

hydrostatic pressure. Trans. ASME. J. Pressure Vessel Technol. – 1978. – 100, №3. – P P. 271–276. **4.** *Важенцев Ю.Г., Исаев В. В., Мартыненко А. Г.* О единой кривой течения материалов, разносопротивляющихся растяжению и сжатию // Прочность материалов и элементов конструкций при сложном напряженном состоянии. – Киев: Наук. думка, 1986. – 272 с. **5.** *Рубанов В. В.* Экспериментальное обоснование определяющих уравнений ползучести металлических материалов с различными свойствами на растяжение и сжатие: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. – Новосибирск, 1987. – 14 с. **6.** *Kassner M.E., Hayes T.A.* Creep cavitation in metals. Int. J. Plasticity -2003.- 19.- P P. 1715-1748. **7.** *Chan K.S., Lankford J., Page R.A.* Viscous cavity growth in ceramics under compressive loads. Acta Metall. -1984.- 32.- P P. 1907-1914. **8.** *Betten J., Sklepus A., Zolochovsky A.* A constitutive theory for creep behavior of initially isotropic materials sustaining unilateral damage. Mechanics Research Communications.- 2003.- 30.- PP.251-256. **9.** *Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A.* A creep damage model for initially isotropic materials with different properties in tension and compression. Eng. Fracture Mech. -1998.- 59.- PP.623–641. **10.** *Betten J., Sklepus S., Zolochovsky A.* A microcrack description of creep damage in crystalline solids with different behaviour in tension and compression. Int. J. Damage Mech. -1999.- 8.- PP.197–232. **11.** *Zolochovsky A., Obataya Y.* Tension-compression asymmetry of creep and unilateral creep damage in aluminum for isothermal and nonisothermal processes. JSME Int. J. -2001.- 44A.- PP.100–108. **12.** *Zolochovsky A., Voyiadjis G.Z.* Theory of creep deformation with kinematic hardening for materials with different properties in tension and compression. Int. J. Plast. -2005.- 21.- PP.435–462.

Поступила в редколлегию 18.09.07

УДК 539.3

А. А. ЗОЛОЧЕВСКИЙ, докт. техн. наук, НТУ „ХПИ”

О ВЫБОРЕ ТЕНЗОРОВ АНИЗОТРОПИИ ПРИ УТОЧНЕНИИ ОПРЕДЕЛЯЮЩИХ УРАВНЕНИЙ МЕХАНИКИ ДЕФОРМИРУЕМОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ

Проанализована роль тензоров анизотропии в узагальнених визначальних співвідношеннях для нелінійного деформування анізотропних матеріалів. Розглянуті експериментальні дані для складного напруженого стану. Сформульовані практичні рекомендації.

A role of the tensors of the anisotropy in the generalized constitutive equations of the nonlinear deformation for the anisotropic materials has been analyzed. The experimental data at the complex stress state conditions have been considered. Practical recommendations have been formulated.

Введение. Как известно [1, 2], анизотропия механических свойств материалов обусловлена, прежде всего, особенностями их внутреннего строения. Материалы с закономерным внутренним (природным) или конструктивным строением, как правило, анизотропны. К первой группе сред относятся монокристаллы, дерево, некоторые поликристаллические металлы при наличии преимущественных кристаллографических ориентировок и др. Вторую группу составляют слоистые и волокнистые композиционные материалы, металлокерамика, железобетон и др.

Если в упругом состоянии материал оказывается изотропным, то это еще не означает изотропию его свойств при неупругом деформировании. Другими словами, отсутствие анизотропии какой-либо одной из деформационных характеристик не является гарантией изотропности других свойств. Поэтому закономерности деформирования анизотропных материалов требуется изучать в их различных физических состояниях (упругость, пластичность, ползучесть).

