

Вісс. Гр. КЛИМЕНКО, канд. фіз.-мат. наук, НТУ “ХПІ”

ПРО ПОБУДОВУ ПЕРЕГОРОДОК ДЛЯ СИСТЕМ ОПУКЛИХ КОМПАКТІВ

При розробці проектів будівництва, із врахуванням можливих ризиків, а також систем автоматичного проектування інтегральних і печатних плат, де враховуються теплові, електричні і магнітні поля, нерідко постають задачі пов'язані із побудовою рівнянь перегородок, які оптимальним чином розмежують джерела цих полів, або ризиків. В даній роботі розробляються теоретичні основи побудови рівнянь перегородок для систем опуклих компактів. Проводиться дослідження структурних і топологічних властивостей цих перегородок. Аналізуються деякі можливості по оптимізації рівнянь перегородок. Також наводяться ілюстративні приклади з візуалізації перегородок засобами системи MathCAD.

At development of building projects, with the account of possible risks, and also CAD-systems for integral and circuit boards, where the thermal, electric and magnetic fields are taken into account, quite often tasks appear related to the construction of equations of partitions which differentiate the sources of these fields or risks by optimum method. In this work theoretical bases of construction of equations of partitions are developed for the systems of convex compacts. Research of structural and topologies properties of these partitions is conducted. Some possibilities are analysed for optimizations of equations of partitions. Illustrative examples are also presented on visualization of partitions by facilities of MATHCAD system.

Нехай в евклідовому просторі R^e задані дві неперетинні системи опуклих компактів $Q_1 = \{A_1, K, A_n\}$ і $Q_2 = \{B_1, K, B_m\}$, де $\left(\begin{matrix} \mathbf{U} A_i \\ i=1, n \end{matrix} \right) \mathbf{I} \left(\begin{matrix} \mathbf{U} B_j \\ j=1, m \end{matrix} \right) = \emptyset$. Для цих систем, в силу *нормальності* простору R^e , гарантовано існування перегородок [2], тобто таких замкнених множин $T \subset R^e$, для яких $R^e \setminus T$ є об'єднання неперетинних множин U і V , де $U \supset Q_1$ а $V \supset Q_2$. В зв'язку з тим, що побудову рівнянь перегородок для систем Q_1 і Q_2 будемо базувати на поняттях мінімальної і максимальної редукції функцій відстані [1], то попередньо встановимо, необхідні в подальшому розгляді, деякі твердження пов'язані із цими поняттями.

Теоретичне підґрунтя. Розглянемо множини функцій: 1) неперервних і не спадних на R , 2) неперервних і не зростаючих на R . Позначимо ці множини, відповідно, через F і G , ($F, G \subset C_R$). Очевидно, що ці множини утворюють, відносно операції додавання і множення, дистрибутивні групіди. Зрозуміло також, що при частковій упорядкованості на множині неперервних на R функцій ($f(d) \geq g(d)$), якщо при $\forall d \in R$ $f(d) \geq g(d)$) множини F і G утворюють, відносно бінарних операцій диз'юнкції і кон'юнкції, дистрибутивні підрешітки решітки неперервних функцій (C_R, \vee, \wedge) [1]. Отже, множини F і G , відносно вказаних бінарних операцій при відношенні часткового упорядкування, утворюють алгебраїчну підсистему алгебраїчної системи неперервних на R функцій. Неважко також переконатися (це для подальшого

дослідження і буде одним із ключових фактів), що підмножини $F \subset \mathbf{F}$ і $G \subset \mathbf{G}$, які складаються із додатно визначених на $\mathbf{R}_+ = \{d \in \mathbf{R} \mid d \geq 0\} = [0; +\infty[\cup \{+\infty\}$ функцій множин \mathbf{F} і \mathbf{G} (далі шаблони F і G), також утворюють такі ж алгебраїчні системи. Легко переконатися, що в силу відповідності $f(d) \in F \Leftrightarrow 1/f(d) \in G$ правильне

Твердження 1. Решітка (F, \vee, \wedge) із базовою множиною F є антиізоморфною решітці (G, \vee, \wedge) із базовою множиною G ; тобто, якщо

$f(d) \in F$ ($d \in \mathbf{R}_+$), то відображення $f(d) \xrightarrow{\gamma} 1/f(d) \in G$ є антиізоморфізмом решітки (F, \vee, \wedge) в решітку (G, \vee, \wedge) .

□ Дійсно, якщо $f(d), g(d) \in F$ ($d \in \mathbf{R}_+$), то $f(d) \xrightarrow{\gamma} \frac{1}{f(d)} \in G$ і $g(d) \xrightarrow{\gamma} \frac{1}{g(d)} \in G$, а $f(d) \vee g(d) \xrightarrow{\gamma} \frac{1}{f(d) \vee g(d)} \equiv 1/f(d) \wedge 1/g(d) \in G$ і $f(d) \wedge g(d) \xrightarrow{\gamma} \frac{1}{f(d) \wedge g(d)} \equiv 1/f(d) \vee 1/g(d) \in G$. □

Нехай A є довільний опуклий компакт простору \mathbf{R}^e .

Позначимо через $d(x, y)$ евклідову відстань між точками $x, y \in \mathbf{R}^e$, а через $m(x, A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in A} d(x, y): \mathbf{R}^e \rightarrow \mathbf{R}_+$ позначаємо функцію мінімальної відстані до компакта A (нормальна функція компакта A , див. [3]). Очевидне існування для $\forall x \in \mathbf{R}^e$ єдиної точки $\pi(x) \in A$ (проекції x на A), для якої $m(x, A) = d(x, \pi(x))$. Зрозуміло, що $m(x, A)_{x \in A} \equiv 0$. Поставимо у відповідність кожній функції (шаблону) $f(d) \in F$ функцію

$m(x, f, A) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{y \in A} f(d(x, y)): \mathbf{R}^e \rightarrow \mathbf{R}_+$, яку будемо називати мінімальною редукцією суперпозиції $f(d(x, y))$ на опуклому компактi A . Зрозуміло, що $m(x, f, A) = f(m(x, A)): \mathbf{R}^e \rightarrow \mathbf{R}_+$. Таким чином, із компактом A і множиною F буде пов'язана множина, позначаємо її через F_A , мінімальних редукцій суперпозицій функцій множини F і евклідової відстані.

Поставимо тепер у відповідність кожній функції (шаблону) $g(d) \in G$ функцію $M(x, g, A) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{y \in A} g(d(x, y)): \mathbf{R}^e \rightarrow \mathbf{R}_+$, яку будемо називати максимальною редукцією суперпозиції $g(d(x, y))$ на опуклому компактi A . Певна річ, що $M(x, g, A) = g\left(\min_{y \in A} d(x, y)\right) = g(m(x, A))$. Таким чином, із компактом A і мно-

жиною G пов'язуємо множину максимальних редукцій, позначаємо її через G_A ; тобто для $\forall g(d) \in G \rightarrow M(x, g, A) \in G_A$. Нехай $f(d), g(d) \in F$ і A, B довільні опуклі компактні простору R^e .

