

Н.Н. ТКАЧУК, НТУ “ХПИ”

МЕТОДЫ И АЛГОРИТМЫ СИНТЕЗА ФОРМЫ РАБОЧИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ ЗУБЬЕВ ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ПЕРЕДАЧ

Запропоновано методику та алгоритми визначення профілів робочих поверхонь зубів двопараметричних зубчастих передач. Вихідні співвідношення становлять собою умови взаємного огинання поверхонь зубів обох елементів передачі. Застосування кінематичного методу (двопараметричне огинання) із застосуванням матриць переходу дозволило привести вихідну систему рівнянь до системи координат, зв'язаної з однією із ланок. Отримана система нелінійних рівнянь розв'язується методом Ньютона. Запропонований алгоритм застосовано для дослідження поверхонь зуба, що перебуває у циліндро-конічному зацепленні. Визначено геометричну форму бокової поверхні зуба на конічному колесі, що спряжене з круговим зубом циліндричного колеса, що отриманий обертанням евольвенти.

Methods and algorithms for two-parameter gearing teeth's working surfaces definition are proposed. Initial statements are taken as envelope interrelation between teeth's. Application of kinematic method (two-parameter envelope) with the use of transition matrixes enabled to reduce initial set of equations to coordinate system associate with one of the transmission units. Achieved nonlinear equation system is solved by Newton method. Proposed algorithm has been applied to investigation of tooth's surface at cylinder-conic toothing. Lateral surface of the tooth on conic gear wheel conjugated with evolvent rotation tooth on cylinder wheel has been obtained.

Состояние вопроса. Одним из наиболее актуальных направлений в машиностроении является путь создания новых типов механических передач, позволяющих придавать новые свойства вновь проектируемым машинам, приборам, агрегатам. В частности [1, 2], одной из перспективных научных проблем является синтез рабочих поверхностей зубьев двухпараметрических передач, которые позволяют совершать два независимых движения зубчатых колес, находящихся в зацеплении, без его нарушения. При этом возникает комплекс двух взаимосвязанных задач:

- собственно синтез рабочих поверхностей зубьев;
- формирование критериев прочности и жесткости в пространстве геометрических и силовых параметров синтезируемой двухпараметрической передачи.

И первая, и вторая задачи в методическом плане в общем виде могут решаться отдельно друг от друга, однако в процессе реального проектирования важно не просто совмещать их решения, а необходимо произвести интеграцию отдельных математических моделей в единое целое на основе единого параметрического подхода.

Анализ публикаций по рассматриваемой теме [1, 2] показал, что в настоящее время отсутствует в общем виде методика решения всех описанных задач:

- 1 – задача геометрического синтеза рабочих поверхностей зубьев;

2 – методы анализа напряженно-деформированного состояния зубьев двухпараметрической передачи, находящейся в контактном взаимодействии;

3 – комплексная математическая модель для целостного описания как исследуемого объекта, так и методов синтеза двухпараметрических зубчатых передач по кинематическим и прочностным критериям.

В данной статье предлагается решение первой задачи – геометрического синтеза рабочих поверхностей зубьев с учетом обеспечения в дальнейшем возможности интеграции этой математической модели “по горизонтали” (2-я – задача) и “по вертикали” (3-я – задача).

1. Описание движения звеньев двухпараметрических зубчатых передач. Рассмотрим, взаимодействие двух звеньев двухпараметрического зацепления. Звенья 1 и 2 вращаются вокруг произвольно ориентированных в пространстве осей (рис. 1).

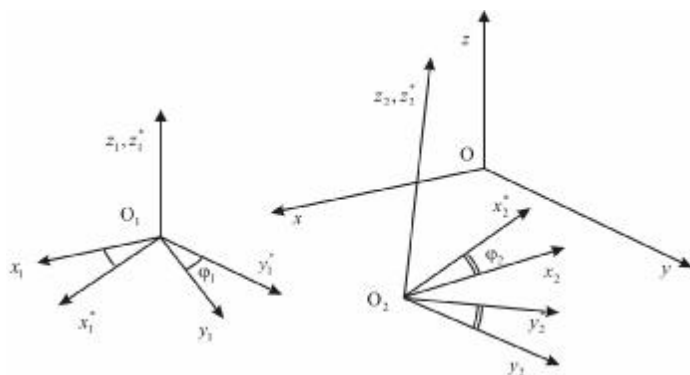


Рис. 1. Системы координат звеньев зубчатого зацепления

При этом

$$\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} = i = \text{const} ;$$

(1)

$$i = \frac{\omega_2}{\omega_1} ; \quad (2)$$

$$i = \frac{z_1}{z_2} , \quad (3)$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \omega_1, \omega_2$ – углы поворота и скорости вращения звеньев 1 и 2; z_1, z_2 – количество зубьев звена 1 и 2 соответственно.