Проблеме уточнения определяющих уравнений для анизотропных сред в настоящее время уделяется первостепенное значение. В рамках феноменологического подхода для исследования зависимости деформационных характеристик анизотропного тела от вида нагружения необходимо изучить в базовых экспериментах деформирование некоторых стандартных образцов. При этом здесь возникает ситуация, более сложная по сравнению с изотропными средами. Для пояснения отметим, что при формулировке физического закона, отражающего деформирование анизотропного тела, требуется, кроме полученной в опытах информации о связи между кинематическим и силовым факторами, учесть ориентацию используемых образцов в некоторой системе координат, связанной с рассматриваемым телом. Следовательно, очень важным обстоятельством в случае анизотропных материалов является необходимость такого выбора образцов для испытаний, который позволяет изучить механические свойства исследуемого тела в различных его направлениях. При этом базовые эксперименты могут быть такими же, как и для изотропных материалов.

Заметим, что для монокристаллов в связи с их кристаллографической структурой имеет место неодинаковость характеристик пластичности при растяжении и сжатии. Так для монокристаллов титана и его α -сплавов [2] рассматриваемый эффект связан с изменением механизмов пластической деформации в зависимости от ориентировки оси образца. Например, при растяжении вдоль кристаллографической оси $\langle 0001 \rangle$ основным механизмом деформации является двойникование в системе $\{10\bar{1}2\} \langle \bar{1}011 \rangle$, а при растяжении вдоль осей $\langle 10\bar{1}0 \rangle$ и $\langle 11\bar{2}0 \rangle$ – призматическое скольжение. При комнатной температуре предел текучести на растяжение в два раза выше при двойниковании, чем при скольжении. В случае сжатия вдоль тех же осей проявляется уже различие в 3.5 раза для аналогичных показателей. Различное сопротивление сжатию и растяжению наблюдается также у монокристаллов молибдена с ориентировками $\langle 100 \rangle$ и $\langle 111 \rangle$.

Для холоднокатаных и отоженных алюминиевых и стальных листов установлено [2], что повышение степени обжатия при холодной прокатке от 10 до 80% вызывает рост степени анизотропии материалов. При этом в случае сжатия анизотропия более существенна, чем при растяжении, поскольку, например, предел текучести в направлении прокатки на растяжение заметно выше, чем на сжатие. Пределы текучести алюминия и стали для каждого вида нагружения достигают наибольших значений в поперечном направлении листов, наименьших – в продольном. Низкотемпературный отжиг изменяет величину и характер анизотропии алюминиевых листов, а в случае стальных лис-

тов приводит лишь к изменению величины, но не характера анизотропии.

У металлов и сплавов с гексагональной решеткой (титановых, циркониевых, магниевых, цинковых и др.), как и у рассмотренных выше холоднодеформированных металлов, эффекты разнсопротивляемости растяжению-сжатию и анизотропии связаны прежде всего с ролью преимущественных кристаллографических ориентировок. Например, в работе [2] представлены зависимости пластической деформации от напряжения при растяжении и сжатии образцов, ориентированных в трех главных направлениях в плите из сплава Циркалой-2, при трех уровнях температуры. Наблюдаемое поведение сплава может быть объяснено, исходя из свойств монокристалла при деформировании скольжением по системе $\{10\bar{1}0\} <\bar{1}2\bar{1}0>$ в условиях растяжения и двойникованием по $\{10\bar{1}2\}$ и $\{11\bar{2}2\}$ при сжатии. В итоге оказывается, что анизотропия более заметна для сжатия, чем для растяжения, причем значения пределов текучести на образцах, ориентированных по нормали к плите, превышают аналогичные показатели в плоскости плиты.

