

**Е.Г. ЯНЮТИН**, д-р техн. наук, проф., ХГУПТ, Харьков;  
**П.А. ЕГОРОВ**, аспирант, ХНАДУ, Харьков

## **КОЛЕБАНИЯ МЕМБРАНЫ, КОНТАКТИРУЮЩЕЙ С УПРУГИМ ОСНОВАНИЕМ, ПРИ ИМПУЛЬСНОМ НАГРУЖЕНИИ**

Механическая система состоит из прямоугольной мембраны и присоединенных масс. Мембрана лежит на упругом основании и закреплена по контуру. Решение прямой задачи (поиск перемещений точек мембраны) осуществляется с использованием разложения искомых функций в ряды Фурье. Решение обратной задачи (определение неизвестной нагрузки, которая вызвала колебания системы) производится путем численного решения системы интегральных уравнений с использованием метода регуляризации.

**Ключевые слова:** мембрана, упругое основание, масса, нагрузка, контактная сила, перемещение, интегральное уравнение, идентификация, метод регуляризации.

**Введение.** Развитие современного машиностроения вызывает необходимость анализа напряженно-деформированного состояния создаваемых конструкций на этапах проектирования, экспериментальных исследований и доводки. Указанная проблема может быть решена с помощью построения математических моделей исследуемых систем различной степени сложности. Изучая сложные динамические системы, удобно выделять основной объект и исследовать его на основе некоторой теории, а инерционное воздействие контактирующих с ним объектов моделировать с помощью присоединенных распределенных или сосредоточенных масс, а также, например, упругих оснований.

Большинство задач по исследованию напряженно-деформированного состояния мембран и тонких пластин уже решены. В [1] были получены решения задач о нестационарных колебаниях круглой и прямоугольной мембран и задач идентификации неизвестных составляющих нагрузок, воздействующих на мембраны. В [2] было рассмотрено воздействие сосредоточенной нестационарной нагрузки на мембрану-полосу. В работе [3] было получено решение прямой и обратной задач для мембраны, несущей сосредоточенные массы. Более сложный случай нагружения, когда мембрана располагается на упругом основании, в рамках решения обратных задач никем не рассматривался. Настоящая работа развивает основные аспекты статьи [3].

**Постановка задачи.** Исследуемая система состоит из расположенной на упругом основании, закрепленной по контуру прямоугольной мембраны, которая несет на своей поверхности некоторые массы. В данной статье изучаются колебания мембраны с двумя присоединенными массами, причём одна

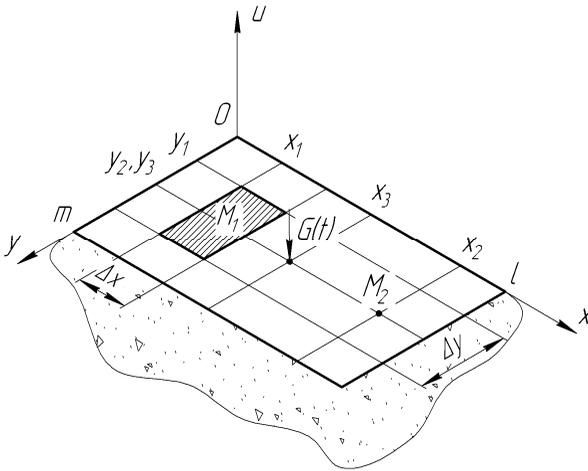


Рис. 1 – Схема нагружения мембраны.

из масс является распределенной (площадь распределения массы малая по сравнению с площадью мембраны), другая – сосредоточенной. Колебания изучаемой системы вызывает поперечная сосредоточенная импульсная нагрузка. Целью исследования является решение прямой и обратной задач, характерных для математической физики.

**Решение прямой задачи.** В качестве исходного уравнения для изучения колебаний точек мембраны примем известное двумерное волновое уравнение свободных колебаний [4]. Для полного описания исследуемой системы необходимо исходное уравнение дополнять некоторыми членами.