Кроме того, звено 2 движется относительно звена 1 по некоторому закону, определяемому параметром u . Параметры u и φ_1, φ_2 между собой не связаны.

Получаемое двухпараметрическое движение удобно описывать, используя так называемые однородные координаты [3] x'_k, y'_k, z'_k, t'_k :

$$x = x'/t'; \quad y = y'/t'; \quad z = z/t'; \quad t' = 1. \quad (4)$$

Радиусы-векторы точек $\mathbf{r}_k(x_k, y_k, z_k, t_k)$ в различных системах координат связаны следующими соотношениями:

$$\mathbf{r}_i = M_{ij} \mathbf{r}_j, \quad (5)$$

где

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} - \quad (6)$$

матрица перехода от системы координат $Ox_j y_j z_j$ к системе координат $Ox_i y_i z_i$.

Ортогональная матрица

$$L_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (7)$$

описывает поворот системы координат без сдвига начала координат. Зависимость, обратная (5), имеет вид:

$$\mathbf{r}_j = M_{ji} \mathbf{r}_i, \quad (8)$$

причем компоненты b_{lm} матрицы M_{ji} связаны с компонентами a_{lm} обратной ей матрицы M_{ij} следующими соотношениями:

$$b_{lm} = a_{ml}, \quad l, m = 1, 2, 3; \quad (9)$$

$$b_{41} = b_{42} = b_{43} = 0; \quad b_{44} = 1; \quad (10)$$

$$b_{14} = -(a_{11} a_{14} + a_{21} a_{24} + a_{31} a_{34}); \quad (11)$$

$$b_{24} = -(a_{12} a_{14} + a_{22} a_{24} + a_{32} a_{34}); \quad (12)$$

$$b_{34} = -(a_{13} a_{14} + a_{23} a_{24} + a_{33} a_{34}). \quad (13)$$

При рассмотрении движения звеньев двухпараметрических зубчатых передач удобно использовать следующие системы координат (см. рис. 1):

- неподвижная система координат $Ox_0 y_0 z_0 (Oxyz)$, связанная со стойкой;

- системы координат $O_1 x_1 y_1 z_1$, $O_2 x_2 y_2 z_2$, “вмороженные” в движущиеся звенья 1 и 2 соответственно;

• системы координат $O_1x_1^*y_1^*z_1^*$, $O_2x_2^*y_2^*z_2^*$, совпадающие с “вмороженными” системами координат звеньев 1 и 2 в начальный момент времени.

Тогда относительное движение звеньев записываются соотношениями:

$$\mathbf{r}_2 = M_{21}\mathbf{r}_1 ; \quad (14)$$

$$M_{21} = M_{22^*} M_{2^*1^*} M_{1^*1} . \quad (15)$$

Здесь матрица $M_{2^*1^*}$ с компонентами γ_{ij} описывает относительное движение звеньев, задаваемое параметром u :

$$M_{2^*1^*} = M(u) . \quad (16)$$

Матрицы M_{22^*} , M_{1^*1} описывают вращения звеньев 1, 2 вокруг своих осей вращения:

$$M_{22^*} = M(\varphi_2) ; \quad (17)$$

$$M_{1^*1} = M(\varphi_1) . \quad (18)$$

Компоненты матрицы $M_{2^*1^*}$ зависят от выбора того или иного вида относительного движения. Матрицы M_{1^*1} , M_{22^*} имеют простую структуру:

$$M_{1^*1} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} ; \quad (19)$$

$$M_{22^*} = \begin{vmatrix} \cos \varphi_2 & \sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} . \quad (20)$$

Компоненты матрицы M_{12} , связывающие вектор-функции точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ зависимостью

$$\mathbf{r}_1 = M_{12}\mathbf{r}_2 , \quad (21)$$

получаются из компонент матрицы M_{21} по соотношениям, аналогичным (9)–(13).