Твердження 2. *Правильні наступні рівності:*

$$\begin{aligned} m(x, f \vee g, A) &= m(x, f, A) \vee m(x, g, A), \\ m(x, f \wedge g, A) &= m(x, f, A) \wedge m(x, g, A). \end{aligned}$$

□ Дійсно, для $\forall x \in R^e \exists! y^* \text{ і } z^* \in A$, і такі, що

$$\begin{aligned} m(x, f \vee g, A) &= f(d(x, y^*)) \vee g(d(x, y^*)), \\ m(x, f \wedge g, A) &= f(d(x, z^*)) \wedge g(d(x, z^*)). \end{aligned}$$

Зрозуміло, що $y^* = z^* = \pi(x)$. В протилежному разі – $f(d(x, x^*)) > f(d(x, \pi(x)))$ і $g(d(x, x^*)) > g(d(x, \pi(x)))$, де x^* одне із двох: це або y^* , або z^* . Отже,

$$\begin{aligned} f(d(x, y^*)) \vee g(d(x, y^*)) &> f(d(x, \pi(x))) \vee g(d(x, \pi(x))), \\ f(d(x, z^*)) \wedge g(d(x, z^*)) &> f(d(x, \pi(x))) \wedge g(d(x, \pi(x))), \end{aligned}$$

але обидві ці нерівності суперечливі, що і доводить твердження. □

Із встановленого випливає таке:

Твердження 3. *Множина $F_A \subset C_R$ з двома бінарними операціями (\vee) і (\wedge) є решітка (структура), яка ізоморфна решітці (F, \vee, \wedge) і є підрешіткою решітки (C_R, \vee, \wedge) , неперервних на R^e функцій.*

Твердження 4. *Правильна рівність $m(x, f, A \cup B) = m(x, f, A) \wedge m(x, f, B)$.*

□ В силу антиізоморфізму ψ (теорема 1.1 із [1]), отримуємо:

$$\begin{aligned} m(x, f, A \cup B) &\xrightarrow{\psi} S(m(x, f, A \cup B), \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^e \mid m(x, f, A \cup B) \leq \lambda\} = \\ &= \{x \in R^e \mid f(m(x, A \cup B)) \leq \lambda\} = \{x \in R^e \mid m(x, A \cup B) \leq f^{-1}(\lambda)\} = \\ &= \{x \in R^e \mid m(x, A) \wedge m(x, B) \leq f^{-1}(\lambda)\} = \\ &= \{x \in R^e \mid m(x, A) \leq f^{-1}(\lambda)\} \cup \{x \in R^e \mid m(x, B) \leq f^{-1}(\lambda)\} = \\ &= \{x \in R^e \mid f(m(x, A)) \leq \lambda\} \cup \{x \in R^e \mid f(m(x, B)) \leq \lambda\} = \\ &= S(m(x, f, A), \lambda) \cup S(m(x, f, B), \lambda) \xrightarrow{\psi^{-1}} m(x, f, A) \wedge m(x, f, B) \end{aligned}$$

□ Як наслідок попередніх тверджень, отримуємо

Твердження 5. *Правильні рівності:*

$$\begin{aligned} m(x, f \wedge g, A \cup B) &= m(x, f, A) \wedge m(x, g, A) \wedge m(x, f, B) \wedge m(x, g, B), \\ m(x, f \vee g, A \cup B) &= [m(x, f, A) \vee m(x, g, A)] \wedge [m(x, f, B) \vee m(x, g, B)]. \end{aligned}$$

Нехай тепер $h(d), g(d) \in G$ і A є будь-який опуклий компакт R^e . Переконаємося, що і множина $G_A \subset C_R$ з двома бінарними операціями (\vee) і (\wedge) є решітка.

Твердження 6. *Правильні рівності:*

$$M(x, h \vee q, A) = M(x, h, A) \vee M(x, q, A),$$

$$M(x, h \wedge q, A) = M(x, h, A) \wedge M(x, q, A).$$

□ Дійсно: $h(d) \vee q(d), h(d) \wedge q(d) \in G$, а отже,

$$M(x, h \vee q, A) = h(m(x, A)) \vee q(m(x, A)) = M(x, h, A) \vee M(x, q, A) \quad \square$$

$$M(x, h \wedge q, A) = h(m(x, A)) \wedge q(m(x, A)) = M(x, h, A) \wedge M(x, q, A).$$

Таким чином, встановлено наступне

Твердження 7. Множина $G_A \subset C_R$ з двома бінарними операціями (\vee) і (\wedge) є **решітка (структура)**, яка ізоморфна решітці (G, \vee, \wedge) і є підрешіткою решітки (C_R, \vee, \wedge) , неперервних на R^e функцій.

Зауважимо, що решітка (G_A, \vee, \wedge) , в силу тверджень 1,3,7 – антиізоморфна решітці (F_A, \vee, \wedge) . Переконаємося, що твердження 4,5 також мають аналогії для функцій решітки (G_A, \vee, \wedge) . Нехай A, B є довільні опуклі компакти R^e і $h(d), g(d) \in G$.

Твердження 8. *Правильна рівність*

$$M(x, h, A \cup B) = M(x, h, A) \vee M(x, h, B).$$

□ В силу гомоморфізму φ (теорема 1.1 із [1]), отримуємо:

$$\begin{aligned} M(x, h, A \cup B) &\xrightarrow{\varphi} L(M(x, h, A \cup B), \lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in R^e \mid M(x, h, A \cup B) \geq \lambda\} = \\ &\{x \in R^e \mid h(m(x, A \cup B)) \geq \lambda\} = \{x \in R^e \mid m(x, A \cup B) \leq h^{-1}(\lambda)\} = \\ &\{x \in R^e \mid m(x, A) \wedge m(x, B) \leq h^{-1}(\lambda)\} = \\ &\{x \in R^e \mid m(x, A) \leq h^{-1}(\lambda)\} \cup \{x \in R^e \mid m(x, B) \leq h^{-1}(\lambda)\} = \\ &\{x \in R^e \mid h(m(x, A)) \geq \lambda\} \cup \{x \in R^e \mid h(m(x, B)) \geq \lambda\} = \\ &= L(M(x, h, A), \lambda) \cup L(M(x, h, B), \lambda) \xrightarrow{\varphi^{-1}} M(x, h, A) \vee M(x, h, B). \end{aligned}$$

Що і потрібно було встановити. □

Як наслідок із тверджень 6,8 випливає

Твердження 9. *Правильні рівності:*

$$M(x, h \wedge q, A \cup B) = [M(x, h, A) \wedge M(x, q, A)] \vee [M(x, h, B) \wedge M(x, q, B)],$$

$$M(x, h \vee q, A \cup B) = [M(x, h, A) \vee M(x, q, A)] \vee [M(x, h, B) \vee M(x, q, B)].$$

Рівняння перегородок. Виберемо тепер серед шаблонів множини F нормалізовані шаблони $f(d), g(d) \in F$ – тобто функції, які задовольняють умові $f(0) = g(0) = 0$ і зіставимо їх, відповідно, системам Q_1 і Q_2 . Має місце наступне твердження.