Воздействие присоединенных масс можно учесть при условном отсоединении масс от поверхности мембраны, если ввести эквивалентные контактные силы

$$R_1(x, y, t) = (H(x - x_1) - H(x - x_1 - \Delta x))H((y - y_1) - H(y - y_1 - \Delta y))R_1(t),$$

$$R_2(x, y, t) = \delta(x - x_2)\delta(y - y_2)R_2(t), \quad (1)$$

при этом перемещения масс равны перемещениям соответствующих точек мембраны

$$u_{M1}(t) = u(x_1, y_1, t),$$

$$u_{M2}(t) = u(x_2, y_2, t), \quad (2)$$

Предполагается, что величины  $\Delta x$  и  $\Delta y$  малы по сравнению с  $l$  и  $m$ .

Рассмотрим влияние упругого основания на основе трехпараметрической модели Власова-Леонтьева [5]:

$$R_0(x, y, t) = 2t_f \cdot \nabla^2 u(x, y, t) + k_f \cdot u(x, y, t) + m_f \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad (3)$$

где

$$t_f = \frac{E_0}{1 - \nu_0^2} \int_0^H (\psi')^2(z) dz, \quad k_f = \frac{E_0}{4(1 + \nu_0)} \int_0^H \psi^2(z) dz$$

– коэффициенты, характеризующие работу упругого основания на сжатие и

сдвиг;  $m_f = \rho_0 \int_0^H \psi^2(z) dz$  – приведенная масса упругого основания. Здесь

$E_0$ ,  $\nu_0$ ,  $\rho_0$  – модуль упругости, коэффициент Пуассона и плотность материала основания.

Примем, что затухание осадок по глубине основания происходит по следующему закону:

$$\psi(z) = \frac{\sinh(\gamma(H-z))}{\sinh(\gamma H)}, \quad (4)$$

где  $\gamma$  – коэффициент, характеризующий быстроту затухания осадок по глубине основания;  $H$  – толщина основания.

Таким образом, дифференциальное уравнение колебаний исследуемой системы «мембрана-основание-массы» может быть записано в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{1}{\rho} R_0(x, y, t) + \frac{1}{\rho} R_1(x, y, t) + \frac{1}{\rho} R_2(x, y, t) - G(x, y, t) = a^2 \cdot \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (5)$$

Дифференциальное уравнение в частных производных естественно представить в виде следующего двойного ряда Фурье:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_{k,n}(t) \cdot \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m}. \quad (6)$$

После подстановки разложения (6) в уравнение (5) будем иметь:

$$u(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \cdot \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \right) \sin \frac{k\pi x}{l} \cdot \sin \frac{n\pi y}{m} \right), \quad (7)$$

где

$$C_{1k,n} = \frac{4}{(\rho + m_f)kn\pi^2} \left( \cos \frac{k\pi x_1}{l} - \cos \frac{k\pi(x_1 + \Delta x)}{l} \right) \left( \cos \frac{k\pi y_1}{m} - \cos \frac{k\pi(y_1 + \Delta y)}{m} \right),$$

$$C_{2k,n} = \frac{4}{(\rho + m_f)lm} \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m}, \quad C_{3k,n} = -\frac{4}{(\rho + m_f)lm} \sin \frac{k\pi x_3}{l} \sin \frac{n\pi y_3}{m},$$

$$\lambda_{k,n} = \sqrt{\left( \pi^2 \cdot (2t_f + a^2 \rho) \cdot \left( \frac{k^2}{l^2} + \frac{n^2}{m^2} \right) + k_f \right) / (\rho + m_f)}.$$

В формуле (7) учтены начальные и граничные условия для мембраны. Перемещения массы, условно отсоединенной от мембраны, выражаются следующей формулой (см. статью [3]):

$$u_M(t) = -\frac{1}{M} \cdot \int_0^t (t-\tau) R(\tau) d\tau. \quad (8)$$

Укажем, что, как и в [3], получаем некоторую систему интегральных соотношений для неизвестных функций  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$ :