Приведенные выше уравнения, описывающие движение звеньев двухпараметрических зубчатых передач, позволяют объединить отдельные

виды движения отдельных звеньев в сложное движение, при этом четко выделяя движения, описываемые параметрами φ_1 и $\varphi_2 = \varphi_2(\varphi_1)$, а также относительное движение, описываемое параметром u .

2. Разрешающие соотношения кинематического метода. Рассмотрим основные уравнения кинематического метода [1-3], видоизменив их применительно к рассматриваемой двухпараметрической зубчатой передаче.

В дальнейшем в качестве независимых параметров, описывающих исследуемое движение, принимаются φ_1 и u . Тогда, записывая уравнение поверхности второго звена в параметрической форме (параметры α, θ):

$$r_2 = r_2(\alpha, \theta), \quad (22)$$

условия нахождения вектора скорости относительного движения звеньев в плоскости, касательной к поверхности r_2 в точке сопряжения звеньев, получаем в виде:

$$\frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} \times \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (23)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial u} \cdot \left(\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} \times \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \right) = 0. \quad (24)$$

Здесь первые множители в уравнениях (23), (24) представляют собой составляющие вектора относительной скорости при изменении параметров φ_1 и u соответственно, а векторное произведение в скобках - вектор нормали поверхности. Потребуем в дальнейшем выполнения условий

$$\frac{\partial r_2}{\partial \alpha} \times \frac{\partial r_2}{\partial \theta} \neq 0, \quad (25)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} \times \frac{\partial r_2}{\partial u} \neq 0, \quad (26)$$

получаем систему 2-х уравнений (23), (24), которые в общем виде принимают форму

$$f_1(\alpha, \theta, \varphi_1, u) = 0, \quad (27)$$

$$f_2(\alpha, \theta, \varphi_1, u) = 0. \quad (28)$$

При фиксированных значениях параметров R_2 и θ составляющие вектора скорости определяются с помощью соотношений:

$$\frac{\partial r_2}{\partial \varphi_1} = \frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi_1} \cdot r_1, \quad (29)$$

$$\frac{\partial r_2}{\partial u} = \frac{\partial M_{21}}{\partial u} \cdot r_1, \quad (30)$$

где r_1 вычисляется по формуле (21). С учетом представления (15)

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial \varphi_1} = i \cdot M'_{22*} M_{2*1*} M_{1*1} + M_{22*} M_{2*1*} M'_{1*1}, \quad (31)$$

$$\frac{\partial M_{21}}{\partial u} = M_{22*} M'_{2*1*} M_{1*1}. \quad (32)$$

В правых частях уравнений (31), (32) фигурируют обыкновенные производные соответствующих матриц по параметрам φ_1 , φ_2 и u . При конкретизации поверхности r_2 и выборе ее параметризации (22), а также вида относительного движения звеньев, определяемого параметром u , получаем систему нелинейных разрешающих уравнений (27), (28), для решения которых необходимо в общем случае привлечение численных методов.

3. Алгоритм численного решения системы разрешающих уравнений. Выбор алгоритма численного решения системы нелинейных уравнений (27), (28) зависит от многих факторов, в том числе от вида зависимости функций f_1 , f_2 от φ_1 , u , α , θ . Для множества практически важных случаев решение получаемой системы уравнений получено методом Ньютона [1-10]. Пусть разыскивается точка сопряжения звеньев передачи, определяемая параметрами α^* и θ^* при заданных φ_1 и μ . В качестве начального приближения выбирается вектор

$$v^{(0)} = \{\alpha^{(0)}, \theta^{(0)}\}^T. \quad (33)$$

Для определения $v^* = \{\alpha^*, \theta^*\}^T$ осуществляется итерационный процесс

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + \Delta\alpha^{(k)}, \quad (34)$$

$$\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} + \Delta\theta^{(k)}, \quad (35)$$

где

$$\Delta\alpha^{(k)} = \left(-f_1^{(k)} \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial \theta} \right)^{(k)} + f_2^{(k)} \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial \theta} \right)^{(k)} \right), \quad (36)$$

$$\Delta\theta^{(k)} = \left(f_1^{(k)} \cdot \left(\frac{\partial f_2}{\partial \alpha} \right)^{(k)} - f_2^{(k)} \cdot \left(\frac{\partial f_1}{\partial \alpha} \right)^{(k)} \right), \quad (37)$$

Практически вместо (36), (37) можно использовать приближенные

конечно-разностные соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial \alpha} = (f(\alpha + \delta\alpha, \theta) - f(\alpha, \theta)) / \delta\alpha, \quad (38)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = (f(\alpha, \theta + \delta\theta) - f(\alpha, \theta)) / \delta\theta. \quad (39)$$

Здесь величины $\delta\alpha$ $\delta\theta$ выбираются из соображений обеспечения достаточной точности соотношений (38), (39).

