p) \sim \sqrt{|\Delta p|},$$

то частные производные этой функции неограниченны, и мы не можем использовать такие эффективные методы, как

за счёт правильного выбора шага интегрирования  $\Delta t$  можно добиться того, что при увеличении компоненты  $P_k$  вектора давлений компонента  $\phi_k$  этой функции будет уменьшаться, если при этом величины  $P_i, i > k$  сохраняют постоянные значения  $P_i^0$ , а остальные компоненты вектора  $\vec{P}$  удовлетворяют *усечённому уравнению* (7) такого вида:

$$\{P_1, \dots, P_{k-1}\} = \{\phi_1(P_1, \dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}^0, \dots, P_n^0), \dots, \phi_{k-1}(P_1, \dots, P_{k-1}, P_k, P_{k+1}^0, \dots, P_n^0)\}. \quad (8)$$

Указанное *свойство монотонности* позволяет использовать для решения задачи пусть и менее эффективный, но абсолютно надёжный *метод последовательного исключения неизвестных* (рис.4). Ключевое положение в представленном алгоритме занимают блоки, в которых производится определение, а затем уточнение левой  $P_i^{лев}$  и правой  $P_i^{np}$  границ интервала локализации искомого значения давления  $P_i$ .

При первичном определении интервала локализации используется свойство монотонного убывания функции  $P_i^* = \varphi_i(P_i)$  (рис.5).

Сокращение интервала локализации производится при использовании метода секущих (первые шесть итераций), а затем, если необходимой точности не достигнуто, применяется *метод дихотомии*.

Для устранения влияния погрешности округления чисел в ЭВМ величины  $\varepsilon_i$ , которыми задаётся точность определения давлений  $P_i$ , рекомендуется выбирать различающимися на порядок (в соответствии с формулой  $\varepsilon_i = \varepsilon_1 / 10^{i-1}$ , где  $\varepsilon_1 = 10 \text{ Па}$ ).

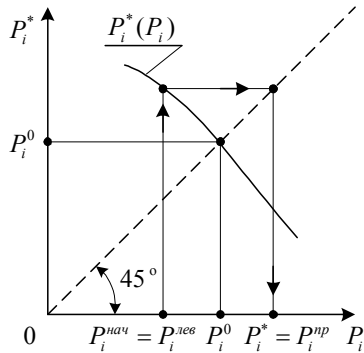


Рис.5 – Порядок определения интервала локализации корня (корень попадает в вилку).

**Определим шаг интегрирования, обеспечивающий монотонность.**

Ясно, что в рассматриваемой задаче величины  $P_{k+1}, \dots, P_n$ , а значит и  $\phi_k$ , являются функциями одного переменного  $P_k$ . Поэтому сформулированное выше свойство эквивалентно условию

$$d\phi_k / dP_k < 0. \quad (9)$$

Формулу для *полной производной*

$$d\phi_k / dP_k = \partial\phi_k / \partial P_k + \sum_{i=1}^{k-1} \partial\phi_k / \partial P_i \cdot dP_i / dP_k$$

с учётом векторного равенства (8) можно преобразовать к такому виду:

$$d\phi_k / dP_k = \partial\phi_k / \partial P_k + [\partial\phi_k / \partial P_1 \dots \partial\phi_{k-1} / \partial P_n] \times \\ \times [[E_{k-1}] - [J_{k-1}]]^{-1} \times [\partial\phi_1 / \partial P_k \dots \partial\phi_{k-1} / \partial P_k]^*,$$

где  $[J_{k-1}]$  – матрица  $\|\partial\phi_i / \partial P_j\|$  размера  $[(k-1) \times (k-1)]$ , которая является *якобианом* для преобразования усечённого набора координат  $\{P_1, \dots, P_{k-1}\}$  по формулам (8);  $[E_{k-1}]$  – единичная матрица того же размера.

Если в этом выражении использовать формулу для элементов обратной матрицы  $[A]^{-1} = [A]^s / \det[A]$ , где  $[A]^s$  – *союзная матрица*, то условие (9) удаётся записать в виде следующего соотношения для определителей:

$$0 < \det[[E_{k-1}] - [J_{k-1}]] < \det[[E_k] - [J_k]], \quad (10)$$

то есть

- все такие определители должны быть положительны,
- с ростом  $k$  их величина должна возрастать.

Эти условия будут заведомо выполнены, если *все главные миноры матрицы  $[-J_n]$  неотрицательны, то есть*

$$[-J_n]_{i_1, \dots, i_i}^{i_1, \dots, i_i} \geq 0 \quad \text{для всех наборов } \{i_1, \dots, i_i\}. \quad (11)$$

Заметим, что определитель матрицы  $[J_n]$  является якобианом для преобразования координат вектора  $\vec{P}$  по формуле (7). Каждому *главному минору* этой матрицы соответствует некоторый *главный минор* матрицы

$$\tilde{S} = - \begin{bmatrix} ([V] + \Delta t / 2 \cdot [FT])^{-1} & 0 \\ 0 & ([M] + \Delta t / 2 \cdot [Z])^{-1} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} [Q] & [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH] \\ [-FK]^T & 0 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

получающейся в результате линеаризации системы уравнений (5), (6).