$$\left\{ \begin{aligned} -\frac{1}{M_1} \int_0^t R_1(\tau)(t-\tau) d\tau &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ &\times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \left. \right) \sin \frac{k\pi x_1}{l} \sin \frac{n\pi y_1}{m}; \\ -\frac{1}{M_2} \int_0^t R_2(\tau)(t-\tau) d\tau &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \left( \frac{C_{1k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_1(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{2k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t R_2(\tau) \times \right. \right. \\ &\times \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt + \frac{C_{3k,n}}{\lambda_{k,n}} \int_0^t G(\tau) \cdot \sin(\lambda_{k,n}(t-\tau)) dt \left. \right) \sin \frac{k\pi x_2}{l} \sin \frac{n\pi y_2}{m}. \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Воспользуемся одним из приближенных методов решения *уравнений Вольтерра* (9), основанным на замене интегралов конечными суммами. Полученную систему алгебраических уравнений представим в матричном виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_{11} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{12} = \mathbf{f}_1, \\ \mathbf{R}_1 \cdot \mathbf{A}_{21} + \mathbf{R}_2 \cdot \mathbf{A}_{22} = \mathbf{f}_2. \end{cases} \quad (10)$$

Решение системы алгебраических уравнений будем искать с помощью *метода Крамера*:

$$\mathbf{R}_1 = \frac{\Delta}{\Delta_1}, \quad \mathbf{R}_2 = \frac{\Delta}{\Delta_2}, \quad (11)$$

где  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  – матрицы, найденные по правилам нахождения определителя соответствующих блочных матриц  $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \mathbf{f}_1 & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{f}_2 & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ ,  $\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{f}_1 \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{f}_2 \end{pmatrix}$ .

Определив неизвестные функции  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$ , входящие в уравнение (5), можно рассчитать значения прогибов в любой точке мембраны с течением времени.

При численных расчетах использовались следующие исходные данные:

- поверхностная плотность материала мембраны  $\rho = 11.775 \text{ кг/м}^2$ ;
- скорость распространения волн деформации в мембране  $a = 35 \text{ м/с}$ ;
- габариты мембраны  $l = 0.6 \text{ м}$ ,  $m = 0.4 \text{ м}$ ;
- величины присоединенных масс и координаты их расположения

$$M_1 = 1 \text{ кг} \quad (x_1 = 0.1 \text{ м}, y_1 = 0.1 \text{ м}, \Delta x = 0.01 \text{ м}, \Delta y = 0.02 \text{ м}), \quad M_2 = 2 \text{ кг} \\ (x_2 = 0.5 \text{ м}, y_2 = 0.2 \text{ м}).$$

Характеристики возмущающей нагрузки: интенсивность  $q = 100$  Н, изменение во времени по закону «синуса» с циклической частотой колебаний  $\omega_0 = 100 \text{ с}^{-1}$  в течение одного полупериода, координаты приложения  $x_3 = 0.3$  м,  $y_3 = 0.2$  м.

На рис. 2 представлены графики изменения во времени прогибов мембраны для случаев расположения мембраны на основании и без основания.

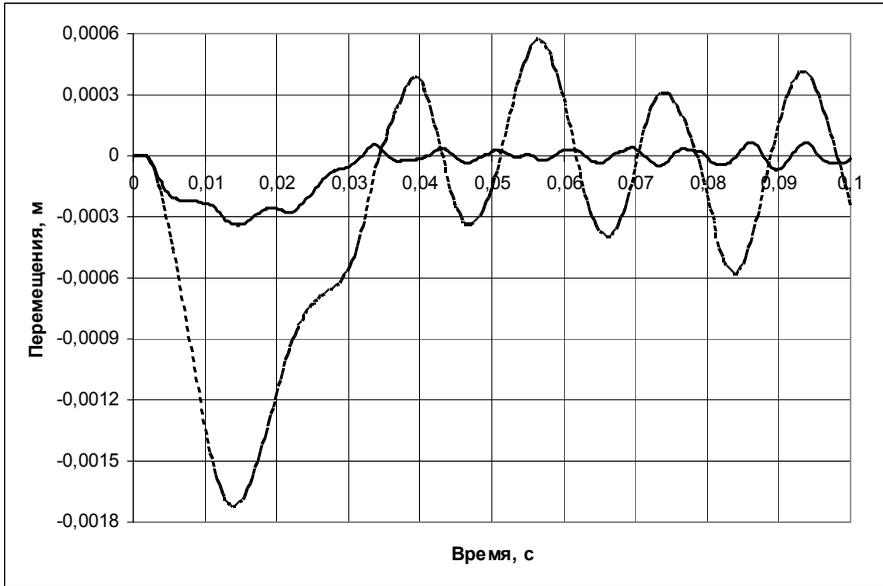


Рис. 2 – Графики колебаний точки мембраны.