Итерационный процесс уточнения решения прекращается при выполнении требований

$$|\Delta\alpha^{(k)}| \leq \Delta\alpha_{\min}, \quad (40)$$

$$|\Delta\theta^{(k)}| \leq \Delta\theta_{\min}, \quad (41)$$

где параметры $\Delta\alpha_{\min}$, $\Delta\theta_{\min}$ определяют требуемую точность.

Сходимость итерационного процесса (34), (37) зависит от задания начального приближения $v^{(0)}$. В случае невозможности его задания, исходя из геометрических или иных соображений, предлагается в качестве начального приближения принимать вектор искомых параметров, минимизирующий некоторую норму вектора из величин f_1 и f_2 , например,

$$v^{(0)} = \arg\left(\min \sqrt{f_1^2 + f_2^2}\right), \quad (42)$$

на заранее определенной выборке значений R_2 и θ . При этом в случае, если область поиска $v^{(0)}$ заранее ограничена прямоугольником $[\alpha_H; \alpha_K] \times [\theta_H; \theta_K]$, наиболее приемлемо использование простого перебора на сетке, покрывающей данный прямоугольник.

Таким образом, алгоритм численного решения системы разрешающих уравнений сводится к следующим этапам:

1. Задание значений параметров движения ϕ_1 и u , для которых определяется точка сопряжения рабочих поверхностей звеньев.
2. Определение начального приближения $\alpha^{(0)}$ и $\theta^{(0)}$.
3. Осуществление итерационного уточнения решения системы разрешающих уравнений.
4. Вычисление по известным соотношениям r_2 и r_1 .
5. Задание новых значений из определенного множества параметров ϕ_1 , u и повторение пунктов 1 и 2.

В результате решения задачи искомые поверхности будут представлены в виде систем сопряженных точек,

4. Соотношения кинематического метода для цилиндро-конической двухпараметрической зубчатой передачи. Предложенный алгоритм исследования сопряжения двухпараметрических зубчатых передач реализован для случая цилиндро-конического зацепления.

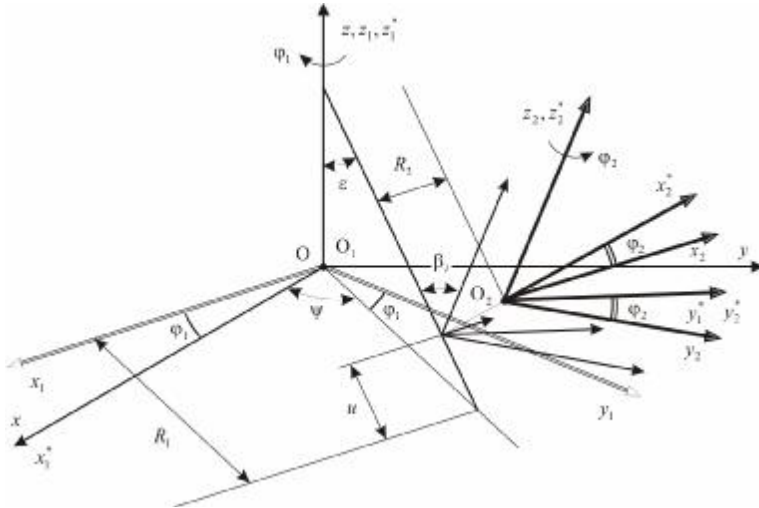


Рис. 2. Системы координат цилиндро-конического зацепления

Расположение линий зубьев на коническом колесе (рис. 2) подчинено условию эквидистантности [11-13], из которого получается соотношение

$$\cos \beta_i = R_1 \cdot \cos \beta / (R_1 - u \cdot \sin \epsilon), \quad (43)$$

где ϵ – угол конусности колеса;

β_i, β – угол наклона линии зуба к образующей конуса в текущем и начальном состоянии $u = 0$;

u – параметр перемещения цилиндрического колеса вдоль образующей конуса;

R_1 – радиус большего сечения конуса.

