

**Список використаних джерел:** 1. Библок Н.І., Зінько Р.В., Дадак Р.М., Маковейчук О.М. Залежність динамічних властивостей дволанкового автопотяга від пружної характеристики зчіпного пристрою // Науковий вісник НЛТУУ. – 2005. – Вип. 15.4. – С.90-95. 2. Библок Н.І., Зінько Р.В., Дадак Р.М., Маковейчук О.М. Дослідження динамічних властивостей дволанкового автопотяга при подоланні одиночної перешкоди типу “сходінка”// Науковий вісник НЛТУУ. – 2006. – Вип. 16.1. – С. 113-119. 3. Зінько Р.В. Обґрунтування конструктивних та експлуатаційних параметрів і характеристик мобільних машин із змінюваним центром мас: Дис... канд. техн. наук: 05.02.02. – Львів, 2002. – 199 с. 4. Закин Я.Х., Щукин М.М., Марголис С.Ч., Ширяев П.П., Андреев А.С. Конструкции и расчет автомобильных поездов. – Л.: Машиностроение, 1969. – 332 с. 5. Павловський М.А. Теоретична механіка: Підручник. – К.: Техніка, 2002. – 512 с. 6. [www.mathcad.com](http://www.mathcad.com). 7. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: Учеб. пособие. – В 10-ти т. Т. I. Механика. – М.: Наука, 1988. – 216 с. 8. Яблонський А.А., Норејко С.С. Курс теории колебаний. – М.: Высш. школа, 1975. – 248 с.

Надійшло до редакції 24.10.07

УДК 539.3

**А.А. ЗОЛОЧЕВСКИЙ**, докт. техн. наук, НТУ „ХПИ”

## **О ВЫБОРЕ ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ УТОЧНЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ ИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Розглянута роль інваріантів тензору напружень в узагальнених визначальних співвідношеннях для нелінійного деформування ізотропних матеріалів. Проаналізовані експериментальні дані для складного напруженого стану. Розглянуті закономірності пошкоджуваності ізотропних матеріалів. Сформульовані практичні рекомендації.

A role of the invariants of the stress tensor in the generalized constitutive equations of the nonlinear deformation for the isotropic materials has been considered. The experimental data at the complex stress state conditions have been analyzed. Principal features of the damage for the isotropic materials have been given. Practical recommendations have been formulated.

**Введение.** Проблема уточнения определяющих уравнений для деформируемых сред в настоящее время уделяется первостепенное значение. Это во многом обусловлено внутренней логикой развития механики деформируемого твердого тела по пути учета и адекватного описания различных эффектов, сопровождающих процесс деформирования. При этом для современного уровня развития механики характерен такой ее этап, когда осмысление имеющихся экспериментальных данных и выполненных теоретических исследований должно приводить к формулировке определяющих законов деформирования материалов.

На этом пути, проблема построения определяющих уравнений применительно к средам, проявляющим зависимость деформационных характеристик от вида нагружения, должна представлять несомненный теоретический интерес. Подчеркнем также, что эта зависимость не учитывается в традиционной механике деформируемого твердого тела [1].

Кроме теоретической значимости, существует практическая потребность в изучении поставленной проблемы. Представителями сред, характеристики которых зависят от вида нагружения, являются горные породы, грунты, порошковые материалы, пористые металлы и другие микронеоднородные среды, содержащие микротрещины и субмикротрещины, включения, поры и другие особенности структуры. Изучение законов деформирования горных пород и грунтов позволит установить закономерности механических процессов, происходящих в земной коре, что может быть использовано, например, в горнодобывающей промышленности при разработке месторождений полезных ископаемых. Необходимость исследования закономерностей деформирования пористых и порошковых материалов (медь, бронза, сталь, титан, вольфрам, кобальт, железо и т.д.) связана с их широким применением в машиностроении, авиационной, химической, нефтяной, металлургической, пищевой и других отраслях промышленности. Их используют в качестве фильтрующих элементов в фильтрах для очистки газов и жидкостей от примесей, конструкционных материалов при создании турбинных лопаток, камер сгорания, гибридных двигателей, ионизаторов в ионных двигателях, глушителей шума, аппаратов высокого давления, штампов, прокатных валков и т.д.

