

Е.И.ЗИНЧЕНКО, Н.А.ТКАЧУК, д-р техн. наук,
И.Я.ХРАМЦОВА, НТУ “ХПИ”

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТЕОРИИ СИНТЕЗА ПО ТРЕМ ПОЛОЖЕНИЯМ ДЛЯ СИНТЕЗА МЕХАНИЗМОВ ЧЕТВЕРТОГО КЛАССА С ПРИБЛИЖЕННЫМ ВЫСТОЕМ ВЫХОДНОГО ЗВЕНА

У статті ставиться питання можливості використання теорії синтезу за трьома положеннями для розв'язання задачі параметричного синтезу шестиланкових механізмів четвертого класу з наближеною зупинкою вихідної ланки. Наводиться алгоритм синтезу ШМЧК з наближеною зупинкою вихідної ланки.

In the article the question of possibility of the use of theory of synthesis is put for to three positions for the decision of task of parametric synthesis of six-link mechanisms of fourth class with the stop of driven link. The algorithm of synthesis of six-link mechanisms of fourth class is pointed with the stop of driven link.

Актуальность. В настоящее время разработаны методы синтеза механизмов второго и третьего классов с выстоями. Частично разработаны методы синтеза механизмов более высоких классов с выстоями. В основном это графоаналитические методы синтеза механизмов. Высокое качество и большая продолжительность выстоя обеспечивается механизмами второго класса за счет большого числа звеньев. Большое количество звеньев отрицательно сказывается на динамике механизма и его стоимости. Простейшие шестизвенные механизмы второго класса хотя и не имеют этих недостатков, но имеют ограниченные функциональные возможности. Поэтому разработка методов синтеза простейших шестизвенных механизмов четвертого класса для получения движения выходного звена с остановкой является как актуальной народнохозяйственной задачей, так и актуальной задачей машиноведения.

Объекты исследований – шестизвенные механизмы четвертого класса (ШМЧК) с выходным звеном ползуном и выходным звеном коромыслом.

Постановка задачи синтеза ШМЧК с выстоем выходного звена. Рассмотрим постановку задачи синтеза ШМЧК с приближенной остановкой выходного звена на примере механизма с выходным звеном ползуном. На рис. 1 показана схема такого механизма.

Естественный подход к решению задачи следующий. Задаемся тремя параметрами механизма, например $l_1 = OA, y_E, y_B$; тремя положениями кривошипа, соответствующими выстойю выходного ползуна $5 (j_1 j_2 j_3)$ или положениями ползуна на выстой, определяемыми координатой точки $B (x_B)$. Для каждого из трех положений кривошипа составляем по два уравнения замкнутых контуров [1] и проектируем эти уравнения на координатные оси. Получаем 12 трансцендентных алгебраических уравнений, решение которых должно

позволить определить недостающие параметры механизма: $l_{AC}, l_{CD}, a, l_{CB}, l_{DE}, x_E$, а также три угла y_i и три угла g_i , соответствующие трем положениям кривошипа j_i ($i = 1, 2, 3$).

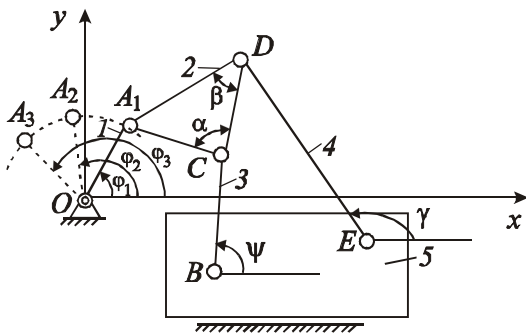


Рис. 1. ШМЧК с выходным звеном ползуном

Недостатки этого подхода очевидны.

1. Решение системы полученных трансцендентных алгебраических уравнений возможно только численными методами.

2. Получается множество решений, из которых следует выбрать только одно, соответствующее механизму одной сборки. Для этого следует провести кинематическое исследование механизмов, соответствующих всем решениям, каждое из которых представляет собой множество итерационных процессов, так как нет конечных алгоритмов анализа механизмов четвертого класса.

3. Полученный механизм может не иметь кривошипа. В этом случае необходимо задать другие значения параметров и искать новые решения.

4. Динамические характеристики механизма могут оказаться неудовлетворительными. В этом случае также следует искать решение заново.

