

літехнічного університету «Харківський політехнічний інститут». Збірник наукових праць. Тематичний випуск: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ». – 2011 – №42 – С.82 – 88. 5. *Koshovy G.I.* Systems approach to investigating prefractal diffraction gratings. *Telecommunications and Radio Engineering*. №71(6), 2012, 487 – 500pp. 6. *Панасюк В.В., Саврук М.П., Назарчук З.Т.* Метод сингулярних інтегральних уравнений в двумерных задачах дифракции. Киев. Наук. Думка, 1984, 343с. 7. *Лифанов И.К.* Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент (в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн). – М.: ТОО «Янус», 1995. – 520с.

Надійшла до редколегії 07.03.2014

УДК 513.85

Метод інтегральних рівнянь в задачах розсіювання акустичних хвиль дофрактальними ґратками / А. Г. Кошовий, Г. І. Кошовий // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 94 – 99. Бібліогр.: 7 назв. – ISSN 2222-0631.

На основе метода интегральных уравнений приведена обобщенная математическая модель процесса рассеяния акустической волны предфрактальными решетками. Подробно исследуется случай акустически жесткой решетки. Предложена новая математическая модель в виде особых интегральных уравнений, к которым уже можно применять прямые численные методы. Получена микрополосковая асимптотика.

Ключевые слова: акустические волны, задача рассеивания, дофрактальная сетка, интегральные уравнения, совершенное множество.

UDC 513.85

Method of integral equations for the problems of scattering of acoustic waves by prefractal gratings / A. G. Koshoviy, G.I. Koshoviy // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 94 – 99. Bibliog.: 7 titles. – ISSN 2222-0631.

A mathematical model of scattering of acoustic waves by prefractal gratings, based on the integral equations method, has been summarized. The case of an acoustically rigid grating has been studied in details. A new mathematical model in the form of singular integral equations, to which it is possible to apply direct numerical methods, is offered. A microstrip asymptotics is obtained.

Key words: acoustic waves, diffraction problem, prefractal grating, integral equations, perfect set.

УДК 517.07

Л.В. КУРПА, д-р техн. наук, проф., НТУ «ХПІ»;
А.А. ОСЕТРОВ, ст. викл., НТУ «ХПІ»;
Т.В. ШМАТКО, канд. техн. наук, доц. НТУ «ХПІ»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНЫХ ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА R-ФУНКЦИЙ И СПЛАЙН-АППРОКСИМАЦИИ

Предложен метод исследования спектра собственных частот и форм колебаний пологих оболочек неканонических форм в плане, изготовленных из функционально-градиентных материалов. Метод основывается на совместном применении уточненной теории первого порядка типа Ти-

© Л. В. Курпа, А. А. Осетров, Т. В. Шматко, 2014

мошенко, вариационного метода Ритца, теории R -функций (RFM) и сплайн-аппроксимации. Предложенный метод позволил провести исследование влияния вида граничных условий, кривизны и показателя степени объемной доли материала на спектр собственных частот и форм колебаний оболочек со сложной формой плана. Результаты, представленные в работе, получены как с помощью полиномиальной, так и с помощью сплайн-аппроксимации. Для подтверждения достоверности результатов приведено их сравнение с известными ранее в литературе для оболочек с прямоугольной формой плана.

Ключевые слова: функционально-градиентные материалы (ФГМ), пологие оболочки, теория R -функций (RFM), сплайн-аппроксимация, теория типа Тимошенко, спектр собственных частот, сложная форма плана.

Введение. Функционально-градиентные материалы (ФГМ) находят широкое применение на практике и, прежде всего, в авиационной и ракетно-космической промышленности. По своей структуре ФГМ обычно состоят из смеси микроскопических частиц металла и керамики. Посредством варьирования объемными долями материалов удастся получить плавное изменение свойств от одной лицевой поверхности к другой. Такое изменение свойств материала позволяет существенно сократить уровни концентрации напряжений в элементах конструкций при действии различных факторов, например, при воздействии температуры. Изготовление тонкостенных элементов конструкций из ФГМ приводит к необходимости создания эффективных методов моделирования и расчета их динамического поведения.

Анализ последних достижений. К числу первых публикаций, посвященных изучению свойств функционально-градиентных материалов, можно отнести работы *M. Yamanoushi* и др. [1] и *M. Koizumi* [2]. Теория пластин и оболочек, изготовленных из ФГМ, интенсивно развивается в последние годы, что подтверждает большее число появившихся работ [3 – 10] и др. Как следует из обзора литературы, детально изучаются вопросы линейного и нелинейного динамического и статического анализа функционально-градиентных пластин и оболочек. При этом наибольшее внимание уделено объектам прямоугольной или круглой формы, свободно опертых или жестко защемленных по всему контуру. Практически отсутствуют работы, в которых исследуются пластины и оболочки со сложной формой плана. Поэтому разработка эффективных методов моделирования динамического поведения функционально-градиентных оболочек и пластин со сложной формой плана и различными видами граничных условий является актуальной.