Другими представителями сред рассматриваемого класса являются легкие сплавы, конструкционные и инструментальные стали, графиты, бетон, пластмассы, чугуны, огнеупоры, керамика, композитные материалы зернистой и волокнистой структуры. Данные материалы могут проявлять зависимость деформационных характеристик от вида нагружения при низких, комнатных и повышенных температурах. Различные тонкостенные и толстостенные элементы конструкций современных машин, аппаратов, установок, приборов выполняются из рассматриваемых материалов и функционируют при сложных условиях силового и температурного нагружения. Жесткие требования, предъявляемые к весовым характеристикам изделий и предельным значениям нагрузок, вызывают необходимость проведения исследований кратковременной и длительной прочности элементов конструкций. На этом пути важное место занимают расчеты за пределами линейной упругости и на ползучесть, проведенные с учетом реального поведения материалов.

**1. Обсуждение роли инвариантов напряжений.** Напряженное состояние в каждой точке изотропного тела определяется тремя инвариантами тензора напряжений  $\sigma_{kl}$ . Выбор базовых инвариантов напряжений неоднозначен и производится в литературе по-разному [2]. Вместе с тем всегда возможен однозначный переход от одной системы базовых инвариантов к другой.

В большинстве рассмотренных в литературе уточненных моделей изотропных сред привлекаются только два базовых инварианта тензора напряжений [2]. При этом преобладают два подхода. В первом из них в определяющие

уравнения включены интенсивность напряжений  $\sigma_i$  и первый инвариант тен-

зора напряжений  $I_\sigma$ . Здесь  $\sigma_i = \sqrt{\frac{3}{2} S_{kl} S_{kl}}$ ,  $S_{kl} = \sigma_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} (\sigma_{mn} \delta_{mn})$ ,

$I_\sigma = \sigma_{kl} \delta_{kl}$ ,  $\delta_{kl}$  – символ Кронекера. Другой подход, в отличие от первого, приводит к тензорно-нелинейным физическим зависимостям, содержащим, помимо интенсивности напряжений, угол вида напряженного состояния  $\xi$ ,

$\sin 3\xi = -\frac{9 S_{kn} S_{nl} S_{kl}}{2 S_i^3}$ . Обсудим имеющиеся экспериментальные данные при

сложном напряженном состоянии, позволяющие, во-первых, провести сравнительное сопоставление этих подходов, а, во-вторых, оценить адекватность каждого из них экспериментальным данным.

При этом будем различать „мгновенное” нагружение, когда можно пренебречь влиянием времени на характер деформирования, и нагружение в условиях ползучести, когда становится заметным зависимость деформирования от фактора времени.

На рис. 1 приведены диаграммы деформирования целлулоида при температуре 338 К [3] в координатах „интенсивность напряжений  $s_i$  – интенсивность деформаций  $e_i$ ”. Здесь  $e_i = \sqrt{\frac{2}{3} e_{kl} e_{kl}}$ ;  $e_{kl} = e_{kl} - \frac{1}{3} d_{kl} (e_{mn} d_{mn})$ ;  $e_{kl}$  –

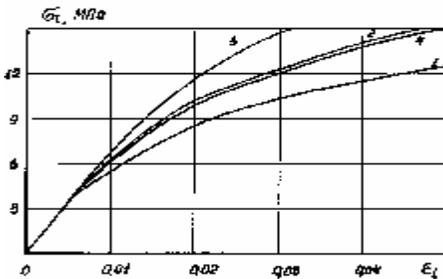


Рис. 1. Целлулоид при температуре 338 К

тензор деформаций. Данный материал обладает неодинаковыми деформационными характеристиками при одноосном растяжении (кривая 1) и сжатии (кривая 3). Кривая 4 относится к одноосному растяжению ( $\sigma_{11} = \sigma$ ) с наложением гидростатического давления величинной  $P = \sigma/3$ . В последнем случае имеем следующие значения инвариантов:  $I_\sigma = 0$ ,  $\sigma_i = \sigma$ ,