Матрицы  $[Q]$  и  $[FH]$  составляются из частных производных вектор-функции  $\vec{Q}(\vec{H}, \vec{P})$ :

$$Q_{ij} = \partial Q_i / \partial P_j = \mu f_{ij}(\vec{H}) / \sqrt{(2 \cdot \rho \cdot |P_i - P_j|)}; \\ FH_{ik} = \partial Q_i / \partial h_k = \sum_j \partial \mu f(h_1, \dots, h_m) / \partial h_k \cdot s(P_i - P_j),$$

причём матрица  $[Q]$  является *положительно определённой*. Таким же свойством обладают диагональные матрицы  $[FT]$  и  $[Z]$ .

Первый множитель в формуле (12) представляет собой диагональную положительно определённую матрицу и на знак миноров не влияет. Поэтому условие (11) оказывается эквивалентным требованию *неотрицательности*

всех главных миноров матрицы

$$\widehat{S} = \begin{bmatrix} [Q] & [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH] \\ -[FK]^T & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{то есть} \quad [\widehat{S}]_{i_1, \dots, i_l}^{i_1, \dots, i_l} \geq 0. \quad (13)$$

Если блок  $[FH] = 0$ , то любой главный минор матрицы  $\widehat{S}$  представляет собой определитель вида

$$\begin{vmatrix} [A_{11}] & [A_{12}] \\ -[A_{12}]^T & [A_{22}] \end{vmatrix}$$

и он неотрицателен, поскольку его диагональные блоки  $[A_{11}]$ ,  $[A_{22}]$  являются положительно определёнными матрицами. Рассматриваемый здесь частный случай имеет место, если площади  $\mu f_{ij}$  всех эффективных проходных сечений не зависят от перемещений клапанов. Такой случай на практике встречается редко. Однако этим результатом всё-таки можно воспользоваться и предложить другой, отличный от представленного на рис.4 алгоритм, при котором параметры движения клапанов определяются во внешнем блоке, для чего, как это сделано в [9] для расчёта форсунки, применяется метод простой итерации:

$$\bar{H}_{i+1} = \Phi(\bar{H}_i).$$

При таком решении условие монотонности соблюдается автоматически, но шаг интегрирования должен быть достаточно мелким для ограничения производных функции  $\Phi$ . Указанная модернизация алгоритма актуальна при расчёте узла, содержащего параллельно работающие сложные клапана.

В общем случае блок  $[FH] \neq 0$ , и для выполнения условия (13) матрица  $\widehat{S}$  должна удовлетворять дополнительным требованиям. Детальное изучение структуры диагональных блоков этой матрицы показало, что если обнулить эти блоки и потребовать выполнения аналогичных условий

$$[\widehat{S}]_{i_1, \dots, i_l}^{i_1, \dots, i_l} \geq 0 \quad (14)$$

для получаемой при этом матрицы

$$\bar{S} = \begin{bmatrix} 0 & [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH] \\ -[FK]^T & 0 \end{bmatrix},$$

то таким же условиям будет удовлетворять и матрица  $\widehat{S}$ .

**Теорема (достаточное условие монотонности алгоритма).** *Условия (14) будут выполнены, если все одинаковые миноры матриц*



$$[FK] \text{ и } [FKH] = [FK] + \Delta t / 2 \cdot [FH]$$

принимают значения одинаковых знаков, то есть

$$[FK]_{i_1, \dots, i_l}^{j_1, \dots, j_l} \cdot [FKH]_{i_1, \dots, i_l}^{j_1, \dots, j_l} \geq 0 \quad \text{для всех наборов } \{i_1, \dots, i_l\}, \{j_1, \dots, j_l\}. \quad (15)$$

Доказательство теоремы использует формулы Бине – Коши и методы сворачивания определителя блочной матрицы, приведенные, напр., в [11].