Пределы текучести многих магниевых сплавов при сжатии приблизительно в два раза ниже, чем при растяжении, для образцов одинаковой ориентации [2]. По-разному протекает также упрочнение материалов в условиях пластического деформирования в зависимости от вида нагружения. Отмеченные обстоятельства объясняются кристаллографической текстурой магниевых сплавов, определяющей в испытаниях на сжатие деформирование преимущественно двойникованием, сопротивление которому примерно в два раза ниже, чем скольжению. Если же в каком-то направлении для анизотропного тела окажется, что скольжению предшествовало двойникование, то сопротивление деформированию уменьшается, и пределы текучести на растяжение и сжатие оказываются одинаковыми. Например, для одного из магниевых сплавов [2] предел текучести в продольном направлении поковки составляет $\sigma_{0,2} = 177$ МПа (при растяжении) и $\sigma_{0,2}^c = 118$ МПа (при сжатии), в поперечном – $\sigma_{0,2} = 118$ МПа и $\sigma_{0,2}^c = 177$ МПа, $\sigma_{0,2} = \sigma_{0,2}^c = 79$ МПа – в диагональном.

Анализ диаграмм деформирования некоторых графитов [3] свидетельствует об их существенной анизотропии и разнсопротивляемости растяжению-сжатию. При этом диаграммы на сжатие располагаются выше диаграмм на растяжение. Последнее обстоятельство может быть объяснено следующим образом. Рассматриваемые графиты представляют собой пористые крупнозернистые материалы, причем поры и микротрещины распределены по объему материалов без определенной закономерности. Тогда при растяжении поры могут раскрываться, а в условиях сжатия – закрываться. В итоге графиты проявляют большую податливость при растяжении, чем при сжатии, причем такая картина характерна для всех главных направлений анизотропии.

Интересные закономерности деформирования наблюдаются у однонаправленно армированных материалов с хрупкой основой. Типичным предста-

вителем этих материалов является железобетон. При растяжении и сжатии последнего вдоль армирующих стальных волокон вся нагрузка воспринимается сталью, и деформирование железобетона, как правило, не зависит от вида нагружения [4]. Совершенно иная картина имеет место при растяжении и сжатии поперек армирующих волокон. В этом случае деформирование определяется самой основой, т.е. бетоном, который хорошо сопротивляется сжатию и плохо – растяжению. В результате диаграмма железобетона для сжатия располагается заметно выше аналогичной диаграммы для растяжения [4]. Подчеркнем, что прочность железобетона в продольном направлении заметно выше, чем в поперечном.

Для карбидокремниевых огнеупоров со связками из нитрида кремния, оксинитрида кремния и β -карбида кремния также характерны [5] существенная анизотропия и разносопротивляемость растяжению-сжатию при комнатной и повышенной (до 1673 К) температурах. Рассматривались образцы, ориентированные по двум осям симметрии изделия, служащего моделью футеровки шахт доменных печей. Установлено, что огнеупоры хорошо сопротивляются сжатию и плохо – растяжению. Предел текучести в продольном направлении при сжатии приблизительно в десять раз выше, чем при растяжении.

У волокнистых и слоистых материалов разносопротивляемость растяжению-сжатию определяется свойствами армирующей фазы и связующего, а также характером дефектов структуры (пор, микротрещин, несплошностей и т.п.) [6]. Например, трос или канат, состоящий из множества нитей, хорошо работает на растяжение и практически не работает на сжатие из-за потери устойчивости даже при малой его длине. При растяжении волокнистых или слоистых материалов волокна (слои) натягиваются, прижимаясь друг к другу, поэтому разного рода дефекты структуры закрываются и их влияние проявляется слабее. В условиях сжатия волокна или слои выпучиваются в пространство дефектов, вызывая раскрытие последних, в результате чего элементы структуры теряют устойчивость, и наступает преждевременное разрушение материала. Таким образом, слоистые или волокнистые материалы оказываются заметно прочнее при растяжении в определенных направлениях, чем при сжатии, а поэтому диаграммы их деформирования в продольном направлении в условиях растяжения располагаются заметно выше, чем в условиях сжатия. Прочность волокнистых и слоистых материалов при растяжении обычно выше в продольном направлении, а при сжатии – в поперечном. Поэтому диаграммы при сжатии в направлении, перпендикулярном слоям или волокнам, обычно находятся выше по сравнению с аналогичными диаграммами в условиях растяжения. Рассмотренный характер деформирования установлен для стеклопластиков, органопластиков, базальтопластиков, углепластиков на тканевой основе или с двухосным или трехосным плетением волокон, композитов волокна „Кевлар-эпоксидная смола”.