Перейдем непосредственно к постановке задачи синтеза ШМЧК с выстоем выходного звена.

Пусть имеется шарнирный четырехзвенник (ШЧ) $BCDE$, шатунная кривая некоторой его шатунной точки в трех точках совпадает с дугой окружности радиуса $R = l_{OA}$.

Если основание BE ШЧ $BCDE$ сделать подвижным и добавить кривошип радиуса R , то получим механизм четвертого класса (рис.2), который кинематически эквивалентен кулисному механизму с поступательно движущейся кулисой (рис. 3) и который будет иметь выстой в крайнем положении. Таким образом, задача синтеза ШМЧК с выстоем сводится к синтезу ШЧ $BCDE$, шатунная точка которого при движении механизма попадает в положения A_1, A_2, A_3 .

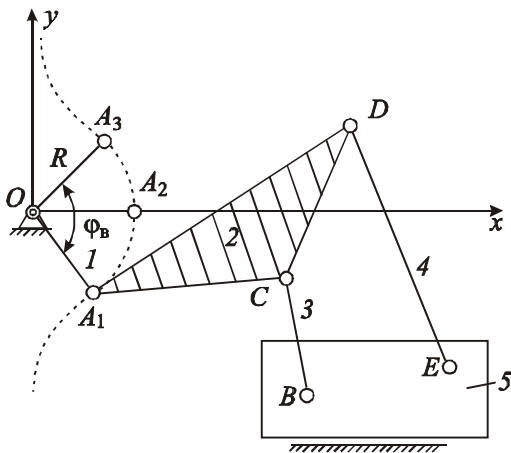


Рис. 2. Траектория шатунной точки A ШЧ $BCDE$ в трех точках совпадает с дугой окружности радиуса R

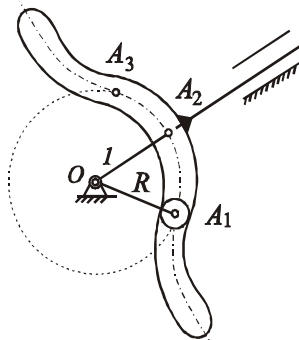


Рис. 3. Эквивалентный механизм с поступательно движущейся кулисой

Так как это единственное требование к шатунной кривой, то синтез такого механизма можно выполнить не стандартным, достаточно сложным методом, а довольно простым, и сделать это можно следующим образом.

1) Спроектировать ШЧ $OACB$ по трем положениям кривошипа, задавшись при этом тремя положениями кривошипа, соответствующими углу выстоя проектируемого шестизвенного механизма, и тремя положениями коромысла BC . Задавшись положением точки D на шатуне AC , получим три положения этой точки, соответствующие трем положениям кривошипа OA (рис. 4).

2) Три точки D_i всегда лежат на одной окружности. Находим центр этой окружности E и принимаем его за положение оси шарнира E , а радиус окружности принимаем за длину коромысла DE (рис. 5).

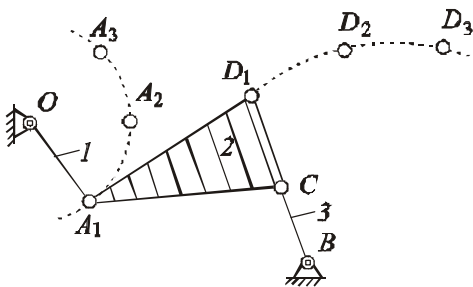


Рис. 4. Три положения точки D

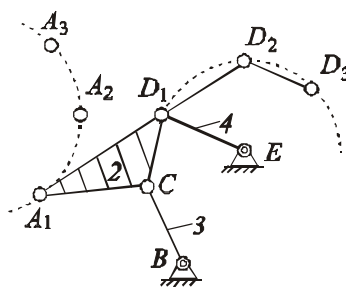


Рис. 5. Нахождение оси шарнира E

Таким образом, получен ШЧ $BCDE$, шатунная точка A которого обязательно проходит через три точки A_1, A_2, A_3 , лежащие на окружности радиуса OA .

3) Шарниры B и E следует поместить на ползун и выбрать направление его движения. В результате получится требуемый шестизвенный механизм (см. рис. 1), и синтез механизма на этом заканчиваем. Указанный алгоритм синтеза описывается ниже подробно.