**Вернёмся от математики к гидромеханике.** Если система содержит только простые клапана, то матрицы  $[FK]$  и  $[FH]$  (а также матрицы  $[FK]$ ,  $[FKH]$ ) имеют пропорциональные столбцы, а условия (15) оказываются эквивалентны системе неравенств

$$f_{ij}^{(k)} \cdot (f_{ij}^{(k)} + \partial \mu f_{ij} / \partial h_k \cdot s(P_i - P_j) \cdot (\Delta t / 2)) \geq 0 \quad \text{для всех } k \text{ и всех } i \neq j. \quad (16)$$

Так для насоса (рис.1) имеем:

$$[FK] = f_{кл} \cdot [1 \quad -1]^T; \quad [FH] = d \mu f_{кл} / dh_{кл} \cdot s(\Delta P) \cdot [1 \quad -1]^T,$$

где  $h_{кл}$ ,  $f_{кл}$ ,  $\mu f_{кл}$  – подъём и площади поперечного, проходного сечений нагнетательного клапана;  $\Delta P = P_n - P_{ш}$  – перепад давлений между полостями топливного насоса.

Для простых клапанов производные  $\partial \mu f_{ij} / \partial h_k$ , как правило, неотрицательные. Поэтому неравенства (16) ограничивают выбор шага интегрирования  $\Delta t$  только на тех интервалах времени, когда имеют место отрицательный перепад давлений и обратное течение жидкости через клапан. При этом предельно допустимый шаг интегрирования находится по формуле

$$\Delta t_m = 2 \cdot \min_k \{ - f_{ij}^{(k)} / (\partial \mu f_{ij} / \partial h_k \cdot s(P_i - P_j)) \}. \quad (17)$$

На других промежутках времени условие монотонности соблюдается при любом шаге интегрирования, и здесь величина шага определяется только требованиями точности расчёта.

Для насоса при малых проходных сечениях клапана выполнено соотношение

$$d \mu f_{кл} / dh_{кл} \approx \mu f_{кл} / (h_{кл} - h_{раз}),$$

где  $h_{раз}$  – его *разгружающий ход*, и условие (17) получает интересную геометрическую интерпретацию. Обозначим:

$$Q_{кл} = f_{кл} \cdot (h_{кл} - h_{раз}); \quad Q_T = \mu f_{кл} \cdot s(-\Delta P) \cdot \Delta t,$$

тогда условие (17) эквивалентно неравенству  $Q_{кл} \geq Q_T / 2$ , то есть *объём топлива, вытесненный клапаном с момента его открытия, обязан, по крайней мере, в два раза превосходить объём топлива, проходящий через этот кла-*

пан в направлении, противоположном подъёму, за промежуток времени  $\Delta t$ .

Такой же порядок выбора шага сохраняется для узлов, содержащих не более одного сложного клапана (например, для форсунки, рис.1). В том случае, когда узел содержит два или более сложных клапана, условие (16) остаётся необходимым, но может оказаться недостаточным. Теперь кроме миноров первого порядка, используемых в условиях (16), приходится анализировать миноры второго или более старшего порядка (пример см. ниже); соответствующий анализ нами был выполнен, но результаты здесь приводить не имеет смысла, поскольку такие узлы, как правило, не применяются. Исключение из этого правила составляют узлы, содержащие параллельно работающие сложные клапана с близкими параметрами (например, насос с двумя одинаковыми дифференциальными клапанами). При расчёте таких узлов эти клапана обычно заменяют одним клапаном суммарного проходного сечения. Однако если анализируется влияние технологических погрешностей, такая замена становится невозможной. В этом случае неравенства (16) приходится дополнять условиями вида:

$$\left| \begin{array}{cc} f_{ij}^{(1)} & f_{ij}^{(2)} \\ f_{ik}^{(1)} & f_{ik}^{(2)} \end{array} \right| \cdot \left| \begin{array}{cc} f_{ij}^{(1)} + \partial \mu f_{ij} / \partial h_1 s(P_i - P_j) \cdot \Delta t / 2 & f_{ij}^{(2)} + \partial \mu f_{ij} / \partial h_2 s(P_i - P_j) \cdot \Delta t / 2 \\ f_{ik}^{(1)} + \partial \mu f_{ik} / \partial h_1 s(P_i - P_k) \cdot \Delta t / 2 & f_{ik}^{(2)} + \partial \mu f_{ik} / \partial h_2 s(P_i - P_k) \cdot \Delta t / 2 \end{array} \right| \geq 0,$$

где  $h_1, h_2$  – перемещения сложных клапанов;  $i, j, k$  – номера полостей, между которыми они установлены.

К сожалению, в этом неравенстве первый определитель близок к нулю, а второй может изменить свой знак при очень малом значении шага  $\Delta t$ , что делает метод расчёта малоэффективным. Поэтому при расчёте таких систем определение кинематических параметров одного из клапанов рекомендуется, как указывалось выше, проводить во внешней блоке при использовании метода простой итерации.