Теорема 10. *Множина $T \subset R^e$, яка визначається рівністю*

$$T: m \left(x, f, \bigcup_{i=1, \overline{n}} A_i \right) = m \left(x, g, \bigcup_{j=1, \overline{m}} B_j \right) \quad (1)$$

є перегорodka між системами Q_1 і Q_2 .

□ Згідно твердження 4 і властивості асоціативності для операції об'єднання, в бульовій алгебрі множин простору R^e , рівність (1) представимо у вигляді:

$$\bigwedge_{i=1}^{i=n} m(x, f, A_i) = \bigwedge_{j=1}^{j=m} m(x, g, B_j) \quad (2)$$

Далі, згідно з властивостями операцій решітки (C_R, \vee, \wedge) (див. §1 із [1]), із рівності (2) випливає рівність (3):

$$\begin{aligned} \bigwedge_{i=1}^{i=n} m(x, f, A_i) - \bigwedge_{j=1}^{j=m} m(x, g, B_j) = 0 &\Rightarrow \bigwedge_{i=1}^{i=n} m(x, f, A_i) + \bigvee_{j=1}^{j=m} (-m(x, g, B_j)) = 0 \Rightarrow \\ \bigwedge_{i=1}^{i=n} \bigvee_{j=1}^{j=m} [m(x, f, A_i) - m(x, g, B_j)] &= 0, \end{aligned} \quad (3)$$

або рівносильна їй рівність $\bigvee_{j=1}^{j=m} \bigwedge_{i=1}^{i=n} [m(x, f, A_i) - m(x, g, B_j)] = 0$. (4)

Функція $\Phi(x) \equiv \bigwedge_{i=1}^{i=n} \bigvee_{j=1}^{j=m} [m(x, f, A_i) - m(x, g, B_j)]: R^e \rightarrow R$ є неперервною, а отже,

множина $T = \{x \in R^e \mid \Phi(x) = 0\}$ є замкненою, а її доповнення $R^e \setminus T$ є об'єднанням неперетинних множин

$$\text{Int}L(\Phi(x), 0) = \{x \in R^e \mid \Phi(x) > 0\} \quad \text{і} \quad \text{Int}S(\Phi(x), 0) = \{x \in R^e \mid \Phi(x) < 0\},$$

причому $\text{Int}S(\Phi(x), 0) \supset \bigcup_{i=1, \overline{n}} A_i$, а $\text{Int}L(\Phi(x), 0) \supset \bigcup_{j=1, \overline{m}} B_j$

(Int – скорочення від “interior”). Дійсно, якщо $x \in A_i$, то $m(x, f, A_i) = 1$, а отже,

$$\bigvee_{j=1}^{j=m} [m(x, f, A_i) - m(x, g, B_j)] < 0 \quad \text{звідки і випливає, що і} \quad \Phi(x) < 0.$$

Якщо $x \in B_j$, то $m(x, g, B_j) = 1$, а отже, при

$$\forall i \quad \bigvee_{j=1}^{j=m} [m(x, f, A_i) - m(x, g, B_j)] > 0, \quad \text{а звідси випливає, що і} \quad \Phi(x) > 0.$$

В силу умови $\left(\bigcup_{i=1, \overline{n}} A_i \right) \cap \left(\bigcup_{j=1, \overline{m}} B_j \right) = \emptyset$ множини $\text{Int}S(\Phi(x), 0)$ і $\text{Int}L(\Phi(x), 0)$

не пусті, а в силу неперервності функції $\Phi(x)$ і множина $T \neq \emptyset$, а це і доводить правильність теореми. \square

Зауваження. *Перегородкою між компактами A_i і B_j буде множина*
 $T_{i,j} = \{x \in R^e \mid \Phi_{i,j}(x) \equiv m(x, f, A_i) - m(x, g, B_j) = 0\}; \quad A_i \subset \text{IntS}(\Phi_{i,j}(x), 0),$
 $B_j \subset \text{IntL}(\Phi_{i,j}(x), 0) \text{ і } R^e \setminus T_{i,j} = \text{IntS}(\Phi_{i,j}(x), 0) \cup \text{IntL}(\Phi_{i,j}(x), 0).$

Перегородкою між компактом A_i і системою Q_2 буде множина

$$T_i = \left\{ x \in R^e \mid \Phi_i(x) \equiv \bigvee_{j=1}^{j=m} \Phi_{i,j}(x) = 0 \right\}; \quad A_i \subset \text{IntS}(\Phi_i(x), 0), \quad B_j \subset \text{IntL}(\Phi_i(x), 0) \text{ і}$$

$$R^e \setminus T_i = \text{IntS}(\Phi_i(x), 0) \cup \text{IntL}(\Phi_i(x), 0).$$

Все це легко збагнути із доведення теореми 10.

Виберемо тепер і серед шаблонів множини G нормалізовані шаблони – тобто функції $h(d), q(d) \in G$, які задовольняють умові $h(0) = q(0) = \text{Const} > 0$ і зіставимо їх, відповідно, системам Q_1 і Q_2 . Правильне наступне твердження.

Теорема 11. *Множина $P \subset R^e$, яка визначається рівністю*

$$P: \quad M \left(x, h, \bigcup_{i=1, n} A_i \right) = M \left(x, q, \bigcup_{j=1, m} B_j \right) \quad (5)$$

є перегородка між системами Q_1 і Q_2 .

\square Легко бачимо, що згідно твердження 8, рівність (5) можна представити у вигляді

$$\bigvee_{i=1}^{i=n} M(x, h, A_i) = \bigvee_{j=1}^{j=m} M(x, q, B_j). \quad (6)$$

Далі, із (6) випливає $\bigvee_{i=1}^{i=n} M(x, h, A_i) - \bigvee_{j=1}^{j=m} M(x, q, B_j) = 0 \Rightarrow$

$$\bigvee_{i=1}^{i=n} M(x, h, A_i) + \bigwedge_{j=1}^{j=m} [-M(x, q, B_j)] = 0 \Rightarrow \bigvee_{i=1}^{i=n} \left[M(x, h, A_i) + \bigwedge_{j=1}^{j=m} [-M(x, q, B_j)] \right] = 0 \Rightarrow$$

$$\bigvee_{i=1}^{i=n} \bigwedge_{j=1}^{j=m} [M(x, h, A_i) - M(x, q, B_j)] = 0, \quad (7)$$

або рівносильна їй рівність

$$\bigwedge_{j=1}^{j=m} \bigvee_{i=1}^{i=n} [M(x, h, A_i) - M(x, q, B_j)] = 0. \quad (8)$$

Зрозуміло, що функція $\Psi(x) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=n} \bigwedge_{j=1}^{j=m} [M(x, h, A_i) - M(x, q, B_j)]: R^e \rightarrow R$

є неперервною, а отже, множина $P = \{x \in R^e \mid \Psi(x) = 0\}$ є замкненою.