В настоящей работе из общего класса оболочек выбраны пологие оболочки. Для решения задач о свободных колебаниях пологих оболочек из ФГМ предлагается использовать теорию R -функций и вариационный метод Ритца. Как и в случае анизотропных и многослойных пологих оболочек, применение метода R -функций (RFM) [11] в сочетании с вариационными методами позволяет исследовать функционально-градиентные пологие оболочки и пластины различной геометрической формы при различных способах их закрепления и степени искривленности.

Математическая постановка задачи. Будем рассматривать пологие

оболочки постоянной толщины h , изготовленные из смеси керамики и металла. Механические свойства композита непрерывно изменяются вдоль толщины оболочки таким образом, что верхняя часть панели ($z = h/2$) является керамической, а нижняя ($z = -h/2$) – металлической. Как известно [3 - 9], материальные свойства ФГМ структур зависят от объемных частей составляющих материалов и определяются для двух составляющих следующим образом:

$$P(z) = (P_c - P_m)V + P_m, \quad (1)$$

где V выражает объемную долю керамики и определяется формулой:

$$V = \left(\frac{z}{h} + \frac{1}{2} \right)^k. \quad (2)$$

Выражение (1) представляет собой общую формулу для определения модуля упругости, коэффициента Пуассона и плотности композита, P_c, P_m – соответствующие характеристики керамики и металла. Показатель степени объемной доли керамики k в формуле (2) может изменяться от нуля до бесконечности, то есть $0 \leq k < \infty$. При этом если $k = 0$, то структура является полностью керамической, если же $k = \infty$, то – металлической.

Аналогично, как и в случае однослойных пластин и оболочек, применение RFM требует знания вариационной постановки задачи о колебаниях многослойных оболочек и пластин.

Если рассматриваются гармонические свободные колебания в рамках *уточненной теории первого порядка*, базирующейся на идеях *С. П. Тимошенко*, то вектор неизвестных функций представляется в виде

$$\begin{aligned} \vec{U}(u(x, y, t), v(x, y, t), w(x, y, t), \psi_x(x, y, t), \psi_y(x, y, t)) = \\ = \vec{U}(u(x, y), v(x, y), w(x, y), \psi_x(x, y), \psi_y(x, y)) \sin \lambda t, \end{aligned}$$

где λ – частота колебаний; u, v, w – перемещения срединной поверхности в направлениях осей Ox, Oy, Oz соответственно; ψ_x, ψ_y – углы поворота нормали относительно осей Oy и Ox .

Вариационное уравнение имеет вид

$$\delta I = 0, \quad (3)$$

где

$$I = U_{\max} - T_{\max}.$$

Максимальные значения для потенциальной U_{\max} и кинетической энергии T_{\max} определяются с помощью следующих формул:

$$\begin{aligned} U = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (N_{11}\varepsilon_{11} + N_{22}\varepsilon_{22} + N_{12}\varepsilon_{12} + M_{11}\chi_{11} + M_{22}\chi_{22} + M_{12}\chi_{12}) d\Omega + \\ + \frac{1}{2} \iint_{\Omega} (Q_x\varepsilon_{13} + Q_y\varepsilon_{23}) d\Omega \end{aligned}$$

и

$$T = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \rho_1 \left[u^2 + v^2 + w^2 + \frac{h^2}{12} (\psi_x^2 + \psi_y^2) \right] dx dy .$$

Здесь деформации определяются равенствами:

$$\varepsilon_{11} = \partial_x u + k_1 w, \quad \varepsilon_{22} = \partial_y v + k_2 w, \quad \varepsilon_{12} = \partial_y u + \partial_x v ,$$

$$\chi_{11} = \partial_x \psi_x, \quad \chi_{22} = \partial_y \psi_y, \quad \chi_{12} = \partial_y \psi_x + \partial_x \psi_y ,$$

где k_1, k_2 – главные кривизны оболочки, а $N_{ij}, M_{ij}, (i, j = 1, 2)$ – усилия и моменты, которые вычисляются в результате интегрирования вдоль оси Oz и имеют в данном случае следующий вид:

$$\begin{bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} E_1 & \nu E_1 & 0 & E_2 & \nu E_2 & 0 \\ \nu E_1 & E_1 & 0 & \nu E_2 & E_2 & 0 \\ 0 & 0 & E_1(1-\nu)/2 & 0 & 0 & E_1(1-\nu)/2 \\ E_2 & \nu E_2 & 0 & E_3 & \nu E_3 & 0 \\ \nu E_2 & E_2 & 0 & \nu E_3 & E_3 & 0 \\ 0 & 0 & E_2(1-\nu)/2 & 0 & 0 & E_3(1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{12} \\ \chi_{11} \\ \chi_{22} \\ \chi_{12} \end{bmatrix} ,$$

$$E_1 = \left(E_m + \frac{E_c - E_m}{k+1} \right) h, \quad E_2 = \frac{(E_c - E_m) k h^2}{2(k+1)(k+2)},$$

$$E_3 = \left(\frac{E_m}{12} + (E_c - E_m) \left(\frac{1}{k+3} - \frac{1}{k+2} + \frac{1}{4(k+4)} \right) \right) h^3 .$$