**Особенности работы метода проиллюстрируем на**

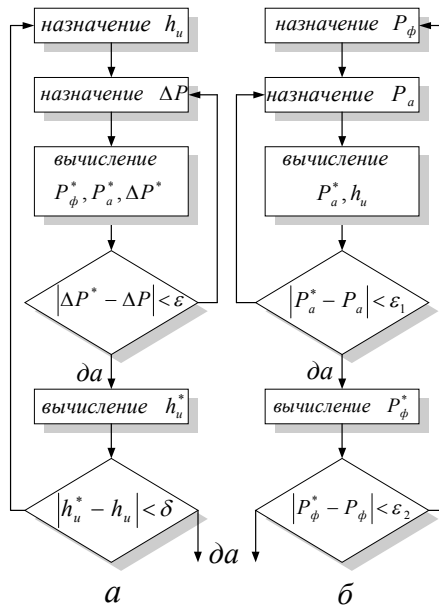


Рис.6 – Расчёт форсунки по разностному (а) и универсальному (б) алгоритму.

**примере расчёта форсунки дизеля** (рис.1). Состояние узла описывается 4-мя динамическими параметрами: давлениями  $P_\phi$  и  $P_a$  в кармане и колодце распылителя, а также перемещением  $h_u$  и скоростью  $c_u$  иглы.

При расчёте форсунки по разностному методу [9] организуется два вложенных один в другой итерационных цикла (рис.6 а): внешний по  $h_u$  и внутренний по перепаду давления  $\Delta P = P_\phi - P_a$ , причём подъём иглы определяется методом простой итерации. При использовании нового метода (рис.6 б) оба цикла подбирают значения давлений, для чего применяется более эффективный расчётный метод – метод секущих.

Игла является сложным клапаном, и здесь столбцы матриц  $[FK]$  и  $[FH]$  не пропорциональные:

$$[FK] = [(-f_u + f_3) \quad (-f_3)]^T; [FH] = d\mu f_3 / dh_u \cdot s(\Delta P) \cdot [1 \quad -1]^T,$$

где  $f_u, f_3$  – площади поперечного сечения иглы и её запорного конуса;  $\mu f_3$  – эффективная площадь проходного сечения по запорному конусу иглы,

$$\mu f_3 \approx (\pi/3) \cdot d_3 \cdot h_u; \quad (18)$$

$d_3$  – диаметр запорного конуса.

Величина максимально допустимого шага, гарантирующего сходимость итераций, определяется с учётом равенств (17), (18) приближённой формулой

$$\Delta t_m \approx 1.5 \cdot d_3 / \sqrt{(2/\rho) \cdot P_{\phi.o}},$$

где  $P_{\phi.o}$  – давление начала подъёма иглы форсунки. Значения этого шага составляют обычно 0.02...0.03 мс и превышают используемый при расчёте форсунки шаг  $\Delta t$  в два и более раз.

**Модели проточных узлов.** Насос (рис.1) моделируется уравнениями

$$\alpha V_H \frac{d p_H}{dt} = f_{II} c_{II}(t) - \mu f_{o.s}(t) s(p_H - p_{o.s}) - f_k c_k - \mu f_k(h_k) s(p_H - p_{III});$$

$$\alpha V_{III} \frac{d p_{III}}{dt} = f_k c_k + \mu f_k(h_k) s(p_H - p_{III}) - (f_T / (a\rho))(p_{III} - p_{ocm} - 2 \cdot w(t));$$

$$m_k \frac{d c_k}{dt} = f_k (p_H - p_{III} - p_{k.o}) - z_k T_{np.k} [c_k(t)/2 + \sum_{k=1,2,\dots} c_k(t - k T_{np.k})]; \frac{d h_k}{dt} = c_k,$$

где  $p_H, p_{III}$  – давления в плунжерной и штуцерной полостях;  $V_H, V_{III}$  – объёмы полостей;  $f_{II}, c_{II}$  – площадь и скорость плунжера;  $f_T, f_k, \mu f_k$  – площади поперечного сечения трубопровода и клапана, проходного сечения клапана;  $c_k, h_k$  – скорость и перемещение клапана;  $m_k, p_{k.o}, z_k, T_{np.k}$  – масса кла-

пана, давление начала его подъёма, коэффициент жёсткости и период свободных колебаний пружины;  $\mu f_{o,6}$  – эффективная проходная площадь дозирующих окон;  $p_{o,6}, p_{ocm}$  – давление за дозирующими окнами и начальное давление в трубопроводе;  $w$  – волна давления, отраженная от форсунки.

Если на шаге интегрирования задать величину среднего перепада давлений

$$\Delta P = 0.5(p_H + P_H) - 0.5(p_{III} + P_{III}),$$

то остальные неизвестные величины определяются при решении линейных или квадратных уравнений. Тем самым получим новое значение перепада  $\Delta P^*$ , которое, вообще говоря, не совпадет с перепадом  $\Delta P$ , а будет связано с ним непрерывной зависимостью вида

$$\Delta P^* = \psi(\Delta P),$$

причём функция  $\psi(\Delta P)$ , что очевидно, является монотонно убывающей.

