Присвячується пам'яті академіка В.Л. Рвачова

УДК 519.8

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.–мат. наук. НТУ "ХПІ"

ЗАДАЧА БАГАТОКРИТЕРІАЛЬНОГО МІНІМАКСА ПРИ РІЗНОРІДНОМУ СЕРЕДОВИЩІ

В статті представлена багатокритеріальна формалізація, яка моделює ситуацію, що може виникнути в процесі прийняття рішення суб'єктами з протилежними преференціями при їхньому намаганні оптимально розмістити точкові об'єкти на множинах різнорідного середовища. Наводяться достатні умови існування єдиного розв'язку поставленої задачі багатокритеріального мінімакса. Виклад матеріалу в статті ведеться із використанням термінології і позначень, введених автором в монографії [1]. Отримані автором теоретичні результати ілюструються в статті конкретним прикладом.

In this article the multicriteria formalization which one models a situation arising in decision–making process is offered. This process made by the subjects with opposite preferences at their intention optimum to place point objects on sets of heterogeneous environments.

Нехай G(H) є ордовий граф [1], вершинами якого є опуклі компакти $\mathrm{H_i}$ сім'ї $\mathrm{H}=\{\mathrm{H}_1,\mathbf{K},\mathrm{H_e},\mathrm{H_{e+1}},\mathbf{K},\mathrm{H_{e+m}}\}$, а ребрами – «р» ордових ланцюгів $L_{ij}^k=\left(H_i,\mathsf{S}_1^k,\mathbf{K},\mathsf{S}_{\mu(k)}^k,H_j\right)\subset\mathsf{L}_{ij}^k=\left(\mathsf{V}_i,\mathsf{S}_1^k,\mathbf{K},\mathsf{S}_{\mu(k)}^k,\mathsf{V}_j\right)$ (k=$\overline{1,\mathrm{p}}$ і i,j=$\overline{1,\mathrm{e}+\mathrm{m}}$), які занурені в спільний для них опорний простір R^{n}, причому $\mathrm{L}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}=\mathrm{L}_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}}$ і $\mathsf{L}_{\mathrm{ij}}^{\mathrm{k}}=\mathsf{L}_{\mathrm{ji}}^{\mathrm{k}}$. Сім'ю H вершин графа G(H) поділяємо на два класи – клас вершин максимізації $\mathrm{H_{max}}=\{\mathrm{H}_1,\mathbf{K},\mathrm{H_e}\}$ і клас вершин мінімізації $\mathrm{H_{min}}=\{\mathrm{H_{e+1}},\mathbf{K},\mathrm{H_{e+m}}\}$; $\mathrm{H}=\mathrm{H_{max}}\cup\mathrm{H_{min}}$. Будемо вважати, що вершини класу $\mathrm{H_{min}}$ є відносно строго опуклі компакти [1, ст. 184], а вершини класу $\mathrm{H_{max}}$ є кулі афінних просторів $\mathsf{V}_1,\mathbf{K},\mathsf{V}_\mathrm{e}$; до того ж, у випадку, коли $\dim\mathrm{H_i}>1$, ці кулі є обов'язково портальними вершинами графа G(H) [1]. Також вважаємо, що ордові ланцюги не мають спільних тракових вершин (звісно, у випадку їх неодноточковості) і при $\forall k=\overline{1,p}$, і $l=\overline{1,\mu(k)-1}$ виконується умова

$$\left(\mathrm{aff}\,\mathsf{S}_l^k\cap\mathrm{aff}\,\mathsf{S}_{l+1}^k\right)\cap\left(\mathsf{S}_l^k\cup\mathsf{S}_{l+1}^k\right)=\varnothing.$$

Між іншим, зауважуємо, що все стверджуване в розділах 6 і 7 монографії [1] *залишається в силі і при заміні умови* $\mathrm{aff}\,\mathsf{S}_\mathrm{i}\cap\mathrm{aff}\,\mathsf{S}_\mathrm{i+1}$, *для тракових вершин ланцюга* L, *на менш жорсткі умови* $\left(\mathrm{aff}\,\mathsf{S}_\mathrm{i}\cap\mathrm{aff}\,\mathsf{S}_\mathrm{i+1}\right)\cap\left(\mathsf{S}_\mathrm{i}\cup\mathsf{S}_\mathrm{i+1}\right)=\varnothing$. Для подальшого викладу введемо наступні позначення: через U(X,Y) позначаємо плинну точку декартового добутку

$$B = \mathop{X}_{i=1}^{i=e+m} H_i,$$

де $X = (X_1, \mathbf{K}, X_e) \in B_1 = \mathop{X}_{i=1}^{i=e} H_i$, $Y = (X_{e+1}, \mathbf{K}, X_{e+m}) \in B_2 = \mathop{X}_{i=e+1}^{i=e+m} H_i$ $(B_1 \times B_2 = B)$.