Перерезывающие силы Q_x, Q_y определяются равенствами:

$$Q_x = k_s^2 \frac{E_1 h}{2(1+\nu)} (\partial_x w + \psi_x), \quad Q_y = k_s^2 \frac{E_1 h}{2(1+\nu)} (\partial_y w + \psi_y),$$

где k_s^2 – коэффициент сдвига, который ниже принимается равным $5/6$.

Плотность композита ρ_1 также определяется в результате интегрирования по толщине оболочки:

$$\rho_1 = \int_{-h/2}^{h/2} \rho(z) dz = \left(\rho_m + \frac{\rho_c - \rho_m}{k+1} \right) h .$$

Разрешающие уравнения дополняются граничными условиями, характер которых определяется способом закрепления контура оболочки.

Метод решения. Минимизацию функционала (3) будем выполнять с помощью метода Ритца, согласно которому неизвестные функции u, v, ψ_x, ψ_y, w представляются в виде

$$u = \sum_{i=1}^{N_1} a_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^{N_2} b_i v_i, \quad \psi_x = \sum_{i=1}^{N_3} c_i \psi_{xi}, \quad \psi_y = \sum_{i=1}^{N_4} d_i \psi_{yi}, \quad w = \sum_{i=1}^{N_5} e_i w_i,$$

где $\{u_i\}, \{v_i\}, \{\psi_{xi}\}, \{\psi_{yi}\}, \{w_i\}$ – последовательности координатных функций, удовлетворяющие, по крайней мере, главным граничным условиям, a_i, b_i, c_i, d_i, e_i – неопределенные коэффициенты, которые находятся из условия минимума функционала (3). В настоящей работе использованы последовательности координатных функций $\{u_i\}, \{v_i\}, \{\psi_{xi}\}, \{\psi_{yi}\}, \{w_i\}$, которые были построены раньше и представлены в работах [12, 13] и др. Базой для построения таких последовательностей являются структуры решения краевой задачи.

Численные результаты. Для проверки достоверность предложенного подхода и созданного программного обеспечения рассмотрим некоторые тестовые задачи и сравним полученные результаты с известными. Решение будем выполнять в рамках классической и уточненной теорий первого порядка.

Таблица 1– Сравнение значений параметра Ω для основных частот квадратных в плане оболочек $a/h = 10$ из ФГМ с результатами работ [8 - 10]

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	k	RFM (CST, poly / spli)	RFM (FSDT, poly / spli)	(CST) [9]	(FSDT) [10]	(HSDT) [8]
0	0	0	0.0597 / 0.0597	0.0576 / 0.0576	0.0597	0.0577	0.0578
		0.5	0.0505 / 0.0506	0.0489 / 0.0489	0.0506	0.0490	0.0492
		1	0.0455 / 0.0455	0.0441 / 0.0441	0.0456	0.0442	0.0443
		4	0.0395 / 0.0395	0.0382 / 0.0382	0.0396	0.0383	0.0381
		10	0.0380 / 0.0380	0.0365 / 0.0365	0.0380	0.0366	0.0364
0.5	0.5	0	0.0770 / 0.0771	0.0753 / 0.0753	0.0779	0.0762	0.0751
		0.5	0.0665 / 0.0665	0.0652 / 0.0652	0.0676	0.0664	0.0657
		1	0.0605 / 0.0605	0.0593 / 0.0593	0.0617	0.0607	0.0601
		4	0.0508 / 0.0507	0.0496 / 0.0496	0.0519	0.0509	0.0503
		10	0.0472 / 0.0472	0.0462 / 0.0461	0.0482	0.0471	0.0464
0	0.5	0	0.0642 / 0.0642	0.0622 / 0.0622	0.0648	0.0629	0.0622
		0.5	0.0546 / 0.0547	0.0531 / 0.0531	0.0553	0.0540	0.0535
		1	0.0494 / 0.0494	0.0481 / 0.0481	0.0501	0.0490	0.0485
		4	0.0423 / 0.0423	0.0411 / 0.0411	0.0430	0.0419	0.0413
		10	0.0403 / 0.0402	0.0389 / 0.0389	0.0408	0.0395	0.0390
0.5	-0.5	0	0.0582 / 0.0582	0.0562 / 0.0562	0.0597	0.0580	0.0563
		0.5	0.0493 / 0.0493	0.0477 / 0.0477	0.0506	0.0493	0.0479
		1	0.0444 / 0.0444	0.0430 / 0.0430	0.0456	0.0445	0.0432
		4	0.0385 / 0.0385	0.0372 / 0.0372	0.0396	0.0385	0.0372
		10	0.0370 / 0.0370	0.0356 / 0.0356	0.0380	0.0368	0.0355