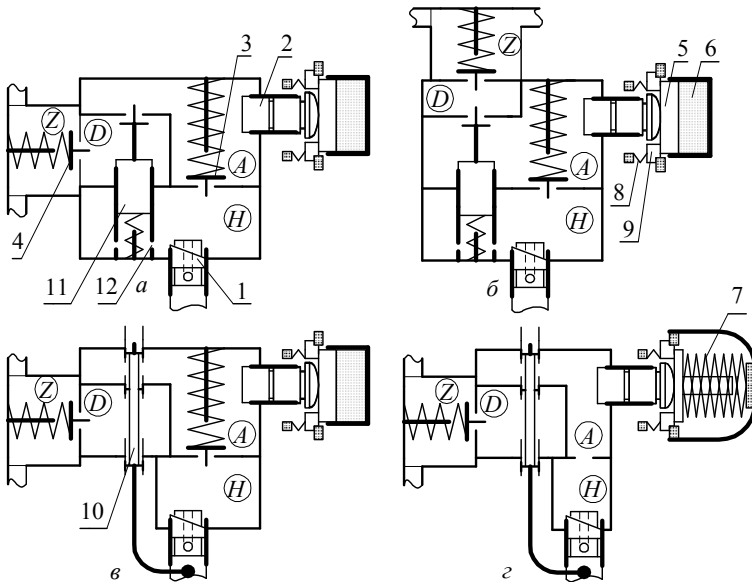


Рис.7 – Схемы насосов с выпуском через дифференциальный клапан (а,б) или золотник (в,г):  $H, Z$  – плунжерная и штуцерная полости;  $A, D$  – полости аккумулятора и дифференциального клапана; 1,2 – дозирующий и нагнетающий клапана; 3,4 – разделительный и нагнетательный клапана; 5 – газовый поршень; 6 – сжатый воздух; 7 – тарельчатая пружина; 8 – амортизирующие пластины; 9 – шайба амортизатора; 10 – золотник; 11 – сложный клапан; 12 – его дроссель.

Указанное свойство монотонности положено в основу алгоритма разностного метода, описанного в [9].

В свободнопоршневом дизельном двигателе (СПД), как правило, используется топливная аппаратура аккумулирующего типа (рис.7). В топливном насосе устанавливается два плунжера – дозирующий, приводимый в движение от шестерни синхронизации поршней, и нагнетающий, имеющий автономный привод от тарельчатой пружины или газового поршня. В работах [4,12] описаны методы гидродинамического расчёта для двух насосов такого типа. К сожалению, указанные методы пригодны только для этих насосов и не могут использоваться для анализа вновь проектируемых образцов, имеющих усложнённую гидравлическую схему.

Универсальная схема насоса приведена на рис.8. Математическая модель, составленная по этой схеме, включает несколько групп уравнений.

Уравнения неразрывности для полостей  $H, A, D$  и  $Z$ , соответственно:

$$\alpha V_n dp_n / dt = f_n c_n - f_p c_p + (f_{ad} + f_{dd})c_d - \\ - \mu f_{o.e} s(p_n - p_o) - \mu f_p s(p_n - p_{ak}) - Q_{HD} (Q_{HA});$$

$$\alpha V_{ak} dp_{ak} / dt = f_p c_p - f_{ak} c_{ak} - f_{ad} c_d - \\ - \mu f_{a.d} s(p_{ak} - p_d) + \mu f_p s(p_n - p_{ak}) + Q_{HA} - Q_{AB};$$

$$\alpha V_d dp_d / dt = -f_{dd} c_d - f_k c_k + \mu f_{ad} s(p_{ak} - p_d) - \mu f_k s(p_d - p_z) + Q_{HD} - Q_{DB};$$

$$\alpha V_z dp_z / dt = f_k c_k + \mu f_k s(p_d - p_z) - i_\phi \cdot f_m / (a\rho) \cdot (p_z - p_{ocm} - 2 \cdot w(t)),$$

где  $p_i, V_i, i \in \{n, ak, d, z\}$  – давления и объёмы в полостях;  $f_m, f_n, f_{ak}, f_p, f_k, f_{ad}, f_{dd}$  – площади поперечного сечения трубопровода, дозирующего и

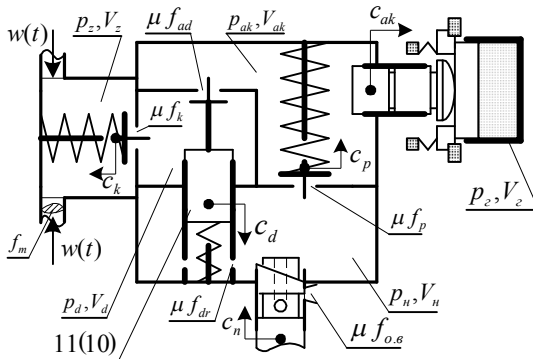


Рис.8 – Универсальная расчётная схема.