Переконаємося, що $\text{Int } L(\Psi(x), 0) \supset \bigcup_{i=1, n} A_i$, а $\text{Int } S(\Psi(x), 0) \supset \bigcup_{j=1, m} B_j$.

Дійсно, для $\forall x \in A_i$ $M(x, h, A_i) = \text{Const} > M(x, q, B_j)$, тобто

$\bigwedge_{j=1}^{j=m} [M(x, h, A_i) - M(x, q, B_j)] > 0$, а отже, і $\Psi(x) > 0$ для $\forall x \in \bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$. Таким чином,

дійсно $\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i \subset \text{Int } L(\Psi(x), 0)$. Якщо при деякому $j^* \ x \in B_{j^*}$, то $M(x, q, B_{j^*}) = \text{Const}$, а отже, в силу неперетинності систем Q_1 і Q_2 ,

при $\forall i = \overline{1, n}$ $\bigwedge_{j=1}^{j=m} [M(x, h, A_i) - M(x, q, B_{j^*})] < 0$. З цієї нерівності випливає, що і

$\Psi(x) < 0$, тобто $\text{Int } S(\Psi(x), 0) \supset \bigcup_{j=1, m} B_j$. Очевидно, тепер що, множина

$P = \{x \in R^e \mid \Psi(x) = 0\} \neq \emptyset$, а отже, є перегородкою між системами Q_1 і Q_2 . \square

Зауваження 1. *Із доведення теореми 12 легко зрозуміти, що множина*

$P_{i,j} = \{x \in R^e \mid \Psi_{i,j}(x) \equiv M(x, h, A_i) - M(x, q, B_j) = 0\}$ *є перегородкою між компа-*

ктами A_i і B_j , а множина $P_i = \left\{x \in R^e \mid \Psi_i(x) \equiv \bigwedge_{j=1}^{j=m} \Psi_{i,j}(x) = 0\right\}$ є перегородо-

ю між A_i і компактами системи Q_2 , причому $A_i \subset \text{Int } L(\Psi_i(x), 0)$.

Зауваження 2. *Перегородки $T_{i,j}, P_{i,j}$ і T_i, P_i є зв'язні множини;*

зв'язність їх впливає із зв'язності множин $S(\Phi_{i,j}(x), 0)$, $L(\Psi_{i,j}(x), 0)$ і мно-

жин $S(\Phi_i(x), 0) = \prod_{j=1}^{j=m} S(\Phi_{i,j}(x), 0)$, $L(\Psi_i(x), 0) = \prod_{j=1}^{j=m} L(\Psi_{i,j}(x), 0)$, межами яких

вони є. Зрозуміло, що перегородки T і P можуть і не бути зв'язними.

Властивості перегородок. Перегородки T і P є підмножини евклідового простору R^e , а тому, окрім питань відносно їх зв'язності і замкненості, структурної будови, звичайно ж виникають і питання відносно їх розмірності та обмеженості. Відповіді на ці питання є важливими для практики візуалізації перегородок. Зауважимо, що обмеженість перегородок, пов'язана із їх зімкнутістю. Ряд наступних теорем, в деякій мірі, дає відповіді на ці питання.

Теорема 12. *Якщо функції $f(d), g(d): R_+ \rightarrow R_+$ (шаблони множини F)*

строго зростають, то $\dim T = e - 1$.

□ Зрозуміло, що $\dim T \geq e - 1$. Якщо припустити, що $\dim T = e$, то ми допускаємо існування внутрішніх точок множини T , тобто існування деякого околу $O(\delta, x_i) \subset T$ на якому $m(x, f, A_i) \equiv m(x, g, B_j) \equiv \text{const}$. Але в цьому разі ми припускаємо також належність околу $O(\delta, x_i) \subset T$ відрізка прямої, що з'єднує точку x_i із проекцією $\pi(x_i) \in A_i$, на якому $m(x, f, A_i) \equiv f(m(x, B_j)) \equiv f(d) \equiv \text{const}$, що суперечливо. □

Теорема 13. *Якщо функції $h(d), q(d): R_+ \rightarrow R_+$ (шаблони множини G) строго спадають, то $\dim P = e - 1$.*

□ Міркування по доведенню цього твердження аналогічні доведенню теореми 12, тільки в ньому перегородку T замінюємо перегородкою P . □

Теорема 14. *Нехай $f(d), g(d) \in F$ і $f(0) = g(0) = 0$. Якщо $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f(d)}{g(d)} = \beta$, то при $\beta \neq 1$ перегородка T є обмежена, причому при $\beta > 1$ множини $S(\Phi_{ij}(x), 0)$, $S(\Phi_i(x), 0)$ є зв'язні компакти. При $\beta < 1$ зв'язними компактами будуть множини $L(\Phi_{ij}(x), 0)$*

□ Якщо припустити, що в умовах теореми $T_{i,j}$ не обмежена, то, в силу компактності множин A_i і B_j , буде існувати послідовність точок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset T_{i,j}$ і таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, A_i) = \lim_{n \rightarrow \infty} m(x_n, B_j) = +\infty$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(x_n, A_i)}{m(x_n, B_j)} = 1$.

А отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(x_n, f, A_i)}{m(x_n, g, B_j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(m(x_n, A_i))}{g(m(x_n, B_j))} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f(d)}{g(d)} = \beta$, що при $\beta \neq 1$ суперечить рівності $m(x_n, f, A_i) = m(x_n, g, B_j)$. Зрозуміло, що із обмеженості $T_{i,j}$ випливає обмеженість, а отже, і компактність або $S(\Phi_{i,j}(x), 0)$, $S(\Phi_i(x), 0)$, або $L(\Phi_{i,j}(x), 0)$. Нехай $\beta > 1$, тоді при $d \rightarrow \infty$ $f(d) > g(d)$, а отже, нескінченно віддалені точки від A_i і B_j будуть належати множинам $L(f(m(x, A_i)) - g(m(x, B_j)), 0) \equiv L(\Phi_{i,j}(x), 0)$, тобто множини $S(\Phi_{i,j}(x), 0)$, $S(\Phi_i(x), 0)$ будуть обмеженими. Якщо ж $\beta < 1$, тоді при $d \rightarrow \infty$ $f(d) < g(d)$, нескінченно віддалені точки від A_i і B_j будуть належати множинам $S(\Phi_{i,j}(x), 0)$, $S(\Phi_i(x), 0)$, а отже, $L(\Phi_{i,j}(x), 0) = \overline{S(\Phi_{i,j}(x), 0)}$ буде обмежена. □

Теорема 15. *Нехай $h(d), q(d) \in G$ і $h(0) = q(0) = \text{Const} > 0$. Якщо $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{h(d)}{q(d)} = \beta$, то при $\beta \neq 1$ перегородка P є обмежена, причому при $\beta > 1$*

множини $S(\Psi_{ij}(x), 0)$ є зв'язні компакти. При $\beta < 1$ зв'язними компактами будуть множини $L(\Psi_{ij}(x), 0)$, $L(\Psi_i(x), 0)$.

