

Заключение. Предложенная в статье математическая модель для исследования кинематики и определения усилий в сопряжениях механизма наклона плавильной печи позволяет проанализировать исследуемую конструкцию лишь в рамках механики твердого тела. Вместе с тем она удовлетворяет оговоренным вначале требованиям. В частности, она легко параметризуема, пригодна для проведения оценочных расчетов и адаптируема к возможным изменениям в конструкции проектируемого устройства. Получаемые с ее применением результаты могут быть использованы как непосредственно при проектировании, так и в качестве исходных данных в рамках более общей модели.

Построение модели синтеза, охватывающей как составной блок предложенную в статье модель анализа, является направлением дальнейших исследований.

Список литературы: 1. *Артоболевский И.И.* Теория механизмов и машин. Учеб. для ВТУЗов. – М.: Наука, 1988. – 640 с. 2. *Полищук Т.В., Пеклич М.М., Ткачук Н.Н.* Кинематический и силовой расчет механизма наклона плавильной печи // Механiка та машинобудування. – 2007.– № 1. – С.100-106.

Поступила в редколлегию 21.09.2007

УДК 621.833.031

А.Г. ПРИЙМАКОВ, канд. техн. наук, Харьковский университет
воздушных сил Вооруженных сил Украины,
А.В. УСТИНЕНКО, канд. техн. наук, НТУ „ХПИ”,
Г.А. ПРИЙМАКОВ, бакалавр механики, НТУ „ХПИ”

О СТОЙКОСТИ СМАЗОЧНЫХ ПЛЕНОК, ОСУЩЕСТВЛЯЮЩИХ МАССОПЕРЕНОС В ЗУБЧАТЫХ ПЕРЕДАЧАХ

Мастильна плівка, що покриває несучі поверхні зубців, змодельована як деяка оболонка, підкріплена основою, на яку вона нанесена. Розроблено математичний апарат, що дозволяє визначити параметри стійкості граничних мастильних плівок в силових зубчастих передачах.

Lubricating tape, covering the teeth surfaces, is modelled as some shell, supported basis which it is inflicted on. A mathematical model, allowing to define the parameters of firmness of limits lubricating tapes in the power gearings, is developed.

Введение. В процессе зацепления в силовых зубчатых передачах, в частности волновых, возникает интересная научно-техническая проблема обеспечения стойкости смазочной пленки в зоне контакта зубьев. Поскольку в процессе эксплуатации силовых передач идет активный процесс массопереноса в зоне пятен контакта, то смазочную пленку можно представить как некоторый вязко-текучий субстрат, наполненный частицами износа зубьев.

Анализ литературных источников [1-11] показывает, что решение этой научно-технической проблемы не имеет аналогов ни в отечественной, ни в зарубежной литературе.

Целью статьи является оценка стойкости граничных смазочных пленок, обеспечивающих массоперенос продуктов износа в процессе эксплуатации силовых зубчатых передач.

Отдельно должны быть рассмотрены конкретные случаи нагружения: внешним равномерным давлением в зубчатом зацеплении, кручением зубчатой пары, при осевом квазиравномерном сжатии.

Моделирование нагрузок в масляной пленке. Представим смазочную пленку на поверхности материала как некоторую оболочку, подкрепленную основой, на которую она нанесена. Правомерность такого представления доказана в [12-14], где показано, что пленка находится в вязко-текучем состоянии. Воспользуемся гипотезами Кирхгофа-Лява о деформировании срединной поверхности такой оболочки [12, 13]. Допуская возможную несимметричность взаимодействия, будем считать, что усилия T_1 , T_2 , S , прилагаемые к срединной поверхности оболочки из масла, будут вызывать с самого начала нагружения изгиб этой оболочки.

Под критической нагрузкой условимся считать наименьшие нагрузки, при которых вместе с возникающим состоянием оболочки возможны другие изгибные формы равновесия, которые характеризуются образованием волн на ее поверхности.