Метод синтеза ШМЧК с выстоем выходного звена. Предлагается в качестве первого шага использовать метод синтеза по трем положениям. Суть его состоит в следующем: отыскать первое положение такого четырехзвенника, у которого при переходе из первого во второе и третье положения заданным углам поворота j_{12} и j_{13} входного звена OA соответствуют заданные углы поворота y_{12} и y_{13} выходного звена CB (рис. 6). Подробно эта задача рассмотрена в [2]. Углы $j_{12}, j_{13}, y_{12}, y_{13}$ задаются не только по величине, но и по направлению. Геометрическое решение этой задачи дано Альтом.

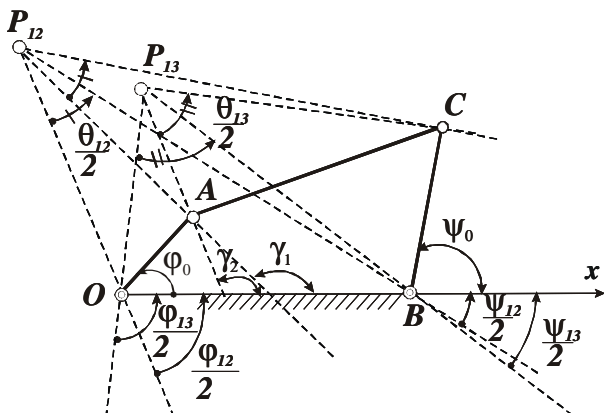


Рис. 6. Месторасположение полюсов конечных поворотов при синтезе ШЧ по трем положениям

Метод синтеза ШЧ $BCDE$ состоит из следующих шагов:

- а) синтез ШЧ $OACB$ по трем положениям;
- б) синтез ШЧ $BCDE$;
- в) синтез всего механизма.

Рассмотрим подробно эти шаги.

а) При синтезе ШЧ $OACB$ задаемся следующими величинами: j_{12}, j_{13} (см. рис. 6) – углами поворота кривошипа OA (угол j_{13} равен углу выстоя j_B проектируемого шестизвенного механизма); y_{12}, y_{13} – углами поворота

коромысла CB ; l_{BC} – длиной коромысла CB ; y_0 – начальным углом поворота коромысла CB ; l_{OB} – длиной стойки (принимая равной единице).

Алгоритм решения этой задачи описан в [2].

1. Находим координаты полюса конечного поворота P_{12} . Они находятся из уравнений прямых OP_{12} и BP_{12} (рис.6) [2]:

$$\begin{cases} x_{P_{12}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{J_{12}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{y_{12}}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{J_{12}}{2}\right)}; \\ y_{P_{12}} = -x_{P_{12}} \operatorname{tg}\left(\frac{y_{12}}{2}\right) \end{cases} \quad (1)$$

2. Аналогично находим координаты полюса конечного поворота P_{13} . Они находятся из уравнений прямых OP_{13} и BP_{13} (рис. 6):

$$\begin{cases} x_{P_{13}} = \frac{\operatorname{tg}\left(\frac{J_{13}}{2}\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{y_{13}}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{J_{13}}{2}\right)}; \\ y_{P_{13}} = -x_{P_{13}} \operatorname{tg}\left(\frac{y_{13}}{2}\right) \end{cases} \quad (2)$$

3. Определяем координаты точки C (см. рис. 6):

$$\begin{cases} x_C = l_{BC} \cos y_0 + 1; \\ y_C = l_{BC} \sin y_0 \end{cases} \quad (3)$$

4. Находим координаты точки A . Они находятся из условия пересечения прямых AP_{12} и AP_{13} в точке A (рис. 6) [3]:

$$\begin{cases} y_A - y_{P_{12}} = \operatorname{tg} g_1 (x_A - x_{P_{12}}); \\ y_A - y_{P_{13}} = \operatorname{tg} g_2 (x_A - x_{P_{13}}). \end{cases} \quad (4)$$

После решения (4) имеем:

$$\begin{cases} x_A = \frac{y_{P_{12}} - y_{P_{13}} + \operatorname{tg} g_2 x_{P_{13}} - \operatorname{tg} g_1 x_{P_{12}}}{\operatorname{tg} g_2 - \operatorname{tg} g_1}; \\ y_A = y_{P_{13}} + \operatorname{tg} g_2 (x_A - x_{P_{13}}) \end{cases} \quad (5)$$