При этом для аппроксимации неопределенных компонент в структурных формулах будем использовать как обычные степенные полиномы, так и сплайны. В качестве ФГМ выберем комбинацию Al / Al_2O_3 . Механические характеристики для материалов, составляющих такой сплав, представляются

следующими параметрами [8 – 10]:

$$Al: E_m = 70 \text{ GPa}, \nu_m = 0.3, \rho_m = 2707 \text{ kg/m}^3, \\ Al_2O_3: E_c = 380 \text{ GPa}, \nu_c = 0.3, \rho_c = 3800 \text{ kg/m}^3.$$

Задача 1. Исследуем собственные колебания пластины и пологой оболочки (сферической, цилиндрической или в форме гиперболического параболоида), опирающейся на квадратный план. Предположим, что оболочка свободно оперта по всему контуру. Результаты расчетов основных частот, полученные при использовании RFM как на основе полиномиальной, так и сплайн-аппроксимации (poly / spli), сравниваются с известными [8 - 10] в табл. 1. Данные в работе получены как на основе уточненной теории первого порядка (FSDT), так и классической (CST), причем сетка сплайнов для сплайн-аппроксимации была выбрана [10×10], а степени аппроксимирующих полиномов для функций u, v, w, ψ_x, ψ_y выбирались равными соответственно 10,10,11,10,10. Соотношение характерного геометрического размера к толщине принято равным $a/h = 10$, а результаты для основной частоты представлены в виде безразмерного параметра $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$.

Сравнение показывает, что результаты, полученные с помощью уточненной теории первого порядка (RFM, FSDT), практически совпадают с представленными в работе [10]. Отклонения от результатов теории более высокого порядка (HSDT) [8] не превышает 3.8 %. Не менее устойчивое совпадение результатов наблюдается и при использовании классической теории (RFM, CST) [9]. В целом следует отметить, что классическая теория приводит в большинстве случаев к завышенным значениям основных частот по сравнению с уточненными теориями, так как моделирует оболочку как более жесткую. Результаты, полученные с помощью RFM при использовании аппроксимации неопределенных компонент степенными полиномами или сплайнами, в данном случае практически совпадают. Этот факт является дополнительным подтверждением достоверности получаемых результатов.

Проведенное тестирование предложенного метода и разработанного программного обеспечения позволяет рассматривать пластины и оболочки со сложной формой плана и различными видами граничных условий. Ниже представлена одна из таких задач.

Задача 2. Исследуем свободные колебания функционально-градиентной оболочки (Al / Al_2O_3), опирающейся на план, изображенный на рис. 1. Предположим, что на границе области заданы условия неподвижного в тангенциальном направлении шарнира или условия жесткого закрепления.

Учитывая, что края плана оболочки являются прямолинейными, структурные формулы для неподвижного шарнира можно выбрать в виде:

$$u = \omega_1 P_1, \quad v = \omega_2 P_2, \quad w = \omega P_3, \quad \psi_x = \omega_1 P_4, \quad \psi_y = \omega_2 P_5,$$

а для жесткой заделки в виде:

$$u = \omega P_1, \quad v = \omega P_2, \quad w = \omega^2 P_3, \quad \psi_x = \omega P_4, \quad \psi_y = \omega P_5,$$

где $P_i = P_i(x, y)$, $i = \overline{1, 5}$ – неопределенные компоненты в структурных формулах, которые будем аппроксимировать как степенными полиномами, так и *бикубическими сплайнами Шенберга* [13].

Для конкретизации структуры решения необходимо задать уравнения участков $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$ и уравнение всей границы области $\omega = 0$.

Уравнение всей границы области может быть определено так:

$$\omega = (f_1 \wedge_0 f_2) \wedge_0 (f_3 \vee_0 f_4),$$

где

$f_1 = ((a^2 - x^2)/2a) \geq 0$ – вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = \pm a$;

$f_2 = ((b^2 - y^2)/2b) \geq 0$ – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = \pm b$;

$f_3 = ((a_1^2 - x^2)/2a_1) \geq 0$ – вертикальная полоса, ограниченная прямыми $x = \pm a_1$;

$f_4 = ((b_1^2 - y^2)/2b_1) \geq 0$ – горизонтальная полоса, ограниченная прямыми $y = \pm b_1$,

знаки \wedge_0, \vee_0 обозначают R – конъюнкцию и R – дизъюнкцию [11] соответственно.