нагнетающего плунжеров, перепускного и нагнетательного клапанов, сложного клапана по запорному конусу и его дифференциальной площадке (для рис.7 б – наоборот);  $\mu f_p, \mu f_k, \mu f_{ad}$  – эффективные проходные площади для перепускного, нагнетательного и сложного клапанов;  $Q_{HD}, Q_{HA}, Q_{DB}, Q_{AB}$  – объёмные скорости перетекания

через прецизионные зазоры;  $i_\phi$  – число трубопроводов (здесь  $i_\phi = 2$ , см. рис.2 в).

Уравнения движения нагнетательного, перепускного и дифференциального клапана, соответственно:

$$m_k dc_k / dt = f_k (p_d - p_z) - F_{np.k}; \quad dh_k / dt = c_k; \quad 0 \leq h_k \leq h_{k.max};$$

$$m_p dc_p / dt = f_p (p_n - p_{ak}) - F_{np.p}; \quad dh_p / dt = c_p; \quad 0 \leq h_p \leq h_{p.max};$$

$$m_d \frac{dc_d}{dt} = f_{ad} (p_{ak} - p_n) + f_{dd} (p_d - p_n) - k_d |c_d| c_d - F_{np.d}; \quad \frac{dh_d}{dt} = c_k; \quad 0 \leq h_d \leq h_{d.max},$$

где  $m_k, m_p, m_d$  – массы клапанов;  $h_k, h_{k.max}, h_p, h_{p.max}, h_d, h_{d.max}$  – их текущие и максимальные перемещения (до упоров);  $F_{np.k}, F_{np.p}, F_{np.d}$  – усилия их пружин;  $k_d$  – коэффициент гидравлического сопротивления дросселя,

$$k_d = (\rho / 2) \cdot (f_{ad} + f_{dd})^2 / \mu f_{dr},$$

$\mu f_{dr}$  – эффективная площадь дросселя дифференциального клапана.

Уравнения движения нагнетающего плунжера:

при  $h_{ak} \geq 0 - (m_{ak} + m_{nop}) dc_{ak} / dt = f_{ak} p_{ak} - F_{ak}; \quad dh_{ak} / dt = c_{ak};$

при  $h_{ak} < 0 - (m_{ak} + m_{nop} + m_{uu}) dc_{ak} / dt = f_{ak} p_{ak} - F_{ak} + F_{np.am}; \quad dh_{ak} / dt = c_{ak},$

где  $h_{ak}$  – перемещение плунжера;  $m_{ak}, m_{nop}$  – массы плунжера и газового поршня (или подвижной опоры для привода от тарельчатой пружины);  $m_{uu}$  – масса шайбы амортизатора;  $F_{ak}$  – сила реакции аккумулятора, для привода от газового поршня,

$$F_{ak} = f_{nop} \cdot p_z \cdot (V_z / (V_z - f_{nop} \cdot h_{ak}))^k,$$

$f_{nop}$  – площадь поршня;  $p_z, V_z$  – начальные значения давления и объёма газа;  $k = 1.4$  – показатель адиабаты;  $F_{np.am}$  – сила реакции амортизатора.

При составлении уравнений использована модель неупругого удара поршня (или подвижной опоры пружины) по шайбе амортизатора. Анализ условий движения плунжера показал, что его отрыв от деталей привода, возникающий в момент удара, ликвидируется практически мгновенно, и поэтому им допустимо пренебречь. Следовательно, скорость движения плунжера изменится в момент такого удара скачкообразно в соответствии с *законом сохранения импульса*, то есть, если  $h_{ak}(t_o) = 0; c_{ak}(t_o) < 0$ , то

$$c_{ak}(t_o + 0) = c_{ak}(t_o) \cdot (m_{ak} + m_{nop}) / (m_{ak} + m_{nop} + m_{uu}).$$

При отрыве поршня от амортизатора скорость плунжера остаётся непрерывной. Механическая энергия, накопленная в пластинах амортизатора, к моменту очередного удара поршня успевает рассеяться. Для моделирования изменения реакции амортизатора используется квазистатическая формула

$$F_{np,ам} = z_{ам} \cdot (h_{ам,о} - h_{ак}),$$

где  $z_{ам}$ ,  $h_{ам,о}$  – его коэффициент жёсткости и предварительная деформация.