При этом для угла ψ поворота образующей, содержащей текущую точку i , справедливо равенство (рис. 3):

$$\frac{d\psi}{du} = \frac{1}{R_1 \cdot \cos \beta} \sqrt{1 - (R_1 \cdot \cos \beta / (R_1 - u \cdot \sin \epsilon))^2}, \quad (44)$$

откуда

$$\psi = \frac{1}{\sin \varepsilon} \cdot \left\{ \left[\arccos \left| \frac{R_1 \cos \beta}{R_1 - u \sin \varepsilon} \right| - \sqrt{\left(\frac{R_1 - u \sin \varepsilon}{R_1 \cos \beta} \right)^2 - 1} \right] - [|\beta| - |\operatorname{tg} \beta|] \right\}. \quad (45)$$

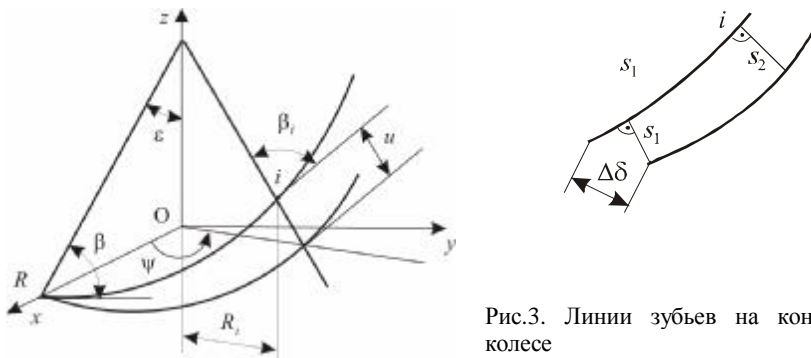


Рис.3. Линии зубьев на коническом колесе

Зуб цилиндрического колеса имеет форму поверхности вращения, образованной вращением эвольвенты вокруг оси, параллельной O_2x_2 , пересекающей ось O_2y_2 в точке $-R_{\text{кр}}$ (рис. 4) [3-7]:

$$x_2 = -\frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \cos(\operatorname{inv} \alpha), \quad (46)$$

$$y_2 = -\frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \sin(\operatorname{inv} \alpha) \cdot \cos \theta + R_{\text{кр}} \cdot (\cos \theta - 1), \quad (47)$$

$$z_2 = \frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \sin(\operatorname{inv} \alpha) \cdot \sin \theta + R_{\text{кр}} \cdot \sin \theta, \quad (48)$$

где θ – угол вращения эвольвенты; α – параметр эвольвенты (рис. 4); $\operatorname{inv} \alpha = (\operatorname{tg} \alpha - \alpha)$; r_{O_2} – начальный радиус зуба цилиндрического колеса.

Дифференцированием (46)- (48) получаем

$$\frac{\partial x_2}{\partial \alpha} = -\frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (\cos(\operatorname{inv} \alpha) - \sin(\operatorname{inv} \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha), \quad (49)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial \alpha} = -\frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (\sin(\operatorname{inv} \alpha) + \cos(\operatorname{inv} \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \cos \theta, \quad (50)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial \alpha} = \frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot (\sin(\operatorname{inv} \alpha) + \cos(\operatorname{inv} \alpha) \cdot \operatorname{tg} \alpha) \cdot \sin \theta, \quad (51)$$

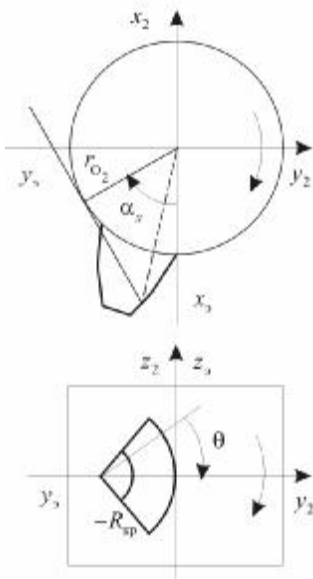


Рис. 4. Параметры зуба цилиндрического колеса

$$\frac{\partial x_2}{\partial \theta} = 0, \quad (52)$$

$$\frac{\partial y_2}{\partial \theta} = \left(\frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \sin(\text{inv} \alpha) - R_{\text{кр}} \right) \cdot \sin \theta, \quad (53)$$

$$\frac{\partial z_2}{\partial \theta} = \left(\frac{r_{O_2}}{\cos \alpha} \cdot \sin(\text{inv} \alpha) - R_{\text{кр}} \right) \cdot \cos \theta. \quad (54)$$