где величины g_1 и g_2 определяются следующим образом (рис. 7, 8):

$$g_1 = b_1 - (j_{12} - y_{12})/2; \quad (6)$$

$$g_2 = b_2 - (j_{13} - y_{13})/2. \quad (7)$$

Величина b_1 (рис. 7) определяется из уравнения прямой $P_{12}C$:

$$y_{P_{12}} - y_C = \operatorname{tg} b_1 (x_{P_{12}} - x_C),$$

откуда

$$b_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_{P_{12}} - y_C}{x_{P_{12}} - x_C} \right). \quad (8)$$

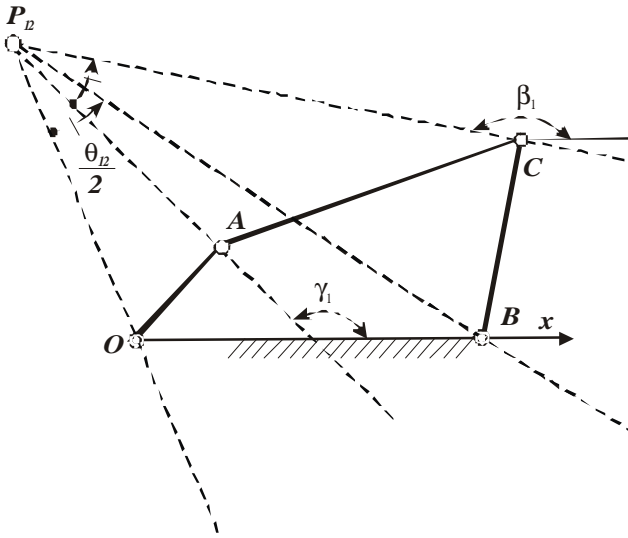


Рис. 7. Нахождение величины b_1 в задаче синтеза по трем положениям

Аналогично определяется величина b_2 (рис. 8) из уравнения прямой $P_{13}C$:

$$b_2 = \operatorname{arctg} \left(\frac{y_{P_{13}} - y_C}{x_{P_{13}} - x_C} \right), \quad (9)$$

5. Определяем длину кривошипа OA l_{OA} :

$$l_{OA} = \sqrt{x_A^2 + y_A^2}. \quad (10)$$

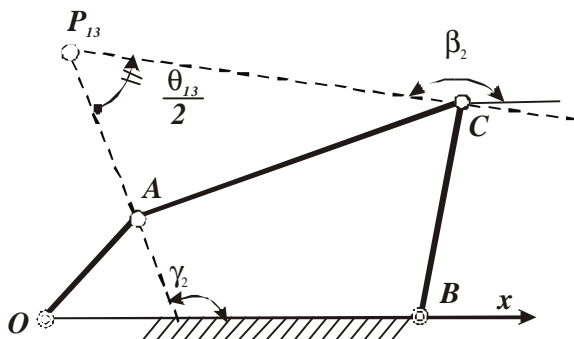


Рис. 8. Нахождение величины b_2 в задаче синтеза по трем положениям

6. Определяем длину шатуна AC l_{AC} :

$$l_{AC} = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}. \quad (11)$$

7. Находим угол j_0 (см. рис. 6), определяющий первое положение кривошипа:

$$j_0 = \arctg \frac{y_A}{x_A}. \quad (12)$$

8. Проверяем, во всех ли трех положениях кривошипа, соответствующих углам $j_0, j_0 + j_{12}, j_0 + j_{13}$, ШЧ имеет одинаковую сборку, определяемую коэффициентом сборки по формуле:

$$\left| \overline{AC} \times \overline{CB} \right| = \begin{vmatrix} \mathbf{r}_i & \mathbf{r}_j \\ x_C - x_A & y_C - y_A \\ x_B - x_C & y_B - y_C \end{vmatrix} = (x_C - x_A)(y_B - y_C) - (y_C - y_A)(x_B - x_C). \quad (13)$$

б) Синтез ШЧ $BCDE$.

1. Задаемся углом α и длиной звена CD l_{CD} (рис. 9), определяющими положение точки D на шатуне AC ШЧ $OACB$, и для трех положений кривошипа OA ШЧ $OACB$, соответствующих углам $j_0, j_0 + j_{12}, j_0 + j_{13}$, находим три положения точки $D_i (i=1, 2, 3)$ (рис. 4).

2. Находим координаты точки E как центра окружности, на которой лежат точки $D_i (i=1, 2, 3)$ (рис. 10).