$\sin 3\xi = -1$ . Для сравнения отметим, что при одноосном растяжении ( $\sigma_{11} = \sigma$ ) в условиях атмосферного давления можно принять  $I_\sigma = \sigma_i = \sigma$ ,  $\sin 3\xi = -1$ . Поэтому заметное различие кривых 1 и 4 между собой может быть отражено только за счет влияния инварианта  $I_\sigma$ , так как значения двух других инвариантов в этих опытах одинаковы. Кривая 2 соответствует чистому кручению ( $\sigma_{12} = \sigma\sqrt{3}$ ). Для этого эксперимента  $I_\sigma = 0$ ,  $\sigma_i = \sigma$ ,

$\sin 3\xi = 0$ . На рис. 1 заметно, что кривые 2 и 4 с учетом некоторого разброса экспериментальных данных, практически совпадают. Поскольку в рассматриваемых опытах значения инвариантов  $I_\sigma$  и  $\sigma_i$  одинаковы, а различаются лишь значения  $\xi$ , можно сделать вывод о том, что угол вида напряженного состояния не влияет на нелинейное деформирование целлулоида. Таким образом, рассмотренные экспериментальные данные обосновывают построение определяющих уравнений в рамках первого подхода.

Теперь обратимся к серому чугуны СЧ-18-36, диаграммы деформирования [4] которого приведены на рис. 2. Кривая 2 соответствует одноосному сжатию ( $I_\sigma/\sigma_i = -1, \sin 3\xi = 1$ ), а кривая 1 – кручению с наложением гидростатического давления ( $I_\sigma/\sigma_i = -1, \sin 3\xi = 0$ ). Заметное различие этих кривых свидетельствует о влиянии угла вида напряженного состояния, так как остальные инварианты тензора напряжений для одних и тех же значений  $\sigma_i$  в двух опытах одинаковые.

Такой же вывод можно сделать при анализе других кривых, представленных на рис. 2 и полученных при сжатии (кручении) в сочетании с гидростатическим давлением. Для кривых 5 и 4 обеспечивается  $I_\sigma/\sigma_i = -2$ , (5 –  $\sin 3\xi = 1$ , 4 –  $\sin 3\xi = 0$ ), а для 8 и 6 –  $I_\sigma/\sigma_i = -3$ , (8 –  $\sin 3\xi = 1$ , 6 –  $\sin 3\xi = 0$ ).

Итак, обсуждавшиеся выше результаты экспериментов свидетельствуют в пользу второго подхода, позволяющего использовать параметр  $\xi$  в физических зависимостях.

После анализа мгновенного деформирования материалов рассмотрим изотропную ползучесть. Известно, что гидростатическое давление заметно влияет на ползучесть некоторых металлов и полимеров. При одноосном растяжении ( $\sigma_{11} = \sigma$ ) в условиях атмосферного давления можно принять  $I_\sigma = \sigma_i = \sigma, \sin 3\xi = -1$ . В случае одноосного растяжения ( $\sigma_{11} = \sigma$ ) с наложением гидростатического давления величиной  $P$  имеем  $I_\sigma = \sigma - 3P, \sigma_i = \sigma, \sin 3\xi = -1$ . Следовательно, экспериментально наблюдаемое в этих опытах различие кривых ползучести может быть отражено только в рамках первого подхода. Уравнения ползучести, построенные на основе второго подхода и не содержащие инвариант  $I_\sigma$ , не описывают влияние гидростатического давления на ползучесть.

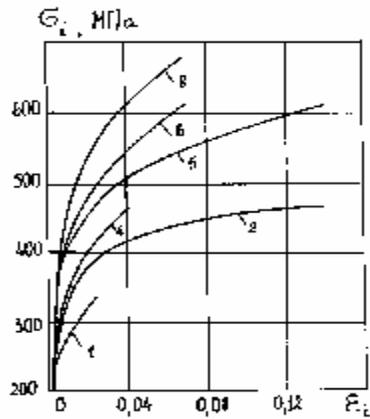


Рис. 2. Серый чугун СЧ 18-36

В. В. Рубанов [5], исследуя ползучесть сплава АК4-1Т при 473 К, рассмотрел следующую серию экспериментов: нагружение трубчатого образца с днищем внутренним давлением, чистое кручение, испытание трубки с днищем внешним давлением. В опытах обеспечивалось  $\sigma_i = \text{const}$ ,  $\xi \approx 0$  и варьировался инвариант  $I_\sigma$  от 263 МПа через нуль до – 335 МПа. Экспериментально установлено, что с точностью разброса данных на установившейся стадии ползучести удельная мощность рассеяния во всех указанных опытах является постоянной величиной. Этот факт говорит в пользу второго подхода, позволяющего для описания рассмотренных процессов ползучести пренебречь влиянием инварианта  $I_\sigma$ .