Движение цилиндрического колеса относительно конического следующее: делительный цилиндр радиусом R_2 касается конуса, причем образующая цилиндра наклонена под углом β_i к образующей конуса (см. рис. 3). Ось O_2x_2 перпендикулярна образующей конуса. Вращение колес происходит вокруг осей O_1z_1, O_2z_2 с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 , углы вращения φ_1 и φ_2 соответственно (см. рис. 3). Системы координат $O_1x_1y_1z_1$ и

$O_2x_2y_2z_2$ жестко связаны с исследуемыми звеньями. Системы координат $O_1x_1^*y_1^*z_1^*, O_2x_2^*y_2^*z_2^*$ соответствуют моменту движения $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Матрицы связи систем координат M_{1^*1}, M_{22^*} соответствуют (19), (20). Элементы γ_{ij} матрицы $M_{2^*1^*}$ имеют следующий вид:

$$\gamma_{11} = \cos \varepsilon \cdot \cos \psi; \quad (55)$$

$$\gamma_{12} = \cos \varepsilon \cdot \sin \psi; \quad (56)$$

$$\gamma_{13} = \sin \varepsilon; \quad (57)$$

$$\gamma_{14} = -(R_2 + R_1 \cos \varepsilon); \quad (58)$$

$$\gamma_{21} = \sin \beta_i \sin \varepsilon \cos \psi - \cos \beta_i \sin \psi; \quad (59)$$

$$-\gamma_{22} = \sin \beta_i \sin \varepsilon \sin \psi + \cos \beta_i \cos \psi; \quad (60)$$

$$\gamma_{23} = -\sin \beta_i \cos \varepsilon; \quad (61)$$

$$\gamma_{24} = -(R_1 \cdot \sin \varepsilon - u) \sin \beta_i; \quad (62)$$

$$\gamma_{31} = -\cos \beta_i \cdot \cos \psi \cdot \sin \varepsilon - \sin \beta_i \sin \psi ; \quad (63)$$

$$\gamma_{32} = -\cos \beta_i \sin \varepsilon \sin \psi + \sin \beta_i \cos \psi ; \quad (64)$$

$$\gamma_{33} = \cos \beta_i \cos \varepsilon ; \quad (65)$$

$$\gamma_{34} = (R_1 \cdot \sin \varepsilon - u) \cos \beta_i ; \quad (66)$$

$$\gamma_{41} = \gamma_{42} = \gamma_{43} = 0 ; \quad (67)$$

$$\gamma_{44} = 1. \quad (68)$$

Элементы матрицы $M_{2 \times 1^*}$ получаются дифференцированием (55) - (68):

$$\xi_{11} = -\cos \varepsilon \sin \psi \cdot \psi' ; \quad (69)$$

$$\xi_{12} = \cos \varepsilon \cos \psi \cdot \psi' ; \quad (70)$$

$$\xi_{13} = 0 ; \quad (71)$$

$$\xi_{14} = 0 ; \quad (72)$$

$$\begin{aligned} \xi_{21} = \sin \varepsilon \cdot & \left(\cos \beta_i \cos \psi \cdot \beta_i' - \sin \beta_i \sin \psi \cdot \psi' \right) - \\ & - \left(\cos \beta_i \cos \psi \cdot \psi' - \sin \beta_i \sin \psi \cdot \beta_i' \right); \end{aligned} \quad (73)$$

$$\begin{aligned} \xi_{22} = \sin \varepsilon \cdot & \left(\cos \beta_i \sin \psi \cdot \beta_i' + \sin \beta_i \cos \psi \cdot \psi' \right) - \\ & - \left(\cos \beta_i \sin \psi \cdot \psi' + \sin \beta_i \cos \psi \cdot \beta_i' \right); \end{aligned} \quad (74)$$

$$\xi_{23} = -\cos \varepsilon \cos \beta_i \cdot \beta_i' ; \quad (75)$$

$$\xi_{24} = -(R_1 \cdot \sin \varepsilon - u) \cdot \cos \beta_i \cdot \beta_i' + \sin \beta_i ; \quad (76)$$