Прогибы исследуются в точке, расположенной вблизи приложения нагрузки. Пунктирной кривой соответствуют перемещения точки мембраны без учета влияния основания, сплошной кривой – перемещения точки мембраны при наличии упругого основания. Полученные кривые свидетельствуют о снижении амплитуды колебаний точек мембраны при наличии упругого основания.

**Решение обратной задачи.** Рассмотрим решение задачи по идентификации закона изменения нагрузки, действующей на мембрану. При решении обратной задачи перемещения одной из точек мембраны являются заданными. Информацию о перемещениях точки мембраны можно получить, например, экспериментально или при решении соответствующей прямой задачи. Для решения поставленной задачи необходимо решить систему интегральных уравнений вида, подобного (9). Система интегральных уравнений будет включать уравнение для перемещений точки мембраны, положения ко-

торой являются заданными, и уравнения, составленные на основе равенства перемещений масс перемещениям точек мембраны, соответствующих расположению этих масс.

Систему интегральных уравнений Вольтера решим численно. При решении используем один из численных способов решения уравнений Вольтерра [6]. В матричном виде система может быть записана следующим образом:

$$\begin{cases} \mathbf{A}_{11} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{13} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{u}_e, \\ \mathbf{A}_{21} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{22} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{23} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{A}_{31} \cdot \mathbf{R}_1 + \mathbf{A}_{32} \cdot \mathbf{R}_2 + \mathbf{A}_{33} \cdot \mathbf{G} = \mathbf{0}. \end{cases} \quad (12)$$

Решение системы уравнений (12) будем искать методом, подобным использованному при решении прямой задачи. В силу некорректности поставленной задачи необходимо применять специальные сглаживающие алгоритмы. Для построения устойчивого решения воспользуемся методом регуляризации А.Н.Тихонова [6]. Упомянутое решение запишем в виде:

$$\begin{cases} \mathbf{R}_1 = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_1, \\ \mathbf{R}_2 = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_2, \\ \mathbf{G} = (\Delta^T \cdot \Delta + \alpha \cdot \mathbf{C})^{-1} \cdot \Delta^T \cdot \Delta_3. \end{cases} \quad (13)$$

где  $\Delta$ ,  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  – матрицы, найденные по правилам нахождения определителя соответствующих блочных матриц

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{u}_e & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{u}_e & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{0} & \mathbf{A}_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{u}_e \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{31} & \mathbf{A}_{32} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$\alpha$  – параметр регуляризации;  $\mathbf{C}$  – трехдиагональная матрица следующего вида:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{1}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\Delta t^2} & 1 + \frac{2}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\Delta t^2} & 1 + \frac{2}{\Delta t^2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 + \frac{2}{\Delta t^2} & -\frac{1}{\Delta t^2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{1}{\Delta t^2} & 1 + \frac{1}{\Delta t^2} \end{bmatrix}.$$

Для отыскания неизвестной возмущающей нагрузки воспользуемся ра-

нее принятыми исходными данными и вычисленными при решении прямой задачи перемещениями точки мембраны (рис. 2).