Картина ползучести материалов еще более усложняется, если на их разносопротивляемость растяжению-сжатию накладывается начальная анизотро-

пия [1]. Причем, в упругом и пластическом состояниях образцы, вырезанные из прокатанного материала или из поковки, выполненных из сплавов на основе титана, магния, алюминия, циркония, обнаруживают изотропные характеристики и одинаковые свойства при растяжении и сжатии. Однако поведение легких сплавов существенно меняется в отношении процесса ползучести: материалы – начально анизотропны и проявляют разные свойства на растяжение и сжатие. Так, например, удлинения при комнатной температуре образцов из титанового сплава, вырезанных из листа в продольном и поперечном направлениях, в случае одного и того же напряжения и времени могут различаться в восемь раз [7]. Причем значения деформаций ползучести, определенных для образцов продольного направления, при растяжении в 20 раз превышают соответствующие показатели при сжатии [7].

2. Обобщенные определяющие уравнения. Разработке уточненных определяющих уравнений нелинейного деформирования анизотропных материалов в литературе уделено значительно меньшее внимание по сравнению с изотропными материалами [8]. Это обусловлено в первую очередь сложностью поставленной проблемы. Во многих подходах выполнен механический перенос теоретических положений, предложенных для изотропных материалов. Очевидно, что для анизотропных сред должны быть разработаны свои определяющие уравнения, учитывающие их специфические особенности.

В работе [9] предложена следующая связь между кинематическим тензором e_{ij} и тензором напряжений σ_{kl} для анизотропных сред, деформационные характеристики которых зависят от вида нагружения

$$e_{ij} = e_0 \left(\frac{a_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_2} + \alpha b_{ij} + \gamma \frac{c_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn}}{\sigma_3^2} \right), \quad (1)$$

и следующее выражение для эквивалентного напряжения

$$\sigma_e = \alpha \sigma_1 + \sigma_2 + \gamma \sigma_3. \quad (2)$$

Здесь

$$\sigma_1 = b_{ij} \sigma_{ij}; \quad \sigma_2^2 = a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}; \quad \sigma_3^3 = c_{ijklmn} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \sigma_{mn}, \quad (3)$$

(b_{ij} , a_{ijkl} , c_{ijklmn} – тензоры анизотропии; α , γ – некоторые числовые коэффициенты, учитывающие удельный вес нечетных инвариантов в выражении (2)). Скалярная функция e_0 в (1) зависит от эквивалентного напряжения (2) и, возможно, некоторых структурных параметров. Она конкретизируется для каждого физического состояния среды (упругость, пластичность, ползучесть).

Рассмотрим некоторые частные физические соотношения для анизотропных сред, вытекающие из зависимостей (1). Например, если в выражении для σ_e в (2) положить $\gamma = 0$, то вместо (1) имеем следующие тензорно-

линейные уравнения

$$e_{ij} = e_0 \left(\frac{a_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_2} + \alpha b_{ij} \right) \quad (4)$$

с использованием тензоров анизотропии второго и четвертого рангов.

В случае, если принять $\alpha = 0$, получаем такие тензорно-нелинейные зависимости

$$e_{ij} = e_0 \left(\frac{a_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_2} + \gamma \frac{C_{ijklmn} \sigma_{kl} \sigma_{mn}}{\sigma_3^2} \right) \quad (5)$$

с использованием тензоров анизотропии четвертого и шестого рангов.