Функции ω_1, ω_2 можно построить следующим образом:

$$\omega_1 = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_2 \vee_0 (f_5 \vee_0 f_6 \vee_0 f_7 \vee_0 f_8),$$

$$\omega_2 = (f_3 \vee_0 f_4) \wedge_0 f_1 \vee_0 (f_9 \vee_0 f_{10} \vee_0 f_{11} \vee_0 f_{12}).$$

В последних формулах выражения для функций f_i , ($i = \overline{5, 12}$) имеют вид:

$$f_5 = \left((r_1^2 - (x + d_1)^2 - (y + b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_6 = \left((r_1^2 - (x + d_1)^2 - (y - b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_7 = \left((r_1^2 - (x - d_1)^2 - (y + b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_8 = \left((r_1^2 - (x - d_1)^2 - (y - b_1)^2) / (2r_1) \right) \geq 0,$$

$$f_9 = \left((r_2^2 - (x + a_1)^2 - (y + d_2)^2) / (2r_2) \right) \geq 0,$$

$$f_{10} = \left((r_2^2 - (x - a_1)^2 - (y + d_2)^2) / (2r_2) \right) \geq 0,$$

$$f_{11} = \left((r_2^2 - (x + a_1)^2 - (y - d_2)^2) / (2r_2) \right) \geq 0,$$

$$f_{12} = \left((r_2^2 - (x - a_1)^2 - (y - d_2)^2) / (2r_2) \right) \geq 0,$$

где $r_1 = \frac{a-a_1}{2}$, $r_2 = \frac{b-b_1}{2}$, $d_1 = \frac{a+a_1}{2}$, $d_2 = \frac{b+b_1}{2}$.

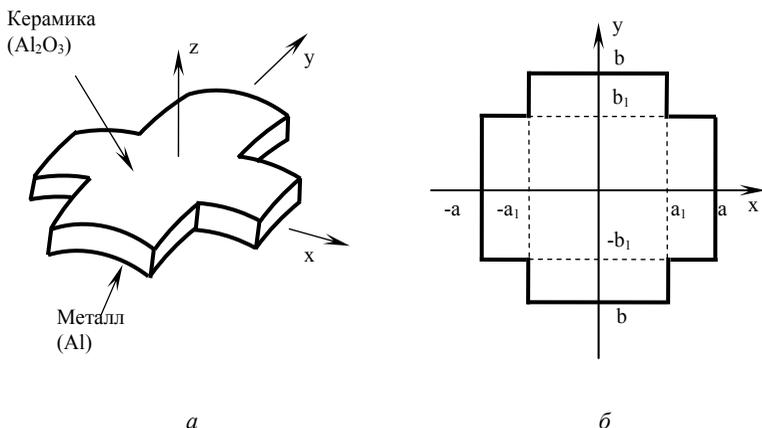


Рис. 1 – Вид исследуемой полой оболочки из ФГМ:
a – пространственная форма; *б* – форма в плане.

Геометрические параметры оболочки выбраны следующими:

$$h/(2a) = 0.2; \quad b/a = 1; \quad b_1/a_1 = 1; \quad b_1/(2a) = 0.3.$$

Для исследования сходимости значений собственных частот был проведен вычислительный эксперимент с помощью полиномиальной и сплайн-аппроксимации при использовании различного количества координатных функций. В качестве примера в табл. 2 представлены результаты проведенных исследований для сферической оболочки $a/R_x = a/R_y = 0.5$ (рис. 1) при показателе степени объемной доли керамики $k = 4$. Для сплайн-аппроксимации была выбрана сетка от $[5 \times 5]$ до $[25 \times 25]$, а степени аппроксимирующих полиномов для функций u, v, w, ψ_x, ψ_y приведены в табл. 2 – 3.

Таблица 2 – Сходимость значений частотного параметра $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c/E_c}$ для основной частоты сферической оболочки из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (жесткая заделка), $(h/(2a) = 0.2, a/R_x = a/R_y = 0.5)$

Полиномиальная аппроксимация		Сплайн-аппроксимация	
Степени полиномов	Значения частотного параметра Ω	Сетка сплайнов	Значения частотного параметра Ω
7,7,10,7,7	0.2606	5x5	0.2626
9,9,12,9,9	0.2604	10x10	0.2615
11,11,14,11,11	0.2603	15x15	0.2609
13,13,16,13,13	0.2599	20x20	0.2605
-	-	25x25	0.2599

Таблица 3 – Сходимость значений частотного параметра $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ для основной частоты сферической оболочки из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (шарнирное опирание), $(h/(2a) = 0.2, a/R_x = a/R_y = 0.5)$

Полиномиальная аппроксимация		Сплайн-аппроксимация	
Степени полиномов	Значения частотного параметра Ω	Сетка сплайнов	Значения частотного параметра Ω
7,7,10,7,7	0.2149	5x5	0.2175
9,9,12,9,9	0.2123	10x10	0.2143
11,11,14,11,11	0.2112	15x15	0.2126
13,13,16,13,13	0.2104	20x20	0.2113
-	-	25x25	0.2092

Анализ результатов табл. 2 для жестко закрепленной оболочки показывает стабилизацию собственных частот в третьем знаке после запятой. Из табл. 3 следует, что для шарнирно опертых оболочек стабильными остаются два знака после запятой. Таким образом, расчет для других типов оболочек был выполнен при использовании сетки сплайнов $[10 \times 10]$ и сохранении степеней аппроксимирующих степенных полиномов (9,9,12,9,9), что соответствует следующему количеству координатных функций для u, v, w, ψ_x, ψ_y : (15,15,28,15,15). При этом следует отметить, что количественно уточнение результата для Ω в рамках рассмотренного диапазона степеней полиномов и сеток сплайнов оказывается существенно меньшим для жестко закрепленной оболочки (табл. 2), чем для шарнирно опертой (табл. 3) и составляет соответственно 1% и 3%. Это, очевидно, объясняется большей механической податливостью шарнирно опертой оболочки.