Також позначаємо

$$U(i) = (X_1, \mathbf{K}, X_{i-1}, X_{i+1}, \mathbf{K}, X_{e+m}) \in H(i) = \mathop{X}_{j=1,e+m}^{j\neq i} H_j.$$

Кожному ордовому ланцюгу L_{ij}^k зіставимо ордову функцію

$$R_{ij}^k(X_i, S_k, X_j) =$$

$$= f_i^k\left(d\left(X_i, S_1^k\right)\right) + \sum_{r=1}^{r=\mu(k)-1} g_r^k\left(d\left(S_r^k, S_{r+1}^k\right)\right) + f_j^k\left(d\left(S_{\mu(k)}^k, X_j\right)\right) : V_i \times \Pi_k \times V_j \to R_+ .$$

Тут $S_k = \left(S_1^k, \mathbf{K}, S_{\mu(k)}^k\right) \in \Pi_k = S_1^k \times \mathbf{K} \times S_{\mu(k)}^k$), або її редукцію – реберну функцію $P_{ij}^k(X_i, X_j)$ $\left(P_{ij}^k = P_{ji}^k\right)$, яку для простоти описання моделі будемо вважати визначеною. Зіставимо тепер графу G(H) матрицю N(G) – матрицю інцидентності неодноточкових вершин графа G(H) і його ребер (ордових ланцюгів); рядки матриці N(G) відповідають неодноточковим вершинам, а стовпці – ребрам. Припустимо, що вершини графа G(H) неодноточкові; очевидно, що загальності наших міркувань це припущення не порушує. Елементи n_{ik} $(i = \overline{1, e};\ k = \overline{1, p})$ матриці N(G) формуємо таким чином: якщо вершині H_i інцидентний ланцюг L_{ij}^k, то елемент n_{ik} покладаємо рівним $P_{ij}^k(X_i, X_j)$, в противному разі – для вершин класу H_{min} покладаємо $n_{ik} = 0$, а для вершин класу H_{max} покладаємо $n_{ik} = \infty$. Тепер кожній точці X_i вершини $H_i \in H_{max}$ ставимо у відповідність значення функції $K_i(X_i, U(i)) = \mathop{\Lambda}_{k=1}^{k=p} n_{ik}$, а кожній точці X_i вершини $H_i \in H_{min}$ поставимо у відповідність значення функції $P_i\left(X_i, U(i)\right) = \bigvee\limits_{k=1}^{k=p} n_{ik}$. Нарешті сформуємо дві вектор–функції:

$$\overrightarrow{g(X,Y)} = \left(K_1\left(X_1, U(1)\right), \mathbf{K}, K_e\left(X_e, U(e)\right)\right) : B \to \hat{R}{}_{+}^{e}$$

і

$$\overrightarrow{q(X,Y)} = \left(P_{e+1}\left(X_{e+1}, U(e+1)\right), \mathbf{K}, P_{e+m}\left(X_{e+m}, U(e+m)\right)\right) : B \to \overset{\vee}{R}{}_{+}^{m} .$$

Тут $\hat{R}{}_{+}^{e}$ і $\overset{\vee}{R}{}_{+}^{m}$ є евклідові простори R_{+}^{e} і R_{+}^{m} лінійно впорядковані, відповідно, відношеннями $\left(\underset{\min}{\leq}\right)$ і $\left(\underset{\max}{\leq}\right)$ див. [1].

<u>Означення 1</u>. *Задачу, в якій необхідно знайти точку* $U^{*}(X^{*},Y^{*})$ *Î* B_1 *´* B_2 *і вектори* $\overrightarrow{g\left(X^{*},Y^{*}\right)}$ *і* $\overrightarrow{q\left(X^{*},Y^{*}\right)}$, *де* $X^{*} \in \operatorname{Arg}\max\left\{\overrightarrow{g\left(X,Y^{*}\right)}, X \in B_1; \underset{\min}{\leq}\right\}$ *і* $Y^{*} \in \operatorname{Arg}\min\left\{\overrightarrow{q\left(X^{*},Y\right)}, Y \in B_2; \underset{\max}{\leq}\right\}$, *будемо називати задачею багатокритеріального мінімакса і позначати так:*

$$\begin{cases} \overrightarrow{g(X,Y)} \xrightarrow[\underset{\min}{\leq}]{X \in B_1} \max, \\ \overrightarrow{q(X,Y)} \xrightarrow[\underset{\max}{\leq}]{Y \in B_2} \min \end{cases} . \qquad (1)$$