Положив в (2) $\alpha = \gamma = 0$, приходим вместо (1) к традиционным определяющим уравнениям

$$e_{ij} = e_0 \frac{a_{ijkl} \sigma_{kl}}{\sigma_2}, \quad (6)$$

использующим лишь квадратичный смешанный инвариант σ_2^2 и тензор анизотропии четвертого ранга.

3. Анализ роли тензоров анизотропии. Выполним сравнение теоретических результатов, полученных на основе приведенных выше физических уравнений, с экспериментальными данными при сложном напряженном состоянии для различных анизотропных материалов с деформационными характеристиками, зависящими от вида нагружения.

Вначале рассмотрим графит [3], проявляющий ортотропию и разносопротивляемость растяжению-сжатию. Результаты базовых испытаний на растяжение и сжатие в главных направлениях анизотропии 1 и 2 свидетельствуют о том, что деформации складываются из упругих ε_{ij} и пластических P_{ij} составляющих, которые в общем случае определяются тензорно-нелинейной связью (1). В табл. 1, 2 представлены экспериментальные значения деформаций в тонкостенных трубках из рассматриваемого графита, нагруженных сжимающим усилием и внутренним давлением. Здесь же приведены теоретические результаты, полученные на основе тензорно-линейных уравнений (4) и тензорно-нелинейных зависимостей (5). Видно вполне удовлетворительное совпадение теоретических и экспериментальных значений деформаций, не говорящее о существенных преимуществах тех или иных уравнений.

Далее рассмотрим экспериментальные данные, относящиеся к ползучести сплава Д16Т при температуре 523 К [10]. Эксперименты проводились на образцах, изготовленных из прутка. В базовых одноосных испытаниях на растяжение и сжатие в главных осях анизотропии 1 (ось прутка) и 2 (окружное направление прутка) установлено, что рассматриваемый материал проявляет

при ползучести ортотропию и разносопротивляемость растяжению-сжатию. Теперь обратимся к результатам экспериментальных исследований ползучести рассматриваемого алюминиевого сплава при двухосном напряженном состоянии. Тонкостенные трубки нагружались внутренним давлением с одновременным приложением осевой растягивающей или сжимающей нагрузки.

Таблица 1

Расчеты по тензорно-линейным уравнениям

Напряжения, МПа		Деформация 10^3							
$ \sigma_{11} $	σ_{22}	$ e_{11} $	e_{22}	$ \varepsilon_{11} $	ε_{22}	$ p_{11} $	p_{22}	$ e_{11} $	e_{22}
		эксперимент		уравнения (4)					
2,76	32,34	0,80	3,40	1,10	2,80	0	1,00	1,10	3,80
15,51	23,52	2,80	3,04	2,43	2,30	0,67	0,62	3,10	2,92
16,82	25,57	3,10	3,40	2,60	2,50	0,80	0,80	3,40	3,30
23,73	23,52	4,65	3,43	3,44	2,46	1,46	0,83	4,90	3,29
24,22	23,52	4,85	3,43	3,50	2,47	1,52	0,84	5,02	3,31

Таблица 2

Расчеты по тензорно-нелинейным уравнениям

Напряжения, МПа		Деформация 10^3							
$ \sigma_{11} $	σ_{22}	$ e_{11} $	e_{22}	$ \varepsilon_{11} $	ε_{22}	$ p_{11} $	p_{22}	$ e_{11} $	e_{22}
		эксперимент		уравнения (5)					
2,76	32,34	0,80	3,40	0,87	2,77	0,15	1,07	1,02	3,84
15,51	23,52	2,80	3,04	2,80	2,09	0,73	0,70	3,53	2,79
16,82	25,57	3,10	3,40	3,06	2,25	0,90	0,86	3,96	3,11
23,73	23,52	4,65	3,43	3,47	2,55	1,56	0,95	5,03	3,50
24,22	23,52	4,85	3,43	3,52	2,56	1,62	0,97	5,14	3,53