$$\begin{aligned} \xi_{31} = \sin \varepsilon \cdot & \left(\sin \beta_i \cos \psi \cdot \beta_i' + \cos \beta_i \sin \psi \cdot \psi' \right) - \\ & - \left(\cos \beta_i \sin \psi \cdot \beta_i' + \sin \beta_i \cos \psi \cdot \psi' \right); \end{aligned} \quad (77)$$

$$\begin{aligned} \xi_{32} = \sin \varepsilon \cdot & \left(\cos \beta_i \cos \psi \cdot \psi' - \sin \beta_i \sin \psi \cdot \beta_i' \right) - \\ & - \left(\sin \beta_i \sin \psi \cdot \psi' - \cos \beta_i \cos \psi \cdot \beta_i' \right); \end{aligned} \quad (78)$$

$$\xi_{33} = -\cos \varepsilon \sin \beta_i \cdot \beta_i' ; \quad (79)$$

$$\xi_{34} = -(R_1 \cdot \sin \varepsilon - u) \cdot \sin \beta_i \cdot \beta_i' - \cos \beta_i ; \quad (80)$$

$$\xi_{41} = \xi_{42} = \xi_{43} = \xi_{44} = 0, \quad (81)$$

где $\psi'(u)$ – производная, определяемая (43),

$$\beta_i'(u) = -\frac{R_1 \cos \beta}{(R_1 - u \sin \varepsilon)^2} \cdot \frac{\sin \varepsilon}{\sqrt{1 - (R_1 \cos \beta / (R_1 - u \sin \varepsilon))^2}}. \quad (82)$$

Матрицы M'_{1*1}, M'_{22*} имеют следующую структуру:

$$M'_{1*1} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (83)$$

$$M'_{22*} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_2 & \cos \varphi_2 & 0 & 0 \\ -\cos \varphi_2 & -\sin \varphi_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (84)$$

5. Применение разработанного алгоритма для решения прикладных задач. Предложенный алгоритм определения рабочих поверхностей зубьев был использован для анализа геометрической формы рабочих поверхностей зубьев цилиндрично-конической передачи с параметрами:

| | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| • конус | радиус большего торца | $R_1 = 140$ мм |
| | угол конусности | $\varepsilon = \pi / 6$ |
| | начальный угол наклона линии зуба | $\beta = \pi / 3$ |
| | число зубьев | $z_1 = 20$ |
| • цилиндр | радиус делительного цилиндра | $R_2 = 52,5$ мм |
| | радиус основного цилиндра | $r_{O_2} = 49,33386$ мм |
| | радиус кривизны кругового зуба | $R_{кр} = 25$ мм |
| | число зубьев | $z_2 = 15$ |
| • передаточное отношение | | $i = \frac{z_1}{z_2} = 1,333$ |

Параметры точности $\Delta\alpha_{\min}$, $\Delta\theta_{\min}$ принимались равными 0,001 мм. Начальное приближение $\nu^{(0)}$ определялось методом простого перебора на прямоугольнике $[0; 1] \times [-\pi/2; \pi/2]$ в координатах α, θ . Использована сетка 15×15 .

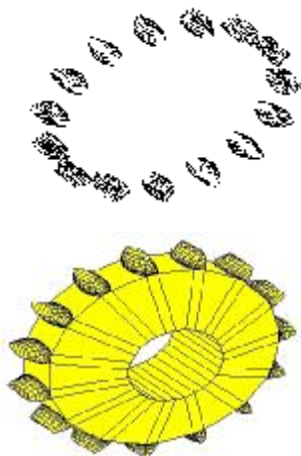


Рис.5. Фрагменты рабочих зубьев цилиндрического колеса

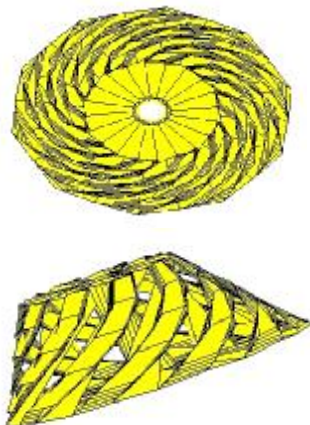


Рис.6. Фрагменты рабочих зубьев конического колеса

На рис. 5, 6 показаны модели фрагментов рабочих поверхностей зубьев цилиндрического и конического зубчатых колес.