**Модернизированный разностный алгоритм для насоса СПД.** Если 12-ть динамических параметров узла считать компонентами некоторого вектора  $\vec{X}(t)$ , то эти уравнения можно записать в следующем компактном виде:

$$d\vec{X}/dt = \Phi(\vec{X}, t). \tag{19}$$

Система обыкновенных дифференциальных уравнений (19) является жёсткой (то есть соответствующая ей линеаризованная система имеет очень большие, по модулю, характеристические числа [1,2]). Поэтому для интегрирования этих уравнений была использована неявная расчётная схема, именуемая *интерполяционной формулой Адамса*:

$$\vec{X}(t + \Delta t) - \vec{X}(t) = (\Delta t / 2) \cdot [\Phi(\vec{X}(t), t) + \Phi(\vec{X}(t + \Delta t), t + \Delta t)], \tag{20}$$

где  $\Delta t$  – шаг по времени;  $t, t + \Delta t$  – начало и конец расчётного промежутка.

Вектор-функция  $\Phi(\vec{X})$  содержит нелинейные компоненты, поэтому для нахождения из системы (20) искомого вектора  $\vec{X}(t + \Delta t)$  пришлось разрабатывать специальный метод последовательного исключения неизвестных.

Из анализа приведенных уравнений следует, что если задать величины  $\Delta P_p, \Delta P_k$  и  $\Delta P_d$  перепадов давлений на клапанах, то можно определить скорости и перемещения этих клапанов, а затем скорость и перемещение нагнетающего плунжера и давления во всех полостях насоса.

В результате получаем новые величины перепадов давлений  $\Delta P_p^*, \Delta P_k^*$  и  $\Delta P_d^*$ , которые, вообще говоря, будут отличаться от заданных первоначально, образуя некоторые функции от них, например,

$$\Delta P_p^* = \Phi_1(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d), \quad \Delta P_k^* = \Phi_2(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d), \text{ и т.д.}$$

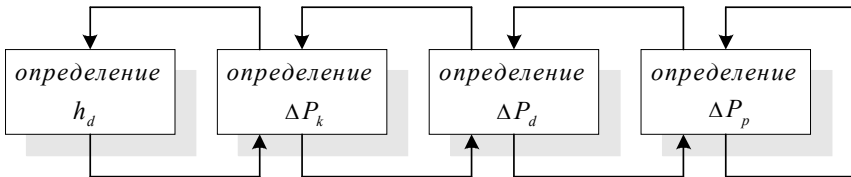


Рис. 9 – Принципиальная схема алгоритма расчёта насоса СПД.

Ясно, что искомому решению отвечает совпадение этих величин. Таким образом, мы приходим к системе уравнений

$$\Delta P_p = \Phi_1(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d); \Delta P_k = \Phi_2(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d); \Delta P_d = \Phi_3(\Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d).$$

Анализ уравнений этой системы показал, что в данном случае для обеспечения условия монотонности к этим трём неизвестным необходимо добавить четвёртое – перемещение дифференциального клапана  $h_d$ . Алгоритм решения полученной системы уравнений

$$\{ h_d = \Phi_0(h_d, \Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d); \dots; \Delta P_d = \Phi_3(h_d, \Delta P_p, \Delta P_k, \Delta P_d) \}$$

содержит четыре вложенных цикла (рис. 9), а не один, как для расчёта насоса стандартного типа. Если учесть, что на каждом цикле для достижения требуемой точности используется в среднем 6 итераций, то такое увеличение числа циклов должно негативно сказаться на эффективности предлагаемого метода.

Действительно, при таких условиях продолжительность одного расчёта должна была увеличиваться в 200 раз, однако, как показала практика, столь большого увеличения продолжительности расчёта не происходит. Поскольку на большей части работы насоса отдельные полости (группы полостей) разобщены, а дифференциальный клапан – неподвижен. Поэтому итерации в основном проводятся по одному или двум, реже – по трём циклам, и совсем редко приходится использовать все четыре цикла.

**Основные практические результаты работы.** Алгоритм модернизированного разностного метода был впервые использован в ходе выполнения опытно – конструкторских работ по созданию и доводке топливной аппаратуры СПД; подробный отчёт дан в [13]. Алгоритмы универсального и разностного методов гидродинамического расчёта клапанных узлов после некоторых изменений, описанных в [14], применены при разработке дизельной топливной аппаратуры с электронным управлением впрыскивания (рис.10).

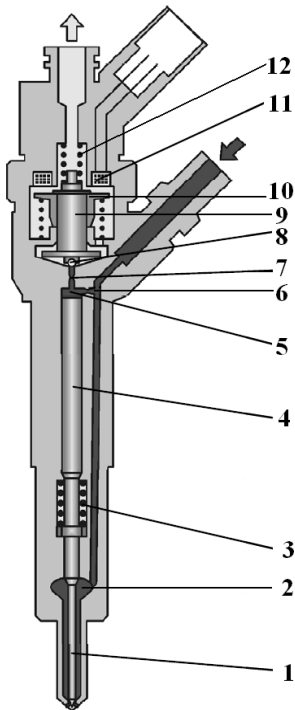


Рис.10 – Электрогидравлическая форсунка: 1 – игла, 2 – карман распылителя, 3 – пружина иглы, 4 – мультипликатор, 5 – камера управления, 6,7 – впускной и выпускной жиклеры, 8 – шариковый клапан, 9 – стойка клапана, 10 – якорь, 11 – электромагнит, 12 – пружина клапана.