**2. Рекомендации по выбору инвариантов напряжений.** Выполненный выше анализ роли нечетных инвариантов тензора напряжений в описании нелинейного деформирования изотропных материалов не выявил заметных преимуществ каждого из подходов друг перед другом. В некоторых случаях обосновано использование первого подхода, в других – удовлетворительное отражение явления деформирования достигается в рамках второго подхода, причем выводы, полученные на основе первого подхода, противоречат экспериментальным результатам. Чтобы избавиться от сложившегося противоречия, очевидно, в общем случае надо использовать физические уравнения, включающие все три инварианта напряжений. Тогда в частных случаях, когда роль какого-то одного нечетного инварианта тензора напряжений окажется малой, описание деформирования изотропных материалов достигается за счет остальных инвариантов напряжений.

Дополнительно заметим, что в процессе деформирования изотропных материалов возникновение и слияние пор, микротрещин (субмикротрещин) и других нарушений сплошности структуры часто происходит на границах зерен, ориентированных перпендикулярно максимальному главному напряжению. Например, в случае одноосного растяжения образцов из поликристаллического материала в условиях ползучести дополнительно к скольжению на границах зерен, ориентированных под углом  $\pi/4$  к направлению растягивающего усилия, происходит возникновение и рост пор (рис. 3) и микротрещин (рис. 4) на границах зерен, ориентированных перпендикулярно направлению растягивающего усилия [6]. При одноосном сжатии образцов в условиях ползучести, например, из керамического материала поры возникают на границах зерен, ориентированных параллельно направлению усилия (рис. 5) [7].

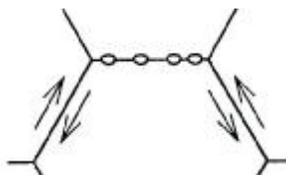


Рис. 3. Поры на границах зерен при одноосном растяжении. Растягивающее усилие приложено в вертикальном направлении (стрелки указывают направление скольжения)

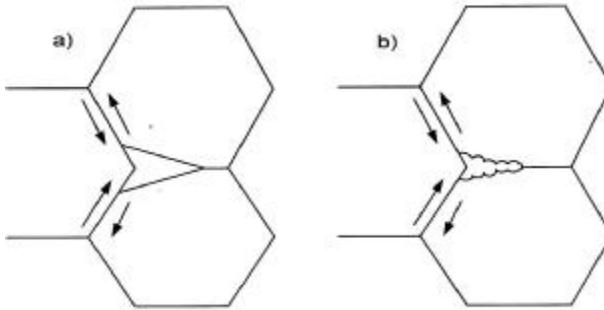


Рис. 4. Микротрещины на границах зерен при одноосном растяжении, возникающие изначально (а) или путем слияния пор (б) [6]. Растягивающее усилие приложено в вертикальном направлении (стрелки указывают направление скольжения)

Пусть, вектор  $\mathbf{n}$  определяет ориентацию границ зерен материала, где в процессе деформирования возникают поры, микротрещины и другие нарушения сплошности структуры. Тогда, для описания повреждаемости материала можно ввести смешанный инвариант  $L = s_{kl}n_k n_l$ . Если рассматриваемые границы зерен всегда ориентированы перпендикулярно максимальному главному напряжению, то смешанный инвариант  $L$  совпадает с максимальным главным напряжением  $s_1$ , т.е.  $L = s_1$ . Следовательно, для описания нелинейного деформирования изотропных материалов можно обоснованно рекомендовать следующие три инварианта тензора напряжений  $I_\sigma$ ,  $\sigma_i$  и  $s_1$ , а также уточненные определяющие уравнения в [8-12], основанные на этих трех инвариантах.