Анализ полученных результатов позволяет сделать следующие выводы:

- полученные точки сопряжения на рабочей поверхности зуба конического колеса образуют сетку, в которой линии $\varphi_1 = \text{const}$ соответствуют линии зуба, а линии $u = \text{const}$ представляют собой семейство участков кривых сложной геометрической формы;
- сетка точек сопряжения на поверхности конического колеса топологически эквивалентна прямоугольной;
- точки сопряжения на цилиндрическом колесе расположены в окрестности образующей $\theta = 0$.

Заключение. Разработанная методика и программное обеспечение могут быть использованы для получения семейства сопряженных профилей при задании самой разнообразной формы одной из рабочих поверхностей и различных законов относительного движения звеньев.

Основными задачами дальнейших исследований при этом является:

- проверка достоверности работы алгоритма на примере решения ряда тестовых задач;

- повышение эффективности процедуры поиска точек сопряжения и сравнительный анализ различных алгоритмов решения системы разрешающих уравнений, их комбинации и т.д.;

- анализ явлений в зоне контакта зубьев (непроникновение одного зуба в тело другого, влияние различных параметров на расположение сопряженных точек и т.п.);

- универсализация программного обеспечения с расширением класса решаемых задач.

Предлагаемое программное обеспечение коммутируемо с системами конечно-элементного анализа прочности и жесткости элементов передач и позволяет решать одну из основных задач при проектировании двухпараметрических зубчатых передач и вариаторов, выполненных на их основе.

Кроме того, создана математическая модель, потенциально интегрируемая в комплексную математическую модель синтеза, включающую данную модель как естественную составляющую. Этим созданы основы реализации всего комплекса моделей в виде единого программного продукта решения задач анализа и синтеза двухпараметрических зубчатых передач, что составляет одно из основных направлений дальнейших исследований.

Список литературы. 1. *Ткачук Н.Н., Ткачук Н.А.* Численное моделирование рабочих поверхностей двухпараметрических передач // Вестник НТУ “ХПИ”. Тематический выпуск: Автомобиле- тракторостроение. –Харков: НТУ “ХПИ”. – 2004. – Вып. 24. – С.93-98. 2. Устиненко А.В. О проектировочном расчете двухпараметрических зубчатых передач на контактную выносливость // Механiка та машинобудування. – 2001. – том №1,2. – С.45-47. 3. *Литвин Ф. Л.* Теория зубчатых зацеплений. – Л.: 1968. – 584 с. 4. *Крылов Н.Н.* Теория зацепления огибающих двухпараметрического семейства поверхностей // Известия вузов. Машиностроение, 1963. – №12. 5. *Ерихов М. Л., Грабуст Я. Е.* Интерференция в зацеплениях с точечным касанием, образованных с помощью одной вспомогательной поверхности // Изв. АН Латв. ССР. Серия физических и технических наук, 1965. – Вып. 3. 6. *Ерихов М. Л., Грабуст Я. Е.* Ребро возврата огибающей двухпараметрического семейства поверхностей. // Изв. АН Латв. ССР. Серия физических и технических наук. – 1965. – Вып. 7. 7. *Ерихов М. Л.* К вопросу о синтезе зацеплений с точечным касанием. – В сб. Теория передач в машинах. – М.: Машиностроение, 1966. 8. *Трауб Дж.* Итерационные методы решения уравнений. – М.: Мир, 1985. – 264 с. 9. *Шуп Т.* Решение инженерных задач на ЭВМ. – М.: Мир, 1982. – 238 с. 10. *Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И.* Вычислительные методы. Том I. - М.: Наука, 1976. – 304 с. 11. *Ковалюх В.Р.* Синтез зубчатых на основе колес с равновысокоширокими зубьями и впадинами.: Дисс. канд. техн. наук // Харьков, 1982. – 156 с. 12. *Ковалюх В.Р., Тернюк Н.Э.* Методы обработки зубчатых колес двухпараметрических передач. – Производственно-технический бюллетень, 1981. – №6. – С.26-27. 13. А.с. СССР №1128025, МКИ⁴ F16H3/42. Способ передачи вращения в цилиндрикоконической зубчатой передаче и цилиндрикоконическая зубчатая передача

Поступила в редколлегию 17.12.2005