□ Якщо припустити, що в умовах теореми $P_{i,j}$ не обмежена, то буде існувати послідовність точок $\{x_n \mid n \geq 1\} \subset P_{i,j}$ і таких, що $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m(x_n, A_i)}{m(x_n, B_j)} = \|\frac{\infty}{\infty}\| = 1$.

А отже, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M(x_n, h, A_i)}{M(x_n, q, B_j)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{h(m(x_n, A_i))}{q(m(x_n, B_j))} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{h(d)}{q(d)} = \beta$, що при $\beta \neq 1$ су-перечить рівності $M(x_n, h, A_i) = M(x_n, q, B_j)$. Зрозуміло, що із обмеженості $P_{i,j}$ випливає обмеженість, а отже, і компактність або $L(\Psi_{i,j}(x), 0)$ і $L(\Psi_i(x), 0)$, або $S(\Psi_{i,j}(x), 0)$. Нехай $\beta > 1$, тоді при $d \rightarrow \infty$ $h(d) > q(d)$, а отже, нескінченно віддалені точки від A_i і B_j будуть належати множинам $L(h(m(x, A_i)) - q(m(x, B_j)), 0) \equiv L(\Psi_{i,j}(x), 0)$ і

$L(\Psi_i(x), 0) = \prod_{j=1}^{j=m} L(\Psi_{i,j}(x), 0)$ тобто множини $S(\Psi_{i,j}(x), 0)$ будуть обмеженими.

Якщо ж $\beta < 1$, тоді при $d \rightarrow \infty$ $h(d) < q(d)$, нескінченно віддалені точки від A_i і B_j будуть належати множинам $S(\Psi_{i,j}(x), 0)$, а отже, $L(\Psi_{i,j}(x), 0)$ і

$L(\Psi_i(x), 0) = \prod_{j=1}^{j=m} L(\Psi_{i,j}(x), 0)$ будуть обмежені і зв'язні. □

Зауваження. Вимога компактності множин A_i і B_j є суттєвою для правильності теорем 14, 15. Дійсно, якщо припустити, що множина A_i є випуклою і замкнутою, але не обмеженою, то у випадку, коли $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f(d)}{g(d)} = \beta > 1$ або

$\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{h(d)}{q(d)} = \beta > 1$ (можливо, що $\beta = +\infty$), то множина $S(\Phi_{i,j}(x), 0)$ або

$S(\Psi_{i,j}(x), 0)$ не буде обмеженою, бо множина $S(\Phi_{i,j}(x), 0) \supset A_i$ або

$S(\Psi_{i,j}(x), 0) \supset A_i$. А отже, не будуть обмеженими і перегородки $T_{i,j}$ і $P_{i,j}$ –

межі, відповідно, множин $S(\Phi_{i,j}(x), 0)$ і $S(\Psi_{i,j}(x), 0)$. Якщо ж при необмеженості опуклої і замкнутої множини A_i множина B_j є опуклим компактом,

то висновки теорем 14, 15 при $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f(d)}{g(d)} < 1$ і $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{h(d)}{q(d)} < 1$ залишаються в силі. Вимоги ж обмеженості множин A_i і B_j для правильності теорем 10–13 не є суттєвими. Ілюстрацією сказаного може слугувати давно відомий факт.

Якщо A_i є пряма, B_j – точка на площині R^2 і прямій A_i зів'язаний шаблон

$f(d) \equiv \varepsilon d$, а точки B_j зіставлений шаблон $g(d) \equiv d$, то перегородкою T_{ij} для них будуть добре відомі нам криві лінії: еліпс (при $\varepsilon < 1$), парабола (при $\varepsilon = 1$) і гіпербола (при $\varepsilon > 1$), для яких пряма A_i буде директрисою, а точка B_j – фокусом.

Мінімізація рівнянь перегородок, можливості візуалізації. Далі на конкретних прикладах побудови перегородок розглянемо можливості мінімізації (спрощення) рівнянь перегородок та прийоми візуалізації перегородок в середовищі MathCAD. Зауважимо, що при виконанні деяких умов взаємного розміщення елементів систем Q_1 і Q_2 можливі випадки, коли при деякому $j^* \in \{1, \mathbf{K}, m\}$ матимемо $S(\Phi_i(x), 0) = S(\Phi_{i,j^*}(x), 0)$, а $L(\Psi_i(x), 0) = L(\Psi_{i,j^*}(x), 0)$.

В цих випадках маємо: $T_i = T_{i,j^*}$, а $P_i = P_{i,j^*}$. Очевидно, що при таких ситуаціях рівняння перегородок T і P значно спрощуються, а отже, при цьому оптимізується і процес комп'ютерної візуалізації цих множин.

Приклад 1. Нехай Q_1 і Q_2 системи точок $A_i(x_i, y_i)$ і $B_j(u_j, v_j)$ на площині R^2 . Системі Q_1 зіставимо нормалізований шаблон $f(d) \equiv d^2$, а системі Q_2 зіставимо нормалізований шаблон $g(d) \equiv \varepsilon^2 d^2$, де $\varepsilon \in]0, 1[$. Розглянемо побудову перегородки T для цих систем.

Зауважимо, що $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f(d)}{g(d)} = \lim_{d \rightarrow \infty} \frac{d^2}{\varepsilon^2 d^2} = \frac{1}{\varepsilon^2} > 1$, а отже, згідно із теоремою 11 і

14 перегородка T є обмеженою і замкнутою лінією.

Визначимо спочатку перегородку $T_{i,j}$ між точками $A_i(x_i, y_i)$ і $B_j(u_j, v_j)$;

$$T_{i,j} : (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 = \varepsilon^2 [(x - u_j)^2 + (y - v_j)^2].$$

Це рівняння перетворимо так:

$$\begin{aligned} x^2 - 2x_i x + x_i^2 - \varepsilon^2 x^2 + 2\varepsilon^2 u_j x - \varepsilon^2 u_j^2 + \\ y^2 - 2y_i y + y_i^2 - \varepsilon^2 y^2 + 2\varepsilon^2 v_j y - \varepsilon^2 v_j^2 = 0 \Rightarrow \end{aligned}$$

$$\left(x - \frac{x_i - \varepsilon^2 u_j}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 + \left(y - \frac{y_i - \varepsilon^2 v_j}{1 - \varepsilon^2} \right)^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1 - \varepsilon^2)^2} [(x_i - u_j)^2 + (y_i - v_j)^2].$$

Отже, перегородка $T_{i,j}$ між парою точок $(A_i, B_j) \in Q_1 \times Q_2$ є коло радіуса

$r_{ij} = \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon^2} \sqrt{(x_i - u_j)^2 + (y_i - v_j)^2}$ і центром в точці $C_{ij}(a_{ij}, b_{ij})$, де

$a_{ij} = \frac{x_i - \varepsilon^2 u_j}{1 - \varepsilon^2}$ і $b_{ij} = \frac{y_i - \varepsilon^2 v_j}{1 - \varepsilon^2}$. Згідно з теоремою 10, перегородкою T_i між точкою $A_i(x_i, y_i)$ і системою Q_2 буде межа перетину кругів

$$O_{ij} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x - a_{ij})^2 + (y - b_{ij})^2 - r_{ij}^2 \leq 0\},$$