Таблица 4 – Значения основного частотного параметра $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ для оболочек различной кривизны из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (жесткая заделка), $h/(2a) = 0.2$

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	RFM approximation	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	poly	0.368	0.319	0.290	0.244	0.226	0.187
		spli [10x10]	0.371	0.321	0.292	0.246	0.228	0.188
0.5	0.5	poly	0.394	0.342	0.311	0.260	0.240	0.200
		spli [10x10]	0.396	0.344	0.313	0.262	0.241	0.201
0	0.5	poly	0.379	0.328	0.299	0.251	0.232	0.193
		spli [10x10]	0.381	0.330	0.300	0.252	0.233	0.194
0.5	-0.5	poly	0.383	0.333	0.303	0.254	0.235	0.195
		spli [10x10]	0.385	0.335	0.305	0.256	0.236	0.196

В табл. 4, 5 приведены результаты исследования влияния различных значений показателя степени объемной доли керамики k и кривизны на величины параметров Ω основных частот оболочек из ФГМ. Причем исследова-

ние проведено для двух различных видов граничных условий, а именно, для жесткой заделки (табл. 4) и шарнирного опирания (табл. 5), с использованием полиномиальной (poly) и сплайн-аппроксимации (spli).

Таблица 5 – Значения основного частотного параметра $\Omega = \omega h \sqrt{\rho_c / E_c}$ для оболочек различной кривизны из ФГМ (рис. 1) при полиномиальной и сплайн-аппроксимации (шарнирное опирание), $h/(2a) = 0.2$

$\frac{a}{R_y}$	$\frac{a}{R_x}$	RFM approximation	$k = 0$	$k = 0.5$	$k = 1$	$k = 4$	$k = 10$	$k = \infty$
0	0	poly	0.302	0.261	0.237	0.200	0.186	0.154
		spli [10x10]	0.307	0.266	0.242	0.203	0.189	0.156
0.5	0.5	poly	0.322	0.279	0.253	0.211	0.196	0.164
		spli [10x10]	0.327	0.283	0.257	0.214	0.199	0.166
0	0.5	poly	0.309	0.266	0.241	0.202	0.189	0.157
		spli [10x10]	0.314	0.271	0.246	0.206	0.191	0.160
0.5	-0.5	poly	0.309	0.266	0.241	0.202	0.188	0.157
		spli [10x10]	0.315	0.272	0.246	0.206	0.191	0.160

Сопоставление результатов в табл. 4 – 5, полученных с помощью полиномиальной и сплайн-аппроксимации, показывает, что отклонение между ними не превышает 1% – 2%.

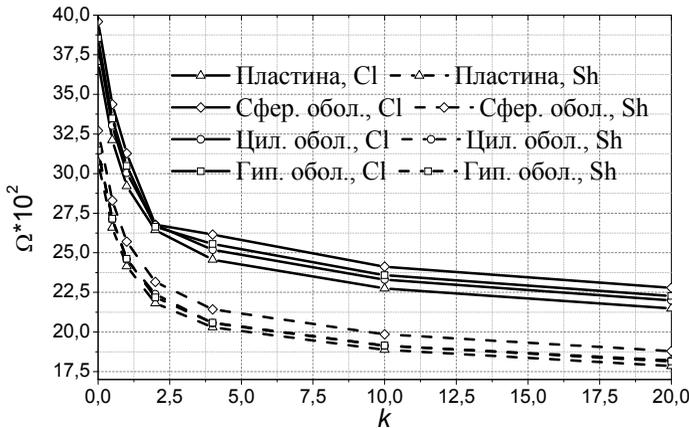


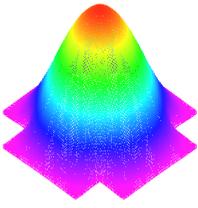
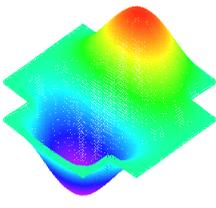
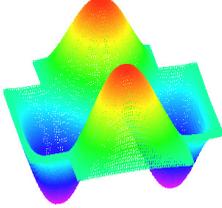
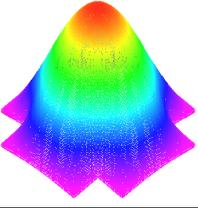
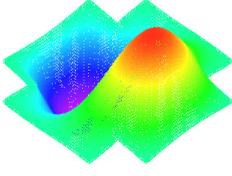
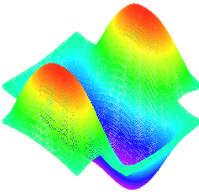
Рис. 2 – Зависимость значений параметра Ω для основных частот оболочек из ФГМ (рис. 1) от показателя степени объемной доли керамики k .