Для цієї задачі означимо споріднену з нею стратегічну гру гравців із множини I={1,2,…,e,e+1,…,e+m}. Канонічні правила прийняття рішення (правила вибору стратегії) в цій грі визначаються так:

1) *кожний i-тий гравець із множини* $I_1 = \left\{1, 2, \mathbf{K}, e\right\}$ *вибирає свою стратегію за правилом –*

$$X_i \in C_i\left(U(i)\right) = \operatorname{Arg}\max\left\{K_i\left(W_i, U(i)\right) \mid W_i \in H_i\right\},$$

тобто вибирає точку максимізації;

2) *а кожний i-тий гравець із множини* $I_2 = \left\{e+1, e+2, \mathbf{K}, e+m\right\}$ *вибирає свою стратегію* X_i *згідно правила –*

$$X_i \in C_i(U(i)) = \operatorname{Arg}\min\{P_i(W_i, U(i)) \mid W_i \in H_i\},$$

тобто вибирає точку мінімізації.

Керуючись цими правилами гравці із множини $I = I_1 \cup I_2$ намагаються узгодити свої стратегії, інакше кажучи, намагаються відшукати узгоджену мультистратегію – нерухому точку відображення

$$\overrightarrow{C(U)} = (C_1(U(1)), \mathbf{K}, C_{e+m}(U(e+m))): \quad B_1 \times B_2 \to B_1 \times B_2 = B.$$

Позначимо множину узгоджених мультистратегій цієї гри буквою $\mathbb{A}$, а саму гру символом $\mathrm{G}a(I, H_{max}, H_{min})$.

Теорема 1. *Якщо точка* $U^* = (X^*, Y^*)$ *є узгоджена мультистратегія гри* $\mathrm{G}a(I, H_{max}, H_{min})$, *а граф* G(H) *є дерево, або його можна конвертувати в дерево шляхом розчалення одноточкових рантових вершин, то ця точка є одночасно і розв'язком задачі (1); правильним буде і обернене твердження.*

Доведення. По-перше, при постановочних умовах відображення $\overrightarrow{C(U)}$ є однозначним і неперервним на опуклому компакті, а отже, згідно теореми Брауера, множина $\mathbb{A}$ не пуста.

Зрозуміло, що ця точка буде єдиною узгодженою мультистратегією гри

$$\mathrm{G}a(I, X^*, H_{min}) \sim \Gamma(I, X^*, H_{min}),$$

а також і гри

$$\mathrm{G}a(I, H_{max}, Y^*) \sim Sp(I, H_{max}, Y^*).$$

Отже, точка $U^* = (X^*, Y^*)$, згідно теореми 42.2 і теореми 48.1 із [1], а також і теореми 2 із [2], буде розв'язком задачі (1). Очевидно, що згідно вказаних посилань обернене твердження також правильне.

Теорема 2. *Якщо граф* G(H) *є дерево, або його можна конвертувати в дерево шляхом розчалення одноточкових рантових вершин, то гра* $\mathrm{G}a(I, H_{max}, H_{min})$ *має єдину узгоджену мультистратегію.*

Доведення. Міркуємо від заперечення стверджуваного в теоремі. Отже, нехай $U = (U_1, \mathbf{K}, U_{e+m})$ і $V = (V_1, \mathbf{K}, V_{e+m})$ дві будь–які різні узгоджені мультистратегії із множини $\mathbb{A}$. Вводимо в просторі R^{e+m} повне упорядкування по максимуму і формуємо два вектора –

$$\overrightarrow{mesU} = (mesU_1, \mathbf{K}, mesU_{e+m}) \underset{max}{=} \left(a_1^1, \mathbf{K}, a_{\eta(1)}^1; \mathbf{K}; a_1^k, \mathbf{K}, a_{\eta(k)}^k\right) \text{ і}$$

$$\overrightarrow{mesV} = \left(mesV_1, \mathbf{K}, mesV_{e+m}\right) \underset{max}{=} \left(b_1^1, \mathbf{K}, b_{\eta(1)}^1; \mathbf{K}; b_1^k, \mathbf{K}, b_{\eta(k)}^k\right),$$

де при $i < j \quad a_\beta^i > a_\gamma^j$; $\quad \sum\limits_{i=1}^{i=k} \eta(i) = e + m$; компоненти b_j^i при зростанні індексів i,j не зростають.