**Список литературы:** 1. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Линейные и линеаризованные матричные модели для анализа динамики и устойчивости клапанных гидромеханических узлов // Вестник НТУ «ХПИ» – Харьков, 2012.– Вып.2. – С.74-87. 2. Григорьев А.Л., Геворкян Ю.Л. Абсолютная и относительная динамическая устойчивость гидромеханических узлов // там же – С.88-106. 3. Григорьев А.Л., Врублевский А.Н., Литвин С.Н. и др. Использование модулятора импульсов давления для интенсификации впрыскивания запальной порции дизельного топлива в цилиндры газодизеля // Вестник ХГПУ – Вып.85, 1999.– С.3-12. 4. Карась М.Л. Разработка и исследование топливopодpающей аппаратуры для высокофорсированного свободнопоршневого двигателя. - Автореферат дис ... канд. техн. наук – Харьков, 1992. – 19 с. 5. Розенблит Г.Б., Григорьев А.Л., Зонов В.Д. Анализ причин и определение условий, обеспечивающих герметичность плоского дифференциального клапана форсунки // Двигатели внутреннего сгорания: Вестник ХГПУ – Вып.58, 1999. – С.82-91. 6. Григорьев А.Л. Выбор метода интегрирования уравнений гидромеханического узла дизельной топливной аппаратуры // Вестник НТУ «ХПИ». – Харьков: НТУ "ХПИ", 2001. – Вып.2. - С.73-87. 7. Григорьев А.Л. Уточнённый метод учёта гидравлического сопротивления трубопровода при гидродинамических расчётах топливной аппаратуры дизелей // Двигатели внутреннего сгорания: Вестник ХГПУ. – Вып.58, 1999. – С. 58-68. 8. Грунауэр А.А., Тартаковский И.И., Григорьев А.Л. О связи силы пружины с законом её деформирования // Теория механизмов и машин. – Харьков: Вища школа. – Вып. 39, 1985. – С.7-22. 9. Фомин Ю.Я. Гидродинамический расчёт топливных систем дизелей с использованием ЭЦВМ. – М.: Машиностроение, 1973. – 144 с. 10. Бахвалов Н.С. Численные методы (анализ, алгебра, обыкновенные дифференциальные уравнения). – М.: Наука, 1973. – 631 с. 11. Геворкян Ю.Л., Григорьев А.Л. Основы линейной алгебры и её приложений в технике / Учебник. – Харьков: НТУ"ХПИ", 2002.–542 с. 12. Григорьев А.Л. Особенности гидродинамического расчёта топливного насоса высокого давления с подпружиненным аккумулярующим плунжером // Вестник ХГПУ. – Харьков. – Вып. 68, 1999 – С. 3-10. 13. Григорьев А.Л., Хесин А.Я. Оптимизация параметров аккумулярующей топливной аппаратуры с пружинным приводом плунжера // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. – Харьков: ХГПУ, 2000. – Вып.89. – С.97-104. 14. Врублевский А.Н., Григорьев А.Л., Грицюк А.В., и др. Особенности математического моделирования гидромеханических процессов электрогидравлической форсунки // Двигатели внутреннего сгорания. – Харьков, 2007.– №1. – С.44-52.

*Поступила в редколлегию 25.10.2012*

---

УДК 539.1

**Алгоритмы интегрирования жестких уравнений клапанных гидромеханических узлов / А.Л. Григорьев, Ю.Л. Геворкян // Вісник НТУ «ХПІ». Серія «Математичне моделювання в техніці та технологіях». – Харків: НТУ «ХПІ». – 2012. – №54 (960). – С.39–55. – Бібліогр.: 14 назв.**

Описаний універсальний метод динамічного розрахунку гідромеханічного вузла, оснащеного автоматичними клапанами різних типів. Особливостями методу є використання матричних позначень для запису жорсткої системи диференціальних рівнянь гідромеханіки та неявної консервативної схеми для її інтегрування.

**Ключові слова:** гідромеханічний вузол, гідродинамічний розрахунок, жорсткі рівняння, схема Адамса, автоматичний клапан.

Described a generic method of dynamic analysis of hydromechanical unit, equipped with automatic valves of different types. Features of the method are to use a matrix notation for writing a rigid system of differential equations of hydrodynamics and implicit conservative scheme for its integration.

**Key words:** hydromechanical unit, hydrodynamic calculation, hard equation scheme Adams, automatic valve.