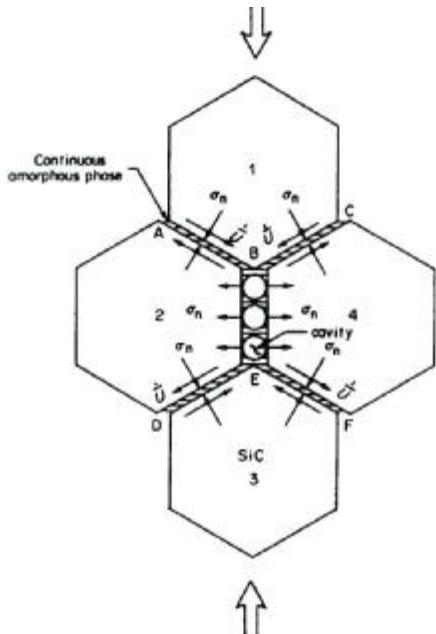


Рис. 5. Поры на границах зерен при одноосном сжатии [7]

**Список литературы:** 1. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1979. – 744 с. 2. Altenbach H., Altenbach J., Zolochovsky A. Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik. - Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995.-172 S. 3. Nishitani T. Mechanical behavior of nonlinear visco-elastic celluloid under superimposed

hydrostatic pressure. Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. – 1978. – 100, №3. – P P. 271–276. **4.** *Важенцев Ю.Г., Исаев В. В., Мартыненко А. Г.* О единой кривой течения материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1986. – 272 с. **5.** *Рубанов В. В.* Экспериментальное обоснование определяющих уравнений ползучести металлических материалов с различными свойствами на растяжение и сжатие: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1987. – 14 с. **6.** *Kassner M.E., Hayes T.A.* Creep cavitation in metals. Int. J. Plasticity -2003.- 19.- P P. 1715-1748. **7.** *Chan K.S., Lankford J., Page R.A.* Viscous cavity growth in ceramics under compressive loads. Acta Metall. -1984.- 32.- P P. 1907-1914. **8.** *Betten J., Sklepus A., Zolochovsky A.* A constitutive theory for creep behavior of initially isotropic materials sustaining unilateral damage. Mechanics Research Communications.- 2003.- 30.- PP.251-256. **9.** *Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A.* A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression. Eng. Fracture Mech. -1998.- 59.- PP.623–641. **10.** *Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A.* A microcrack description of creep damage in crystalline solids with different behaviour in tension and compression. Int. J. Damage Mech. -1999.- 8.- PP.197–232. **11.** *Zolochovsky A., Obataya Y.* Tension-compression asymmetry of creep and unilateral creep damage in aluminum for isothermal and nonisothermal processes. JSME Int. J. -2001.- 44A.- PP.100–108. **12.** *Zolochovsky A., Voyiadjis G.Z.* Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression. Int. J. Plast. -2005.- 21.- PP.435–462.

*Поступила в редколлегию 18.09.07*

УДК 539.3

**А. А. ЗОЛОЧЕВСКИЙ**, докт. техн. наук, НТУ „ХПИ”

### **О ВЫБОРЕ ТЕНЗОРОВ АНИЗОТРОПИИ ПРИ УТОЧНЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ**

Проанализована роль тензоров анизотропии в узагальнених визначальних співвідношеннях для нелінійного деформування анізотропних матеріалів. Розглянуті експериментальні дані для складного напруженого стану. Сформульовані практичні рекомендації.

A role of the tensors of the anisotropy in the generalized constitutive equations of the nonlinear deformation for the anisotropic materials has been analyzed. The experimental data at the complex stress state conditions have been considered. Practical recommendations have been formulated.

**Введение.** Как известно [1, 2], анизотропия механических свойств материалов обусловлена, прежде всего, особенностями их внутреннего строения. Материалы с закономерным внутренним (природным) или конструктивным строением, как правило, анизотропны. К первой группе сред относятся монокристаллы, дерево, некоторые поликристаллические металлы при наличии преимущественных кристаллографических ориентировок и др. Вторую группу составляют слоистые и волокнистые композиционные материалы, металлокерамика, железобетон и др.