Нехай $O=(O_1, ..., O_k)$ є остова система підграфів графа G(U) [1], і нехай $\overrightarrow{mesU} \underset{max}{\geq} \overrightarrow{mesV}$, тобто $a_1^1 \geq b_1^1$. Нехай точки $U_{i_1}, U_{i_2}, \mathbf{K}, U_{i_s}$ є вершини якогось ланцюга C_i із лісу O_1, який сполучає кінцеві вершини U_{i_1} і U_{i_s}. Отже, припускаємо, що $U_{i_1} \neq V_{i_1}, \mathbf{K}, U_{i_s} \neq V_{i_s}$.Міркуємо так:

$$\text{якщо } H_{i_1} \in H_{max}\text{, то } V_{i_2} \in H_{i_2} \cap S\left(M\left(X_{i_2}, P_{i_1 i_2}, H_{i_1}\right), a_1^1\right) = D_{i_2}^*;$$
$$\text{якщо } H_{i_1} \in H_{min}\text{, то } V_{i_2} \in H_{i_2} \cap S\left(m\left(X_{i_2}, P_{i_1 i_2}, H_{i_1}\right), a_1^1\right) = D_{i_2}^{**},$$

де $D_{i_2}^*$ і $D_{i_2}^{**}$, в силу теорем 34.4, 34.5 і 35.6 із [1], є відносно строго опуклі компакти. Для зручності і стислості подальшого обґрунтування будемо вживати для множин $D_{i_2}^*$ і $D_{i_2}^{**}$ єдине позначення D_{i_2}. Таким чином, $V_{i_2} \in D_{i_2}$ а $U_{i_2} \in Fr\,D_{i_2}$.

Далі:

$$V_{i_3} \in H_{i_3} \cap S\left(m\left(X_{i_3}, P_{i_2 i_3}, D_{i_2}\right), a_1^1\right) = D_{i_3} \quad \text{і} \quad U_{i_3} \in Fr D_{i_3};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$V_{i_s} \in H_{i_s} \cap S\left(m\left(X_{i_3}, P_{i_{s-1} i_s}, D_{i_s}\right), a_1^1\right) = D_{i_s} \quad \text{і} \quad U_{i_s} \in Fr D_{i_s}.$$

Виходячи з того, що U_{i_s} є кінцева точка, то маємо (див. зауваження до теорем 32.3, 33.1 із [1]) $\left\{U_{i_s}\right\} = D_{i_s}$, а отже, $V_{i_s} = U_{i_s}$. Звідси випливає, що і $V_{i_{s-1}} = U_{i_{s-1}}, \dots V_{i_1} = U_{i_1}$. Отже, вершини довільного ланцюга C_i, із множини ланцюгів, які покривають ліс O_1 системи O, збігаються з відповідними компонентами узгодженої мультистратегії V. Це означає, що всі вершини лісу O_1 збігаються з відповідними компонентами мультистратегії V. Проводячи подібні міркування, встановлюємо збіжність і решти вершин підграфів остової системи O з відповідними компонентами узгодженої мультистратегії V. Таким чином, існує лише одна узгоджена мультистратегія для гри $G\,a\left(I, H_{max}, H_{min}\right)$.

Наслідок. *Із встановленого випливає, що в умовах доведеної теореми і для задачі (1) існує лише один розв'язок*.

Відносно ж методу розв'язування задачі (1), зауважимо, що описаний в §24 монографії [1] метод розв'язування задачі багатокритеріального мінімакса, і в умовах поставленої задачі, очевидно, суттєвих змін не зазнає. Скористаємось цим методом при розв'язуванні задачі ілюстративного прикладу, реалізуючи його в системі комп'ютерної математики Mathcad 2001 PRO.

Concurrentia. Дві конкуруючі компанії N_1 і N_2 отримали дозвіл на спорудження автозаправок на ділянках H1, H2 ,H3, H4 вже діючих транспортних шляхів (H5, H1, H4, H3, H6) і (H5, H1, H4, H2, H6) (рис. 1). В кінцевих точках цих маршрутів H5, H6 автозаправки вже діють.

Компанія N1, якій дісталися ділянки H1, H2, H3 при виборі на них точок W1, W2, W3 під забудову автозаправок воліє виходити із необхідності максимізувати мінімальні відстані між сусідніми автозаправками.

Компанії N2 дісталась економічно найбільш вигідна ділянка H4 – перехрестя вказаних шляхів. Ця ділянка дісталась компанії на умовах модернізації цього перехрестя в межах точок прив'язки A4, A5, A6. Виходячи із цих умов, а також маючи намір витіснити сусідні автозаправки в майбутньому, компанія N2 при виборі точки W4 під забудову своєї автозаправки воліє виходити із необхідності мінімізації максимальної відстані до сусідніх автозаправок. Таким чином, перед проектною організацією, якій замовлено проект забудов, попередньо постає багатокритеріальна задача мінімакса.