Смягчение граничного условия с жесткой заделки (табл. 4) до шарнирного опирания (табл. 5) приводит к уменьшению основной частоты до 18% вне зависимости от типа кривизны и значения показателя степени объемной доли керамики k . На графиках (рис. 2) представлена зависимость значений

параметра Ω от величины k для основных частот оболочек из ФГМ (рис. 1) при условиях жесткой заделки (Cl) и шарнирного опирания (Sh). Исследование проведено для следующих значений кривизн: $a/R_y = a/R_x = 0$ (пластина), $a/R_y = a/R_x = 0.5$ (сфер. обол.), $a/R_y = 0$; $a/R_x = 0.5$ (цил. обол.), $a/R_y = 0.5$; $a/R_x = -0.5$ (гип. обол.).

Анализ графиков позволяет оценить качественное поведение значений основной частоты в зависимости от показателя степени для закона (2) изменения механических характеристик k . При росте величины k , вне зависимости от типа граничного условия, наблюдается уменьшение значений основной частоты колебаний. Частоты «асимптотически» приближаются к соответствующим значениям частот металлической оболочки или пластины. При этом влияние кривизн оболочек при варьировании k оказывается несущественным. Стоит отметить, что как для жесткой заделки, так и для шарнирного опирания во всем диапазоне изменения значений величины k , $k \in [0, 20]$ наибольшие величины основных частот наблюдались для случая сферических оболочек, а наименьшие для пластин.

Таблица 6 – Первые формы и величины $\Omega_i = \omega_i h \sqrt{\rho_c / E_c}$ собственных колебаний сферических оболочек из ФГМ (рис. 1) при $k = 4$

Жесткая заделка		
		
$\Omega_1 = 0.2615$	$\Omega_2 = 0.4157$	$\Omega_3 = 0.5774$
Шарнирное опирание		
		
$\Omega_1 = 0.2143$	$\Omega_2 = 0.3683$	$\Omega_3 = 0.4863$

В табл. 6 приведены первые три формы колебаний сферических ($a/R_y = a/R_x = 0.5$) оболочек и соответствующие им величины Ω при значении параметра $k = 4$ для случаев жесткой заделки и шарнирного опирания.

Анализ первых трех собственных частот колебаний, приведенных в табл. 6, показывает, что изменение типа граничного условия с жесткой заделки на шарнирное опирание приводит к уменьшению второй собственной частоты примерно на 11%, что меньше, чем для основной. Таким образом, последующие частоты менее чувствительны к изменению граничных условий, чем основные.

Выводы. В работе предложен и численно реализован метод исследования спектра собственных частот и форм колебаний функционально-градиентных пологих оболочек со сложной формой плана и различными видами граничных условий. С помощью предложенного метода проведено исследование влияния механических и геометрических факторов (типа граничных условий, кривизны срединной поверхности, показателя степени объемной доли керамики) на собственные частоты и формы колебаний оболочек со сложной формой плана. Расчет выполнен с использованием полиномиальной и сплайн-аппроксимации неизвестных функций. Для оболочек с квадратным планом выполнено сравнение полученных результатов с известными в литературе. Практическое их совпадение подтверждает достоверность разработанного метода и созданного программного обеспечения, которые могут быть использованы для решения широкого класса задач.