Для этого находим в системе координат xu (рис. 9) координаты точек N_1 и N_2 , где N_1 – середина отрезка D_1D_2 , N_2 – середина отрезка D_2D_3 (рис. 10):

$$\begin{cases} x_{N_1} = \frac{x_{D_1} + x_{D_2}}{2}; \\ y_{N_1} = \frac{y_{D_1} + y_{D_2}}{2}. \end{cases} \quad (14)$$

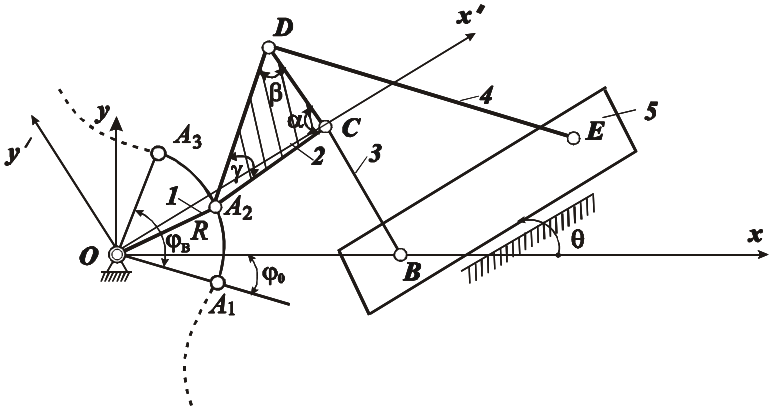


Рис. 9. ШМЧК с выходным звеном ползун

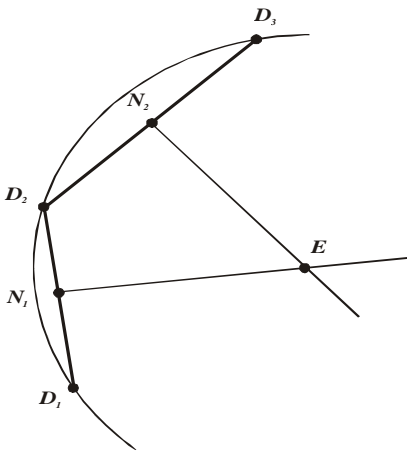


Рис. 10. Нахождение координат точек N_1 и N_2

$$\begin{cases} x_{N_2} = \frac{x_{D_2} + x_{D_3}}{2}; \\ y_{N_2} = \frac{y_{D_2} + y_{D_3}}{2}. \end{cases} \quad (15)$$

Запишем уравнение прямой D_1D_2 и прямой D_2D_3 в отрезках [3]:

$$\frac{y - y_{D_1}}{y_{D_2} - y_{D_1}} = \frac{x - x_{D_1}}{x_{D_2} - x_{D_1}}, \quad (16)$$

$$\frac{y - y_{D_2}}{y_{D_3} - y_{D_2}} = \frac{x - x_{D_2}}{x_{D_3} - x_{D_2}}. \quad (17)$$

Уравнения (16) и (17) можно

записать в виде:

$$y = k_1 x + b_1,$$

где k_1 – тангенс угла наклона прямой D_1D_2 к оси x ;

$$y = k_2 x + b_2,$$

где k_2 – тангенс угла наклона прямой D_2D_3 к оси x .

Из (16)

$$y = x \left(\frac{y_{D_2} - y_{D_1}}{x_{D_2} - x_{D_1}} \right) - \frac{x_{D_1} (y_{D_2} - y_{D_1})}{x_{D_2} - x_{D_1}} + y_{D_1}. \quad (18)$$

Из (17)

$$y = x \left(\frac{y_{D_3} - y_{D_2}}{x_{D_3} - x_{D_2}} \right) - \frac{x_{D_2} (y_{D_3} - y_{D_2})}{x_{D_3} - x_{D_2}} + y_{D_2}. \quad (19)$$

Известно, что центр окружности, проходящей через три точки D_1, D_2, D_3 , определяется пересечением двух прямых, перпендикулярных отрезкам хорд D_1D_2 и D_2D_3 , и проходящих через середины этих отрезков (см. рис. 10) [3].