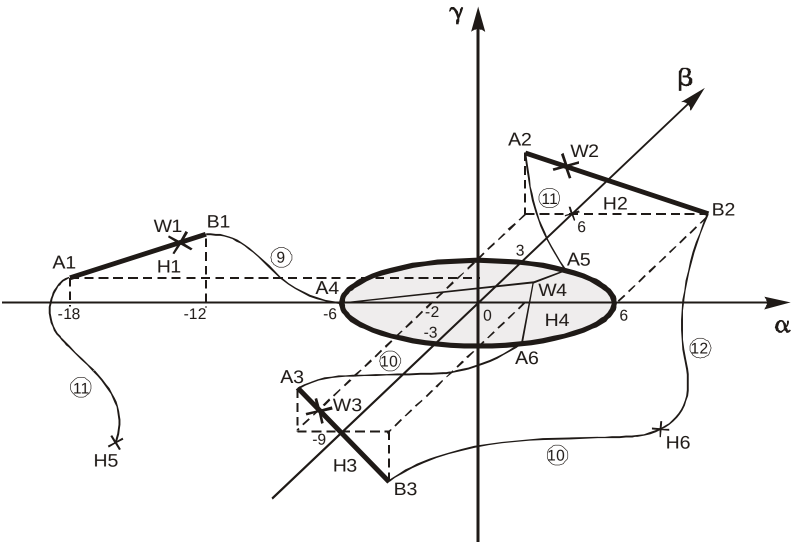

Рис. 1

Формалізуємо цю задачу. В опорний координатний простір (α,β,γ) вкладаємо тотожні йому координатні простори $R^3(1)$, $R^3(2)$, $R^3(3)$, $R^3(4)$ із відповідними в них плинними точками W1(x1,y1,z1), W2(x2,y2,z2), W3(x3,y3,z3), W4(x4,y4,z4).

В координатних просторах $R^3(1)$, $R^3(2)$, $R^3(3)$, $R^3(4)$ означаємо ділянки H1, H2 ,H3, H4:

$$H1=[A1,B1]:\begin{cases} z1=\frac{1}{3}x1+7,, \\ -18\le x1\le -12, \\ y1=0, \end{cases} \qquad A1(-18,0,1),\ B1(-12,0,3);$$

$$H2=[A2,B2]:\begin{cases} z2=-\frac{9}{4}-\frac{3}{8}x2, \\ y2=6, \\ -2\le x2\le 6, \end{cases} \qquad A2(-2,6,3),\ B2(6,6,0);$$

$$H3=[A3,B3]:\begin{cases} z3=-x3, \\ y3=-9, \\ -2\le x3\le 2, \end{cases} \qquad A3(-2,-9,2),\ B3(2,-9,-2);$$

$$H4:\begin{cases} z4=0, \\ \frac{x4^2}{36}+\frac{y4^2}{9}\le 1, \end{cases} \quad A4(-6,0,0), A5\left(3\sqrt{2},\frac{3}{2}\sqrt{2},0\right), A6\left(3\sqrt{2},-\frac{3}{2}\sqrt{2},0\right).$$

Відомі відстані:

$$d(A1,H5)=11;d(A2,A5)=11;d(A3,A6)=12;$$
$$d(B1,A4)=9;d(B2,H6)=12\ ;d(B3,H6)=12.$$

Таким чином, ланцюгам L1={H5,A1,H1}, L2={H1,B1,A4,H4}, L3={H4,A5,A2,H2}, L4={H2,B2,H6}, L5={H6,B3,H3}, L6={H3,A3,A6,H4} (ребрам графа G(H)) зіставляємо реберні функції:

$$r14(x1,z1,x4,y4):=9+\sqrt{(x1+12)^2+(z1-3)^2}+\sqrt{(x4+6)^2+y4^2};$$

$$r36(x3,z3):=10+\sqrt{(x3-2)^2+(z3+2)^2}\ ;$$

$$r15(x1,z1) := 11 + \sqrt{(x1+18)^2 + (z1-1)^2}; \quad r26(x2,z2) := 12 + \sqrt{(x2-6)^2 + z2^2};$$

$$r24(x2,z2,x4,y4) := 11 + \sqrt{(x2+2)^2 + (z2-3)^2} + \sqrt{\left(x4-3\sqrt{2}\right)^2 + \left(y4 - 3\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2};$$

$$r34(x3,z3,x4,y4) := 10 + \sqrt{(x3+2)^2 + (z3-2)^2} + \sqrt{\left(x4-3\sqrt{2}\right)^2 + \left(y4 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}.$$