В табл. 3 помещены экспериментальные данные в виде скоростей осевых $\dot{\varepsilon}_{11}$ и окружных $\dot{\varepsilon}_{22}$ деформаций на установившейся стадии ползучести при соответствующих значениях напряжений σ_{11} и σ_{22} . Здесь же представлены теоретические значения скоростей деформаций ползучести, полученные на основе зависимостей (4) и (5), полагая $e_{ij} \equiv \dot{\varepsilon}_{ij}$. Учитывая заметный при ползучести разброс экспериментальных данных, согласование теоретических и экспериментальных результатов можно считать удовлетворительным. При этом не выявлено существенных преимуществ тензорно-линейных или тен-

зорно-нелинейных уравнений, и получена близость между собой соответствующих результатов расчетов.

Таблица 3

Алюминиевый сплав Д16Т

Напряжения, МПа		Скорости деформаций · 10 ³ , ч ⁻¹					
σ_{11}	σ_{22}	ν_{11}	ν_{22}	ν_{11}	ν_{22}	ν_{11}	ν_{22}
		эксперимент		(4)		(5)	
-109,8	54,9	-1,60	1,60	-0,93	0,91	-0,89	0,84
-80,6	80,6	-0,92	1,38	-0,82	1,05	-0,78	1,01
70	140	0	1,65	0,08	1,44	0	1,34
-37,6	112,8	-0,79	1,59	-0,76	1,49	-0,73	1,47
124	124	0,59	1,18	0,71	1,04	0,38	0,79

Таким образом, в качестве рекомендации отметим, что при описании нелинейного деформирования анизотропных материалов, характеристики которых зависят от вида нагружения, по крайней мере, при двухосном напряженном состоянии можно использовать тензорно-линейные уравнения (4), привлекающие только лишь тензоры анизотропии второго и четвертого рангов.

Список литературы: 1. *Rabotnov Yu.N.* Creep Problems in Structural Members. -Amsterdam: North-Holland, 1969. 2. *Микляев П. Г., Фридман Я. Б.* Анизотропия механических свойств металлов. -М.: Metallurgy, 1986. - 224 с. 3. *Jones R. M., Nelson D. A. R.* Further characteristics of a nonlinear material model for ATJ-S graphite. J. Composite Materials. - 1975. - 9, №7. - P P. 251-265. 4. *Овчинников И. Г., Полякова Л. Г.* Нелинейная разномодульная модель деформирования дисперсно-армированного бетона. - Тольятти, 1989. - 10 с. - Деп. в ВИНТИ 3. 02. 89, №1073-B89. 5. Деформационные характеристики карбид-кремниевых и шамотных огнеупоров / *Е. З. Король, В. М. Панферов, Н. В. Пятак, Р. М. Федорук, Т. П. Хмеленко* // Огнеупоры. - 1989. - №7. - С. 8-13. 6. *Жигун И. Г., Поляков В. А.* Свойства пространственно-армированных пластиков. - Рига: Зинатне, 1978. - 215 с. 7. *Соснин О. В.* О ползучести металлических материалов: Дис. ... докт. физ.-мат. наук. - Новосибирск, 1970. - 389 с. 8. *Altenbach H., Altenbach J., Zolochovsky A.* Erweiterte Deformationsmodelle und Versagenskriterien der Werkstoffmechanik.- Stuttgart: Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1995.-172 S. 9. *Zolochovsky A.* The formulation of constitutive equations for anisotropic materials with different behaviour in tension and compression. IUTAM symposium on anisotropy, inhomogeneity and nonlinearity in solid mechanics/ Parker D. F., England H. -Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.- 1995.-PP. 351-356. 10. *Никитенко А.Ф., Цвелодуб И. Ю.* О ползучести анизотропных материалов с разными свойствами на растяжение и сжатие // Динамика сплошной среды. - 1979. - Вып. 43. - С. 69-78.

Поступила в редколлегию 18.09.07