Запишем уравнения нормалей к хордам D_1D_2 и D_2D_3 , проходящих через точки N_1 и N_2 (рис. 10) [3]:

$$y = y_{N_1} - \frac{1}{k_1} (x - x_{N_1}), \quad (20)$$

$$y = y_{N_2} - \frac{1}{k_2} (x - x_{N_2}). \quad (21)$$

Из уравнения (18)

$$k_1 = \frac{y_{D_2} - y_{D_1}}{x_{D_2} - x_{D_1}}. \quad (22)$$

Из уравнения (19)

$$k_2 = \frac{y_{D_3} - y_{D_2}}{x_{D_3} - x_{D_2}}. \quad (23)$$

Из уравнений (20) и (21) с учетом (14), (15), (22), (23) имеем:

$$y_E = \frac{y_{D_1} + y_{D_2}}{2} - \frac{x_{D_2} - x_{D_1}}{y_{D_2} - y_{D_1}} \left(x_E - \frac{x_{D_1} + x_{D_2}}{2} \right), \quad (24)$$

$$y_E = \frac{y_{D_2} + y_{D_3}}{2} - \frac{x_{D_3} - x_{D_2}}{y_{D_3} - y_{D_2}} \left(x_E - \frac{x_{D_2} + x_{D_3}}{2} \right). \quad (25)$$

Решив совместно уравнения (24) и (25), получим выражение:

$$\left\{ \begin{array}{l} x_E = \frac{(y_{D_3} - y_{D_1}) - (x_{D_1} + x_{D_2}) \left(\frac{x_{D_2} - x_{D_1}}{y_{D_2} - y_{D_1}} \right) + (x_{D_2} + x_{D_3}) \left(\frac{x_{D_3} - x_{D_2}}{y_{D_3} - y_{D_2}} \right)}{2 \left(\frac{x_{D_3} - x_{D_2}}{y_{D_3} - y_{D_2}} - \frac{x_{D_2} - x_{D_1}}{y_{D_2} - y_{D_1}} \right)}, \\ y_E = \frac{y_{D_1} + y_{D_2}}{2} + \left(\frac{x_{D_1} + x_{D_2}}{2} - x_E \right) \left(\frac{x_{D_2} - x_{D_1}}{y_{D_2} - y_{D_1}} \right). \end{array} \right. \quad (26)$$

Таким образом, определены параметры ШЧ $BCDE$, относительная шатунная кривая точки A которого проходит через точки A_1, A_2, A_3 , и эти точки лежат на окружности радиуса R с центром в точке O .

е) Синтез всего механизма.

До сих пор шарниры B и E считались неподвижными (см. рис. 5). В действительности, в точках B и E звенья 3 и 4 образуют вращательные кинематические пары с выходным звеном 5. Для полного синтеза ШМЧК осталось выбрать направление движения ползуна 5 (см. рис. 9) либо положение оси вращения коромысла 5 (рис. 11), если у ШМЧК выходным звеном является коромысло.

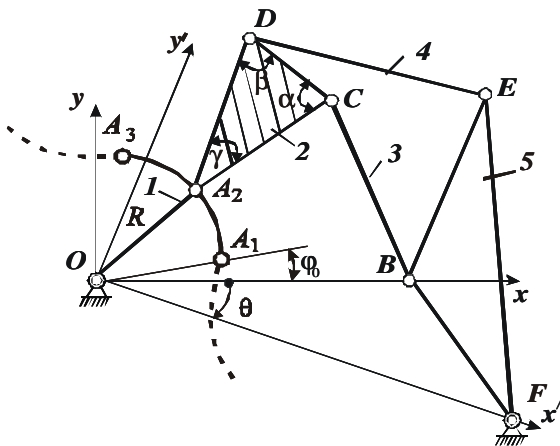


Рис. 11. ШМЧК с выходным звеном коромыслом

Угол q (см. рис. 9), определяющий направление движения ползуна, должен находиться внутри угла выстоя j_B : $q \in [j_0, j_0 + j_B]$. В противном случае выстой будет иметь место не в крайнем положении выходного звена. Иными словами, угол q вычисляется по формуле:

$$q = j_0 + k_1 j_B + kp,$$

где величина k_1 – варьируемый параметр, задается в пределах $0,2 \div 0,8$ отрезка угла выстоя, фактически определяет направление движения ползуна; величина k характеризует движение ползуна после выстоя либо в одну, либо в другую сторону.

Угол q (рис.11), который образует межцентровая прямая OF с осью x , можно выбрать по формуле

$$q = j_0 + k_1 j_B + k \frac{p}{2},$$

где параметры k_1 и k имеют тот же смысл, что и для механизма, изображенного на рис. 9.