Графу G(H) буде відповідати матриця інцидентності його неодноточкових вершин і відповідних їм ребер:

$$M(x1,z1,x2,z2,x3,z3,x4,y4) :=$$

$$:= \begin{pmatrix} r14(x1,z1,x4,y4) & r15(x1,z1) & 100 & 100 & 100 & 100 \\ 100 & 100 & r24(x2,z2,x4,y4) & r26(x2,z2) & 100 & 100 \\ 100 & 100 & 100 & 100 & r34(x3,z3,x4,y4) & r36(x3,z3) \\ r14(x1,z1,x4,y4) & 0 & r24(x2,z2,x4,y4) & 0 & r34(x3,z3,x4,y4) & 0 \end{pmatrix}.$$

Тут для зручності “100” заміняє сигнатуру нескінченності.

Міру віддаленості вершин W1, W2, W3, W4 графа G(W1,W2,W3,W4,H5,H6)⊂G(H) визначаємо відповідно критеріальними функціями:

$$k1(x1,z1,x4,y4) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow r14(x1,z1,x4,y4) \\ b \leftarrow r15(x1,z1) \\ d \leftarrow 0.5(a + b - |a-b|) \end{array} \right.$$

$$k3(x3,z3,x4,y4) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow r34(x3,z3,x4,y4) \\ b \leftarrow r36(x3,z3) \\ d \leftarrow 0.5(a + b - |a-b|) \end{array} \right.$$

$$k2(x2,z2,x4,y4) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow r24(x2,z2,x4,y4) \\ b \leftarrow r26(x2,z2) \\ d \leftarrow 0.5(a + b - |a-b|) \end{array} \right.$$

$$p(x1,z1,x2,z2,x3,z3,x4,y4) := \left| \begin{array}{l} a \leftarrow r14(x1,z1,x4,y4) \\ b \leftarrow r24(x2,z2,x4,y4) \\ c \leftarrow r34(x3,z3,x4,y4) \\ d \leftarrow 0.5(a + b + |a - b|) \\ p \leftarrow 0.5(c + d + |c - d|) \end{array} \right.$$

Формуємо вектор–функцію

$$\overrightarrow{g(W1,W2,W3,W4)} \equiv g(x1,z1,x2,z2,x3,z3,x4,y4) :=$$

$$:= (\,k1(x1,z1,x4,y4) \quad k2(x2,z2,x4,y4) \quad k3(x3,z3,x4,y4)\,).$$

і критеріальну функцію p(W1,W2,W3,W4)≡p(x1,z1,x2,z2,x3,z3,x4,y4), де $W1=W1(x1,0,z1)\in H1$, $W2=W2(x2,6,z2)\in H2$, $W3=W3(x3,-9,z3)\in H3$, $W4=W4(x4,y4,0)\in H4$. Зрозуміло тепер, що місця забудови АЗС – точки W1,W2,W3,W4, для компаній N1 і N2, складають єдиний розв’язок задачі багатокритеріального мінімакса:

$$\begin{cases} \overrightarrow{g(W1,W2,W3,W4)} \xrightarrow[\substack{\le \\ \min}]{(W1,W2,W3)\in H_1\times H2\times H3} \max, \\ p(W1,W2,W3,W4) \xrightarrow{W4\in H4} \min. \end{cases} \qquad (2)$$

Розв’язування. Із рис.1 бачимо, що граф G(H1,H2,H3,H4,H5,H6) шляхом розчалення одноточкової вершини H6 конвертується в дерево, а отже, в силу теореми 2, задача (2) має єдиний розв’язок. Знайдемо його. Вибираємо довільним чином початкову мультистратегію для гри Ga(N1,N2) (перший стовпець матриці Q) і обчислюємо при цій мультистратегії значення критеріальних функцій k1,k2,k3,p – стовпець матриці K.

K =

	1
1	17.066
2	17.082
3	15.061
4	17.082

Q^T =

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-12.245	2.918	1.227	1.79	-1.605	1.605	1.665	1.57

На першому кроці при фіксованій точці W4(x4,y4,0) узгоджуємо стратегії гравців компанії N1, тобто знаходимо розв'язок задачі

$$\overrightarrow{g(W1, W2, W3, W4)} \xrightarrow[\underset{\min}{\leq}]{(W1, W2, W3) \in H_1 \times H2 \times H3} \max ,$$

яка в нашому випадку зводиться до трьох задач максимізації критеріальних функцій k1,k2,k3. Далі, фіксуємо знайдені точки W1,W2,W3 і проводимо мінімізацію критеріальної функції p, тобто знаходимо розв'язок задачі

$$p(W1, W2, W3, W4) \xrightarrow{W4 \in H4} \min .$$

Отримані точки W1,W2,W3,W4 вважаємо першим наближенням розв'язку задачі (2). Координати точок першого наближення і відповідні значення критеріальних функцій представлені другими стовпцями матриць Q і K .