тобто $T_i = \text{Fr} \prod_{j=1}^{j=m} O_{ij} : \bigvee_{j=1}^{j=m} [(x - a_{ij})^2 + (y - b_{ij})^2 - r_{ij}^2] = 0$ (Fr – скорочення від

“frontier”). Перегородкою між системами Q_1 і Q_2 буде множина

$$T = \text{Fr} \prod_{i=1}^{i=n} \prod_{j=1}^{j=m} O_{ij} : \bigwedge_{i=1}^{i=n} \left\{ \bigvee_{j=1}^{j=m} [(x - a_{ij})^2 + (y - b_{ij})^2 - r_{ij}^2] \right\} = 0.$$

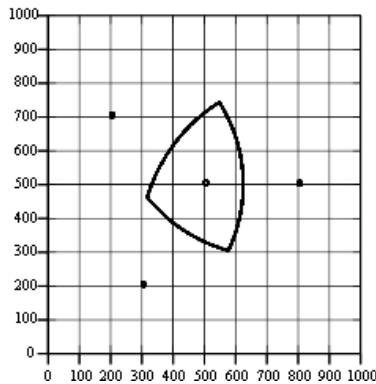
На Вставці 1 представлений програмний модуль для визначення в середовищі MathCAD перегородки між точкою $A_1(0,0)$ і точками $B_1(3,0)$, $B_2(-2,-3)$, $B_3(-3,2)$ при $\epsilon^2 = 0.5$ та її зображення в шаблоні команди Contour Plot.

$$i := 0..1000 \quad j := 0..1000$$

$$f(x,y) := \begin{cases} a \leftarrow x^2 + y^2 - \frac{1}{2} \cdot \min[(x-3)^2 + y^2, (x+2)^2 + (y+3)^2, (x+3)^2 + (y-2)^2] \\ f \leftarrow 1 \text{ if } |a| \leq 0.04 \\ 0 \text{ otherwise} \\ f \end{cases}$$

$$P_{i,j} := f(-5 + i \cdot 0.01, -5 + j \cdot 0.01)$$

$$S_{i,j} := T_{i,j} + P_{i,j}$$



S

Вставка 1

Зрозуміло, що при збільшенні кількості елементів (точок) в системах Q_1 і Q_2 програмний модуль визначення перегородки між ними стає більш громіздким, зростає кількість числових операцій необхідних для візуалізації перегородки, що веде до затримки видачі зображення. Певна річ, це не додає зручності при перебудові зображення перегородки. Однак, в деяких випадках,

спростивши рівняння перегородки, вдається мінімізувати вказані незручності Розглянемо ці можливості для нашого прикладу.

Нехай при деякому фіксованому $i = \alpha$ $(A_\alpha, B_\beta) \in \text{Arg min}\{d(A_\alpha, B_j) | j = \overline{1, m}\}$. Зрозуміло, що у випадку, коли круги $O_{\alpha j}$ при $\forall j = \overline{1, m}$ покривають круг $O_{\alpha\beta}$, то $T_\alpha = T_{\alpha\beta} = \text{Fr } O_{\alpha\beta}$, тобто рівняння перегородки T_α значно спрощується. Неважко зрозуміти, що круг $O_{\alpha\gamma}$ покриває круг $O_{\alpha\beta}$ ($O_{\alpha\beta} \subset O_{\alpha\gamma}$) для тих точок $B_\gamma(u, v) \in Q_2$, для яких виконується умова $d(C_{\alpha\beta}, C_{\alpha\gamma}) \leq (r_{\alpha\gamma} - r_{\alpha\beta})$, де $r_{\alpha\beta}$ – радіус перегородки $T_{\alpha\beta}$ між точками A_α і B_β ; $r_{\alpha\gamma}$ – радіус перегородки $T_{\alpha\gamma}$ між точками A_α і B_γ ; $C_{\alpha\beta}$ і $C_{\alpha\gamma}$ – центри кругів $O_{\alpha\beta}, O_{\alpha\gamma}$. Після відповідних підстановок і нескладних перетворень цю умову запишемо у вигляді

$$\sqrt{(u - x_\alpha)^2 + (v - y_\alpha)^2} - \varepsilon \sqrt{(u - u_\beta)^2 + (v - v_\beta)^2} - \sqrt{(x_\alpha - u_\beta)^2 + (y_\alpha - v_\beta)^2} \geq 0. \quad (9)$$

Припустимо, що точка $B_\beta(u_\beta, v_\beta)$ збігається із початком координат, а точка $A_\alpha(x_\alpha, y_\alpha)$ лежить на додатній півосі абсцис. Зауважимо, що таке припущення не обмежує загальності наших міркувань, бо цієї ситуації завжди можна досягти шляхом відповідних перетворень системи координат.

Отже, маємо: $u_\beta = v_\beta = 0, y_\alpha = 0$. Умова (9) при цьому припущенні набуває вигляду

$$\sqrt{(u - x_\alpha)^2 + v^2} - \varepsilon \sqrt{u^2 + v^2} - x_\alpha \geq 0. \quad (10)$$

В полярних координатах ($B_\beta(u_\beta, v_\beta)$ – полюс, ($B_\beta A_\alpha$) – полярна вісь) умова (10), після заміни $\rho = \sqrt{u^2 + v^2}$ і $u = \rho \cos \varphi$ та нескладних перетворень, матиме вигляд

$$\rho \geq \frac{2x_\alpha}{1 - \varepsilon^2} \cos \varphi + \frac{2x_\alpha}{1 - \varepsilon^2} \varepsilon. \quad (11)$$

Рівняння $\rho = \frac{2x_\alpha}{1 - \varepsilon^2} \cos \varphi + \frac{2x_\alpha}{1 - \varepsilon^2} \varepsilon$, як відомо, визначає зовнішню петлю кон-

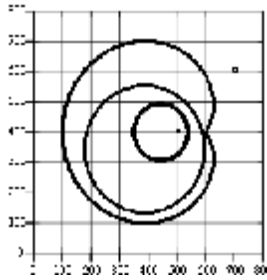
хоїди Паскаля (конхоїди кола – $\left(u - \frac{x_\alpha}{1 - \varepsilon^2}\right)^2 + v^2 = \left(\frac{x_\alpha}{1 - \varepsilon^2}\right)^2$). Отже, наявність в системі Q_2 точок, які лежать зовні цієї конхоїди, тобто задовольняють умові (11), не має впливу на формотворення перегородки T_α , а тому, при визначенні перегородки T_α , їх можна не враховувати. Ці міркування проілюстровано у Вставці 2, де представлені програмні модулі, які визначають в се-

редовищі MathCAD перегородки між точками $A_1(0,0)$ і $B_1(1,0)$, $A_1(0,0)$ і $B_2(2,1)$ та конхноїду для точки $B_1(1,0)$ при $\epsilon=0.6$, а також їх зображення в шаблоні команди Contour Plot.