1. Для механизма, изображенного на рис. 11, определяем длину

$$l_{OF} = \frac{R}{\sin\left(\frac{y^\Sigma}{2}\right)}, \quad (27)$$

где величина y^Σ – размах коромысла и входит в разряд исходных данных.

Варьирование величины k_1 дает возможность регулировать время рабочего и холостого хода, а следовательно, регулировать значения скоростей и ускорений на участках рабочего и холостого хода. Значения величины k_1 , взятое на границах отрезка угла выстоя или вблизи нее, нежелательно, т. к. решение задачи дает плохой результат с точки зрения динамики.

2. После того, как выбрали направление движения ползуна или положение неподвижного шарнира F , необходимо произвести перерасчет координат всех точек в новой системе координат $x'y'$ (рис. 9, 11).

Таким образом, все параметры шестизвенного механизма определены.

Результаты синтеза ШМЧК с выстоем выходного звена. Проведен синтез ряда механизмов, использующий данную теорию. Рассмотрим ШМЧК с выходным звеном ползуном. Исходные данные для синтеза по трем положениям: $j_{12} = 47^\circ$, $j_B = 90^\circ$, $y_{12} = -45^\circ$, $y_{13} = -91^\circ$, $y_0 = 126^\circ$, $l_{BC} = 0,3$, $a = 11^\circ$, $l_{CD} = 0,8$, $l_{OB} = 1$.

В результате синтеза получены следующие относительные размеры этого механизма: $l_{OA} = 0,28$, $l_{AC} = 0,99$, $l_{DE} = 0,55$, $l_{AD} = 0,25$, $g = 0,65 \text{ рад}$, $y_B = 0,963$, $y_E = 0,136$. Был спроектирован аналогичный механизм с выходным звеном коромыслом. Исходные данные для синтеза по трем положениям те же, $y^\Sigma = 30^\circ$. В результате синтеза получены следующие

относительные размеры этого механизма: $l_{OA} = 0,28$, $l_{AC} = 0,99$, $l_{DE} = 0,55$,
 $l_{AD} = 0,25$, $g = 0,65 \text{ рад}$, $y_B = 0,963$, $y_E = 0,136$, $x_F = 0$, $y_F = -1,08$,
 $l_{BF} = 2,06$, $l_{EF} = 1,3$, $l_{BE} = 1,12$, $\angle BFE = 29,3^\circ = 0,511 \text{ рад}$.

Выводы. При проектировании механизма по трем положениям, хотя и задается ряд параметров произвольно, но получается однозначное решение. Сложность, которая может в этом случае возникнуть, состоит в том, что разные положения реализуются разными сборками. Но вероятность разныхборок мала, так как угол выстоя, как правило, меньше 120° . Но, с другой стороны, легко проверить, принадлежат ли все положения одной сборке или нет. Если нет, то это решение отбрасывается автоматически.

Если проектировать четырехзвенник по четырем или по пяти положениям, то в общем случае шатунная кривая шарнирного четырехзвенника будет ближе приближаться к дуге окружности. Но этого же приближения можно достичь за счет оптимизации произвольно задаваемых параметров. С другой стороны, при проектировании шарнирного четырехзвенника по четырем положениям необходимо строить кривую круговых точек Бурместера [2], которая определяет все множество решений. Но в этом случае автоматизировать поиск достаточно проблематично. В то же время значительно возрастает вероятность того, что заданные положения будут реализовываться механизмами с разными сборками.

При проектировании механизма по пяти положениям возможен вариант, что решение вообще не будет найдено (если проектировать методами кинематической геометрии). Если проектировать механизм по четырем положениям алгебраическими методами, то задача сведется к решению системы нелинейных алгебраических уравнений со всеми вытекающими при этом проблемами, а именно:

- а) нужно иметь хорошее первое приближение;
- б) система решается итерационными методами, которые по трудоемкости не лучше, чем методы оптимизации;
- в) вероятность наличия нескольких решений, что будет соответствовать разным сборкам механизма.

Список литературы. 1. Левитский Н.И. Теория механизмов и машин. – М.: Наука, 1979. – 576 с. 2. Артоболевский И.И., Левитский Н.И., Черкудинов С.А. Синтез плоских механизмов. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит.-ры, 1959. – 1084 с. 3. Г. Корн, Т. Корн. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970. – 720 с.

Поступила в редколлегию 19.10.06