Список литературы: 1. *M. Yamanoushi, M. Koizumi, T. Hirai, I. Shiota (Eds.)*, Proceedings of the First International Symposium on Functionally Graded Materials, Japan, 1990. 2. *M. Koizumi*, The concept of FGM, Ceramic Trans. Functionally Graded Mater. 34 (1993) 3 - 10. 3. *Carrera E, Brischetto S, Robaldo A*. Variable kinematic model for the analysis of functionally graded material plates. AIAA J 2008;46:194 – 203. 4. *Zenkour AM*. Generalized shear deformation theory for bending analysis of functionally graded plates. Appl Math Modell 2006;30:67 – 84. 5. *Ferreira AJM, Batra RC, Roque CMC, Qian LF, Martins PALS*. Static analysis of functionally graded plates using third-order shear deformation theory and a meshless method. Compos Struct 2004;69:449 – 57. 6. *Altenbach, H.; Eremeyev, V.* Direct approach based analysis of plates composed of functionally graded materials. Archive of Applied Mechanics, vol. 78, no. 10, pp. 775 – 794. 7. *Loy CT, Lam KY, Reddy JN*. Vibration of functionally graded cylindrical shells. Int J Mech Sci 1999;41:309 – 24. 8. *Matsunaga H*. Free vibration and stability of functionally graded shallow shells according to a 2D higher-order deformation theory. Compos Struct 2008;84(2):132 – 46. 9. *Alijani, F., Amabili, M., Karagiozis, K., Bakhtiari-Nejad, F.* Nonlinear vibrations of functionally graded doubly curved shallow shells. J. Sound Vib. 330, 1432 – 1454 (2011). 10. *S.M. Chorfi, A. Houmat* Non-linear free vibration of a functionally graded doubly-curved shallow shell of elliptical plan-form // Composite Structures 92 (2010) 2573-2581. 11. *Рвачев В. Л.* Теория R-функций и некоторые ее приложения. – Киев: Наук. думка, 1982. – 551 с. 12. *Курпа Л. В.* Метод R-функций для решения линейных задач изгиба и колебаний пологих оболочек. – Харьков: НТУ «ХПИ», 2009. – 408 с. 13. *Jan Awrejcewicz, Lidiya Kurpa, and Andrey Osetrov*. Investigation of the stress-strain state of the laminated shallow shells by R-functions method combined with spline-approximation // ZAMM Z. Angew. Math. Mech., 1 – 10 (2011) / DOI 10.1002/zamm.2010001648).

Поступила в редколлегию 11.02.2014

УДК 517.07

Определение собственных частот функционально-градиентных пологих оболочек с помощью метода R-функций и сплайн-аппроксимации / Л. В. Курпа, А. А. Осетров, Т. В. Шматко // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіяx. – Ха-

рків: НТУ «ХПІ», 2014. – № 6 (1049). – С. 99 – 111. Бібліогр.: 13 назв. – ISSN 2222-0631.

Запропоновано метод дослідження спектру власних частот та форм пологих оболонок неканонічних форм у плані, що утворюються з функціонально-градієнтних матеріалів. Метод базується на сумісному використанні уточненої теорії першого порядку типу Тимошенко, варіаційного методу Ритца, теорії R -функцій (RFM) та сплайн-апроксимації. Запропонований метод дозволив провести дослідження впливу типу граничних умов, кривини та показника степені об'ємної частки матеріалу на спектр власних частот та форм оболонок зі складною формою плану. Результати, що наведені у роботі, отримані як за допомогою поліноміальної, так і за допомогою сплайн-апроксимації. Для підтвердження достовірності результатів наведено їх порівняння з відомими раніш в літературі для оболонок з прямокутною формою плану.

Ключові слова: функціонально-градієнтні матеріали (ФГМ), пологі оболонки, теорія R -функцій (RFM), сплайн-апроксимація, теорія типу Тимошенко, спектр власних частот, складна форма плану.

UDC 517.07

Determining eigen frequencies of functionally graded shallow shells using the R-function theory and spline-approximation / L. V. Kurpa, A. A. Osetrov, T. V. Shmatko // Bulletin of National Technical University «KhPI» Series: Mathematical modeling in engineering and technologies. – Kharkiv: NTU «KhPI», 2014. – № 6 (1049). – pp. 99 – 111. Bibliog.: 13 titles. – ISSN 2222-0631.

The article suggests a method of investigation of natural frequencies and eigen forms of shallow shells with non-canonical plan-forms consisting of functionally graded materials. The solution method is based on the joint usage of the refined shallow shell theory of the first order (Timoshenko's type), the Ritz variational method, the R-function theory and spline-approximation. The proposed approach allows investigating the influence of boundary conditions, type of curvature and the volume fraction power coefficient on the natural frequencies and eigen forms of shallow shells with complex planform. The results presented in the article are obtained by both polynomial and spline-approximation. To prove the reliability of the obtained results we compare them with the once previously known for the shells with rectangular planform.

Key words: functionally-graded materials (FGM), shallow shells, the R-functions theory (RFM), spline-approximation, the Timoshenko's type theory, natural frequencies, complex planform.

УДК 66.023

А.Ю. ЛЕБЕДЕВ, аспірант, НТУ «ХПІ»

ПІДВИЩЕННЯ ТЕХНІЧНОГО РІВНЯ ЛАБІРИНТНО-ГВИНТОВОГО НАСОСА ЗА РАХУНОК ВДОСКОНАЛЕННЯ ЙОГО РОБОЧИХ ОРГАНІВ

Наведено методику визначення технічного рівня лабіринтно-гвинтового насоса. Проведено аналіз впливу форми робочих органів насоса та газомісту робочої рідини на цей показник. Отримані дані дозволяють на етапі проектування оцінити і визначити шляхи підвищення технічного рівня лабіринтно-гвинтового насоса.

Ключові слова: лабіринтно-гвинтовий насос, робочі органи, гвинтова канавка, технічний рівень, газоміст.

Вступ та постановка проблеми. Завдяки здатності перекачування хімічно активних, вибухо- і пожежонебезпечних рідин в'язкістю до 500 сСт, яка