Зауважимо, що заради зменшення кількості кроків наближення до розв'язку задачі (2) початкову мультистратегію було вибрана досить близько до нього.

STEP 1

Given

$x4 = 1.665$ $\quad y4 = 1.573$ $\quad z1 = \frac{1}{3}x1 + 7$ $\quad -18 \le x1 \le -12$

$G1 := \text{Maximize}(k1, x1, z1, x4, y4)$ $\quad G1^T =$

	1	2	3	4
1	-12.237	2.921	1.665	1.573

$x1 := G1_1$ $\quad z1 := G1_2$ $\quad x1 = -12.237$ $\quad z1 = 2.921$

Given

$x4 = 1.665$ $\quad y4 = 1.573$ $\quad z2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{8}x2$ $\quad -2 \le x2 \le 6$

$G2 := \text{Maximize}(k2, x2, z2, x4, y4)$ $\quad G2^T =$

	1	2	3	4
1	1.234	1.787	1.665	1.573

$x2 := G2_1$ $\quad z2 := G2_2$ $\quad x2 = 1.234$ $\quad z2 = 1.787$

Given

$x4 = 1.665$ $\quad y4 = 1.573$ $\quad z3 = -x3$ $\quad -2 \le x3 \le 2$

$G3 := \text{Maximize}(k3, x3, z3, x4, y4)$ $\quad G3^T =$

	1	2	3	4
1	-1.593	1.593	1.665	1.573

$x3 := G3_1$ $\quad z3 := G3_2$ $\quad x3 = -1.593$ $\quad z3 = 1.593$

Given

$x1 = G1_1$ $\quad z1 = G1_2$ $\quad x2 = G2_1$ $\quad z2 = G2_2$

$x3 = G3_1$ $\quad z3 = G3_2$ $\quad \frac{1}{36}x4^2 + \frac{1}{9}y4^2 \le 1$

$$G4 := \text{Minimize}(p, x1, z1, x2, z2, x3, z3, x4, y4)$$

$G4^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-12.237	2.921	1.234	1.787	-1.593	1.593	1.671	1.582

$x4 := G4_7$ $\quad y4 := G4_8$ $\quad x4 = 1.671$ $\quad y4 = 1.582$

$i := 2$

$$K^{\langle i \rangle} := \begin{pmatrix} k1(x1, z1, x4, y4) \\ k2(x2, z2, x4, y4) \\ k3(x3, z3, x4, y4) \\ p(x1, z1, x2, z2, x3, z3, x4, y4) \end{pmatrix}$$

$K =$

	1	2
1	17.066	17.075
2	17.082	17.082
3	15.061	15.081
4	17.082	17.082

$$Q^{\langle i \rangle} := \begin{pmatrix} x1 \\ z1 \\ x2 \\ z2 \\ x3 \\ z3 \\ x4 \\ y4 \end{pmatrix}$$

$Q =$

	1	2
1	-12.245	-12.237
2	2.918	2.921
3	1.227	1.234
4	1.79	1.787
5	-1.605	-1.593
6	1.605	1.593
7	1.665	1.671
8	1.57	1.582

На другому кроці наближення до розв’язку задачі (2) повторюємо попередні дії першого кроку, але виходимо тепер уже із знайденої мультистратегії.

STEP 2

Given

$x4 = G4_7 \qquad y4 = G4_8 \qquad z1 = \frac{1}{3}x1 + 7 \qquad -18 \le x1 \le -12$

$G1 := \text{Maximize}(k1, x1, z1, x4, y4)$

$G1^T =$

	1	2	3	4
1	-12.234	2.922	1.671	1.582

$x1 := G1_1 \qquad z1 := G1_2 \qquad x1 = -12.234 \qquad z1 = 2.922$

Given

$x4 = G4_7 \qquad y4 = G4_8 \qquad z2 = \frac{9}{4} - \frac{3}{8}x2 \qquad -2 \le x2 \le 6$