$$f(x,y) := \begin{cases} a \leftarrow x^2 + y^2 - 0.36[(x-1)^2 + y^2] \\ f \leftarrow 1 \text{ if } |a| \leq 0.04 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \quad \begin{matrix} i := 0..800 & j := 0..800 \\ F_{i,j} := f(-5 + i \cdot 0.01, -4 + j \cdot 0.01) \end{matrix}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} a \leftarrow x^2 + y^2 - 0.36[(x-2)^2 + (y-1)^2] \\ g \leftarrow 1 \text{ if } |a| \leq 0.04 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases} \quad h(x,y) := \begin{cases} a \leftarrow \sqrt{x^2 + y^2} - 0.6\sqrt{(x-1)^2 + y^2} - 1 \\ h \leftarrow 1 \text{ if } |a| \leq 0.01 \\ 0 \text{ otherwise} \end{cases}$$

$$G_{i,j} := g(-5 + i \cdot 0.01, -4 + j \cdot 0.01) \quad H_{i,j} := h(-5 + i \cdot 0.01, -4 + j \cdot 0.01) \quad Q_{i,j} := F_{i,j} + G_{i,j} + H_{i,j} + T_{i,j}$$



Q

Вставка 2

Приклад 2 Нехай точковим системам $Q_1 = \{A_i(x_i, y_i) | i = \overline{1, n}\}$ і $Q_2 = \{B_j(u_j, v_j) | j = \overline{1, m}\}$ зіставлений один і той же нормалізований шаблон

$h(d) \equiv q(d) \equiv \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{d^2}{4t}} \in G, \quad t > 0$. Проведемо дослідження перегородки P для цих систем.

Для стислості записів подальшого викладу замінимо сигнатуру максимальних редукцій $M((x, y), h, A_i)$ і $M((x, y), q, B_j)$ для точок A_i і B_j , відповідно, на $h_i(x, y)$ і $q_j(x, y)$. Тож запишемо:

$$h_i(x, y) \equiv \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}{4t}}, \quad q_j(x, y) \equiv \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{(x-u_j)^2 + (y-v_j)^2}{4t}}.$$

Згідно із теоремою 12 та зауваження до неї перегородки $P_{i,j}, P_i, P$ (відповідно: між точками A_i і B_j , між точкою A_i і системою Q_2 , між системами Q_1 і Q_2), визначаються рівняннями: $\Psi_{i,j}(x, y) \equiv h_i(x, y) - q_j(x, y) = 0$;

$$\Psi_i(x, y) \equiv \bigwedge_{j=1}^{j=m} (h_i(x, y) - q_j(x, y)) = 0 ; \quad \Psi(x, y) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=n} \bigwedge_{j=1}^{j=m} (h_i(x, y) - q_j(x, y)) = 0 .$$

При цьому $A_i \in \text{int} L(\Psi_{i,j}(x, y), 0) \equiv \{(x, y) \in R^2 \mid h_i(x, y) - q_j(x, y) > 0\}$, а отже, A_i належить також і $\text{int} L(\Psi_i(x, y), 0) = \text{int} \prod_{j=1}^{j=m} L(\Psi_{i,j}(x, y), 0)$. Після нескладних еквівалентних перетворень нерівності

$$h_i(x, y) - q_j(x, y) \geq 0 \Rightarrow (x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 \leq (x - u_j)^2 + (y - v_j)^2 \Rightarrow$$

$2x(x_i - u_j) + 2y(y_i - v_j) + (u_j^2 + v_j^2) - (x_i^2 + y_i^2) \geq 0$ стає очевидним, що перегородка $P_{i,j}$ є пряма, яка проходить через середину відрізка $[A_i, B_j]$ і перпендикулярна до нього, причому точка A_i належить відкритій півплощині $\{(x, y) \in R^2 \mid \Phi_{i,j}(x, y) \equiv 2x(x_i - u_j) + 2y(y_i - v_j) + (u_j^2 + v_j^2) - (x_i^2 + y_i^2) > 0\}$. Рівняння, яке визначає перегородку P_i набуває вигляду

$$\Phi_i(x, y) \equiv \bigwedge_{j=1}^{j=m} [2x(x_i - u_j) + 2y(y_i - v_j) + (u_j^2 + v_j^2) - (x_i^2 + y_i^2)] = 0, \quad (12)$$

а отже, перегородка P_i є межею поліедра $\prod_{j=1}^{j=m} L(\Phi_{i,j}(x, y), 0) \equiv L(\Phi_i(x, y), 0)$.

Зрозуміло також, що перегородка P між системами Q_1 і Q_2 буде визначатися рівнянням

$$\Phi(x, y) \equiv \bigvee_{i=1}^{i=n} \bigwedge_{j=1}^{j=m} \Phi_{i,j}(x, y) = 0, \quad \text{причому} -$$

$$Q_1 \subset \text{int} \prod_{i=1}^{i=n} L(\Phi_i(x, y), 0), \quad Q_2 \subset \text{int} \prod_{i=1}^{i=n} S(\Phi_i(x, y), 0). \quad \text{Зауважимо, що рівняння}$$

(12) зустрічаємо і в роботі [3], де фактично наведено приклад побудови рівняння перегородки між точкою A_i і системою Q_2 , елементами якої є n точок B_j , у випадку зіставлення їм шаблонів $f(d) = g(d) \equiv d^2$.

Звертаємо також увагу на те, що функції $h_i(x, y)$ і $q_j(x, y)$ є фундаментальні розв'язки рівняння теплопровідності $\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \Delta T(x, y, t)$, а отже, перегородки $P_{i,j}, P_i, P$ можна вважати перегородками між миттєвими точковими викида-

ми тепла однакової величини, які в нашому прикладі можуть бути і віртуальними. Розмірковуючи відносно отриманих в прикладі 2 результатів по структурній будові перегородок $P_{i,j}, P_i, P$, доходимо наступного твердження.

Теорема 16. *Нехай точковим системам $Q_1 = \{A_i(x_{i1}, \dots, x_{ie}) \mid i = \overline{1, n}\}$, $Q_2 = \{B_j(u_{j1}, \dots, u_{je}) \mid j = \overline{1, m}\} \subset R^e$ зиставляється шаблон $f(d) \in F$, або $h(d) \in G$ і точка $A_i \in \text{int Conv}\{Q_2\}$, причому $\dim \text{Conv}\{Q_2\} = e$. Тоді перегородка P_i , між точкою A_i і системою Q_2 , є межею багатогранника $M_i = \bigcap_{j=1}^{j=m} \left\{ X = (x_1, \mathbf{K}, x_e) \in R^e \mid \Phi_{i,j}(X) \equiv 2 \sum_{k=1}^{k=e} x_k (x_{ik} - u_{jk}) + \sum_{k=1}^{k=e} u_{jk}^2 - \sum_{k=1}^{k=e} x_{ik}^2 \geq 0 \right\}$.*