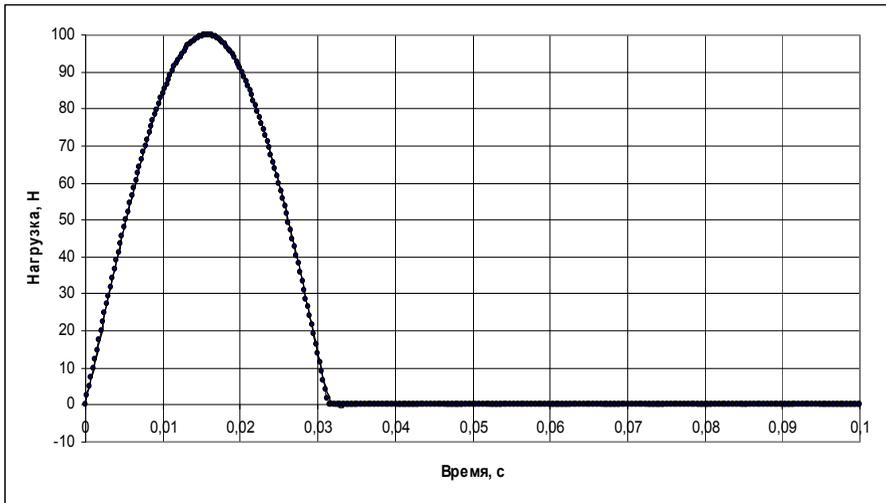


Рис. 3 – Графики приложенной и идентифицированной нагрузок.

Кривой, состоящей из точек, на рис. 3 обозначены значения возмущающей нагрузки, которая принималась в качестве известной при решении прямой задачи, тонкой сплошной кривой – значения нагрузки, идентифицированной с использованием метода регуляризации.

**Выводы.** В данной статье рассмотрены нестационарные колебания мембраны на упругом основании с несколькими (двумя) массами, причем геометрические размеры одной из масс не являются бесконечно малыми. В процессе построения решения обратной задачи идентифицирована нагрузка, вызвавшая нестационарные колебания мембраны, лежащей на упругом основании.

Расположение мембраны на упругом основании, как и присоединение масс, снижает амплитуду колебаний ее точек, что может быть использовано при проектировании конструкций, на которые воздействуют импульсные нагрузки.

**Список литературы:** 1. Янютин Е.Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е.Г. Янютин., И.В. Янчевский, А.В. Воропай, А.С. Шарпаната // Монография. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с. 2. Янютин Е.Г. Определение влияния сосредоточенного нестационарного воздействия на мембрану-полосу / Е. Г. Янютин, Н. И. Кучерова // Вестник Харьковского национального автомобильно-дорожного университета. – 2006. – № 32. – С. 80-83. 3. Янютин Е. Г. Нестационарные колебания мембраны, несущей несколько сосредоточенных масс / Е. Г. Янютин, П. А. Егоров // Вісник НТУ «ХПІ». – 2012. – № 54. – С. 209-216. 4. Араманович И.Г. Уравнения

математической физики / *И. Г. Араманович, В. И. Левин.* — М. : Наука, 1969. — 288 с. **5.** *Власов В. З.* Балки, плиты и оболочки на упругом основании / *В. З. Власов, Н. Н. Леонтьев.* — М. : Физматгиз, 1960. — 491 с. **6.** *Верлань А. Ф.* Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы : справочное пособие / *А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков.* — Киев : Наук. думка, 1986. — 544 с.

*Поступила в редколлегию 13.05.2013*

---

УДК 539.3

**Колебания мембраны, контактирующей с упругим основанием, при импульсном нагружении** / *Е. Г. Янютин, П. А. Егоров* // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. — Харків: НТУ «ХПІ», 2013. — №37 (1010). — С. 223 — 230. Бібліогр.: 6 назв.

Механічна система складається із прямокутної мембрани та приєднаних до неї мас. Мембрана лежить на пружній основі і є закріпленою вздовж контуру. Розв'язання прямої задачі (пошук переміщень точок мембрани) здійснюється з використанням розкладення шуканих функцій в ряди Фур'є. Розв'язання оберненої задачі (визначення невідомого навантаження, яке викликало коливання системи) відбувається шляхом чисельного розв'язання системи інтегральних рівнянь з використанням метода регуляризації.

**Ключевые слова:** мембрана, пружна основа, маса, навантаження, контактна сила, переміщення, інтегральне рівняння, ідентифікація, метод регуляризації.

Mechanical system consists of the rectangular membrane and connected to it masses. The membrane lies on the elastic foundation and is fixed over the contour. The solving of the direct problem (the search of displacements of membrane points) is made with using Fourier series expansion of the desired function. The solving of the inverse problem (the identification of the unknown load, which caused mechanical system vibrations) is made by numerical solution of the integral equations set with using regularization method.

**Key words:** membrane, elastic foundation, the weight of the load, the contact force, displacement, integral equation, identification, regularization method.