$G2 := \text{Maximize}(k2, x2, z2, x4, y4)$

$G2^T =$

	1	2	3	4
1	1.238	1.786	1.671	1.582

$x2 := G2_1 \qquad z2 := G2_2 \qquad x2 = 1.238 \qquad z2 = 1.786$

Given

$x4 = G4_7 \qquad y4 = G4_8 \qquad z3 = -x3 \qquad -2 \le x3 \le 2$

$G3 := \text{Maximize}(k3, x3, z3, x4, y4)$

$G3^T =$

	1	2	3	4
1	-1.594	1.594	1.671	1.582

$x3 := G3_1 \qquad z3 := G3_2 \qquad x3 = -1.594 \qquad z3 = 1.594$

Given

$x1 = G1_1 \quad z1 = G1_2 \quad x2 = G2_1 \quad z2 = G2_2$

$x3 = G3_1 \quad z3 = G3_2 \quad \frac{1}{36} x4^2 + \frac{1}{9} y4^2 \le 1$

$G4 := \mathrm{Minimize}(p, x1, z1, x2, z2, x3, z3, x4, y4)$

$G4^T =$

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	-12.234	2.922	1.238	1.786	-1.594	1.594	1.674	1.583

$x4 := G4_7 \quad y4 := G4_8 \quad x4 = 1.674 \quad y4 = 1.583$

$i := 3$

$$K^{\langle i \rangle} := \begin{pmatrix} k1(x1, z1, x4, y4) \\ k2(x2, z2, x4, y4) \\ k3(x3, z3, x4, y4) \\ p(x1, z1, x2, z2, x3, z3, x4, y4) \end{pmatrix}$$

$K =$

	1	2	3
1	17.066	17.075	17.078
2	17.082	17.082	17.082
3	15.061	15.081	15.081
4	17.082	17.082	17.082

$$Q^{\langle i \rangle} := \begin{pmatrix} x1 \\ z1 \\ x2 \\ z2 \\ x3 \\ z3 \\ x4 \\ y4 \end{pmatrix}$$

$Q =$

	1	2	3
1	-12.245	-12.237	-12.234
2	2.918	2.921	2.922
3	1.227	1.234	1.238
4	1.79	1.787	1.786
5	-1.605	-1.593	-1.594
6	1.605	1.593	1.594
7	1.665	1.671	1.674
8	1.57	1.582	1.583

Після п’яти кроків отримуємо:

K =

	1	2	3	4	5	6
1	17.066	17.075	17.078	17.08	17.081	17.082
2	17.082	17.082	17.082	17.082	17.082	17.082
3	15.061	15.081	15.081	15.081	15.081	15.081
4	17.082	17.082	17.082	17.082	17.082	17.082

Q =

	1	2	3	4	5	6
1	-12.245	-12.237	-12.234	-12.232	-12.231	-12.23
2	2.918	2.921	2.922	2.923	2.923	2.923
3	1.227	1.234	1.238	1.24	1.241	1.241
4	1.79	1.787	1.786	1.785	1.785	1.785
5	-1.605	-1.593	-1.594	-1.594	-1.593	-1.593
6	1.605	1.593	1.594	1.594	1.593	1.593
7	1.665	1.671	1.674	1.676	1.677	1.678
8	1.57	1.582	1.583	1.583	1.583	1.583

Із представлених в таблицях результатів легко помічаємо наявність узгодженості стратегій гравців вже на четвертому кроці обчислювального процесу. Таким чином, проектна організація може запропонувати компаніям N1 і N2 під забудову АЗС наступні місця:

Місця під забудову АЗС	Значення критеріальних функцій
W1(–12.23;0;2.923)	k1=17.082
W2(1.241;6;1.785)	k2=17.082
W3(–1.593;9;1.593)	k3=15.081
W4(1.678;1.583;0)	P=17.082

Ці місця відповідають вимогам конкуруючих компаній – максимізують критерії гравців компанії N1 і мінімізують критеріальні вимоги для компанії N2.

Список літератури: **1.** *Клименко Вісс.Гр.* Багатокритеріальні формалізації. – Харків: СПДФО Яковлєва Г.Г., 2004. – 308 с. **2.** *Клименко Вісс.Гр.* Задачі багатокритеріальної оптимізації. – Харків: Бізнес Інформ, 2001. – 168 с. **3.** *Клименко В.Г.* Задача багатокритеріального мінімакса. Новые решения в современных технологиях // Вестник ХГПУ. – Харьков. – 1999. – Вып. 59. – С.50-52. **4.** *Клименко В.Г.* Метод розв'язання задачі багатокритеріального мінімакса // Вестник ХГПУ. – Харьков. – 2000. – Вып. 99. – С.79-83.

Надійшла до редакції 25.12.05