□ Зрозуміло, що M_i не є пустим поліедром. Теорема буде доведена, якщо ми переконаємося в обмеженості M_i . Припустимо, що $M_i \subset R^e$ є необмежена множина. Тоді, згідно із теоремою 2.13, із [4], буде існувати по меншій мірі один промінь $S = \{Z \in R^e \mid Z = \lambda Z_0, \lambda \geq 0\}$, де Z_0 є фіксований вектор, $Z_0 \neq 0$, для якого вірна імплікація $X \in M_i \Rightarrow X + S \subseteq M_i$. Але в цьому разі гіперплощина $((X - A_i), Z_0) = 0$ буде строго розмежовувати систему Q_2 на дві непусті підмножини, а отже, буде існувати точка $B^*(u_1^*, \mathbf{K}, u_e^*) \in Q_2$ і така, що $((B^* - A_i), Z_0) \neq 0$, а це суперечить припущенню. Тож теорема вірна. □

Зауваження. *Зрозуміло, що у випадку, коли $Q_1 \subset \text{int Conv}\{Q_2\}$ і $\dim \text{Conv}\{Q_2\} = e$, то перегородка P між системами Q_1 і Q_2 є межею*

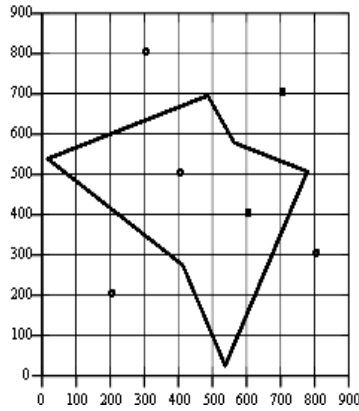
об'єднання багатогранників M_i , $P = \text{Fr} \bigcup_{i=1}^{i=n} M_i$.

На вставці 3 представлений програмний модуль для визначення в середовищі системи MathCAD перегородки P між миттєвими викидами тепла одиничної величини в точках систем $Q_1 = \{A_1(1, -1); A_2(-1, 0)\}$ і $Q_2 = \{B_1(2, 2); B_2(-2, 3); B_3(-3, 3); B_4(3, -2)\}$, а також зображення цієї перегородки в шаблоні команди Contour Plot.

$$i := 0..900 \qquad j := 0..900$$

$$f(x, y) := \begin{cases} A1 \leftarrow \min(-2x - 6y + 6, 6x - 8y + 11, 8x + 4y + 16, -4x + 2y + 11) \\ A2 \leftarrow \min(-6x - 4y + 7, 2x - 6y + 12, 4x + 6y + 17, -8x + 2y + 12) \\ c \leftarrow \max(A1, A2) \\ f \leftarrow 1 \text{ if } |c| \leq 0.04 \\ 0 \text{ otherwise} \\ f \end{cases}$$

$$P_{i,j} := f(-5 + i \cdot 0.01, -5 + j \cdot 0.01) \quad S_{i,j} := P_{i,j} + T_{i,j}$$



S

Вставка 3

Деякі узагальнення. Зіставимо тепер кожному із компактів систем Q_1 і Q_2 нормалізовані шаблони множин F і G ; компактам A_i зіставляємо шаблони $f_i(d) \in F$ і $h_i(d) \in G$, а компактам B_j шаблони $g_j(d) \in F$ і $q_j(d) \in G$. Узагальненням теорем 10 і 12 будуть наступні твердження.

Теорема 10*. Множина $T \subset \mathbb{R}^c$, яка визначається рівністю

$$T: \bigwedge_{i=1}^{i=n} \bigvee_{j=1}^{j=m} [m(x, f_i, A_i) - m(x, g_j, B_j)] = 0 \quad (13)$$

є перегородка між системами Q_1 і Q_2 .

Теорема 11*. Множина $P \subset \mathbb{R}^c$, яка визначається рівністю

$$P: \bigvee_{i=1}^{i=n} \bigwedge_{j=1}^{j=m} [M(x, h_i, A_i) - M(x, q_j, B_j)] = 0 \quad (14)$$

є перегородка між системами Q_1 і Q_2 .

Зрозуміло, що міркування по доведенню цих теорем аналогічне доведенню теорем 10 і 11, потрібно тільки в цих доведеннях пари функцій $\{f(d), g(d)\}$ і $\{h(d), q(d)\}$ замінити, відповідно, на пари $\{f_i(d), g_j(d)\}$ і $\{h_i(d), q_j(d)\}$. Певна річ, що при цьому узагальненні, теореми 12, 13, 14, 15 також мають місце, єдине лише, що в їх формулюваннях, міркуван-

нях при доведенні та зауваженнях, необхідно говорити про пари функцій $f_i(d), g_j(d)$ і $h_i(d), q_j(d)$. Для зручності посилання на ці результати наведемо їх узагальнені формулювання.

Теорема 12*. Якщо функції $f_i(d), g_j(d): R_+ \rightarrow R_+$ (шаблони множини F) строго зростають, то $\dim T = e - 1$.

Теорема 13*. Якщо функції $h_i(d), q_j(d): R_+ \rightarrow R_+$ (шаблони множини G) строго спадають, то $\dim P = e - 1$.

Теорема 14*. Нехай $f_i(d), g_j(d) \in F$ і $f_i(0) = g_j(0) = 0$. Якщо $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{f_i(d)}{g_j(d)} = \beta_{i,j}$, то при $\beta_{i,j} \neq 1$ перегородка T є обмежена, причому при $\beta_{i,j} > 1$ множини $S(\Phi_{i,j}(x), 0), S(\Phi_i(x), 0)$ є зв'язні компакти. При $\beta_{i,j} < 1$ зв'язними компактами будуть множини $L(\Phi_{i,j}(x), 0)$.

Теорема 15*. Нехай $h_i(d), q_j(d) \in G$ і $h_i(0) = q_j(0) = \text{Const} > 0$. Якщо $\lim_{d \rightarrow \infty} \frac{h_i(d)}{q_j(d)} = \beta_{i,j}$, то при $\beta_{i,j} \neq 1$ перегородка P є обмежена, причому при $\beta_{i,j} > 1$ множини $S(\Psi_{i,j}(x), 0)$ є зв'язні компакти. При $\beta_{i,j} < 1$ зв'язними компактами будуть множини $L(\Psi_{i,j}(x), 0), L(\Psi_i(x), 0)$.

В кінці викладу даної роботи зауважимо, що напрямок розгортання практичного застосування отриманих в цій роботі теоретичних результатів визначатиметься інтерпретацією шаблонів множин F і G .

Список літератури. 1. Клименко Вісс. Гр. Багатокритеріальні формалізації. – Харків: СПДФО Яковлева Г.Г., 2004. – 308 с. 2. Постников М.М. Гладкие многообразия. – М.: Наука, 1987. – 480 с. 3. Рвачев В.Л. Геометрические приложения алгебры логики. – К.: Техніка, 1967. – 212 с. 4. Эльстер К.–Х., Рейнгардт Р. и др. Введение в нелинейное программирование. – М.: Наука, 1985. – 264 с.

Надійшло до редакції 24.09.07