Принимая основное состояние оболочки за исходное, нормальную составляющую внешней нагрузки, которая появляется при выпучивании оболочки, можно записать в обычной форме:

$$p = T_1\chi_1 + T_2\chi_2 + 2S\chi_3, \quad (1)$$

где T_1 , T_2 , S – статически эквивалентные усилия, действующие в срединной поверхности оболочки; χ_1 , χ_2 , χ_3 – изменение кривизны и кручение поверхности приведения (срединной поверхности).

Как известно из [15], при исследовании стойкости оболочек с достаточной точностью можно пользоваться теорией пологих оболочек: в уравнениях равновесия в тангенциальном направлении можно пренебречь перерезающими силами, а искривление оболочки с достаточной точностью можно описать лишь нормальными компонентами перемещения.

Для полой цилиндрической оболочки из смазочной пленки соотношения упругости запишем в виде

$$\begin{cases} T_1 = B_{11} \frac{\partial U}{\partial x} + \nu B \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R} \right) - A_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}; \\ T_2 = \nu B \frac{\partial U}{\partial x} + B_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R} \right) - A_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}; \\ S = \frac{B(1-\nu)}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) - A_{33} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}; \end{cases} \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1 = D_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu D \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - A_{11} \frac{\partial U}{\partial x}; \\ G_2 = \nu D \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + D_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - A_{22} \left(\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{W}{R} \right); \\ H_1 = D_{13} \frac{\partial^2 W}{\nu x \nu y} - \frac{A_{33}}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right); \\ H_2 = D_{23} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{A_{33}}{2} \left(\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial x} \right) \end{array} \right. \quad (3)$$

где G_1, G_2, H_1, H_2 – статически эквивалентные моменты, которые действуют в срединной поверхности оболочки; U, V, W – компоненты перемещения вдоль координатных линий (U, V) и по внешней нормали (W); ν – мгновенное значение коэффициента Пуассона масла; B, D – соответственно приведенные жесткости при растяжении-сжатии и при изгибе; R – радиус срединной поверхности; A_{11}, A_{22}, A_{33} – коэффициенты, характеризующие изгибные деформации, которые возникают при растяжении-сжатии и сдвиге; B_{11}, B_{22} – жесткость оболочки смазочной пленки при растяжении в направлении осей x и y ; D_{11}, D_{22} – параметры жесткости при изгибе в направлении осей x и y ; D_{13}, D_{23} – жесткость оболочки при кручении относительно осей x и y .

Методика определения указанных параметров описана в [13], однако, следует отметить, что все они зависят от толщины смазочной пленки и ее физико-механических параметров.

Систему дифференциальных уравнений нейтрального равновесия цилиндрической оболочки представим в виде:

$$\begin{aligned} T_1 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \quad T_2 = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \quad S = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (H_1 + H_2) + \frac{\partial^2 G^2}{\partial y^2} + \frac{T_2}{R} = - \left(T_1 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

К уравнениям равновесия (4) следует добавить условие совместности деформаций

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_1}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_3}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \varepsilon_2}{\partial x^2} = \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}. \quad (5)$$

В (5) мы пренебрегли изменением геометрических размеров оболочки в сравнении с изменением напряженно-деформированного состояния при выпучивании.

Решая соотношения упругости масла (2) относительно компонент деформации, с учетом (4) получим

$$\left\{ \begin{array}{l} (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)\varepsilon_1 = A_{11}B_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} - \nu BA_{22} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} - \nu B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}; \\ (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)\varepsilon_2 = A_{22}B_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \nu BA_{11} \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + B_{11} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} - \nu B \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}; \\ 2(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)\varepsilon_3 = \frac{(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)A_{33}}{B(1-\nu)} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} - \frac{(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)}{B(1-\nu)} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y}. \end{array} \right. \quad (6)$$

В уравнениях (5), (6) E_1 , E_2 , $W=2E_3$ – относительные удлинения и сдвиг поверхности приведения; Φ – функция напряжений [13].

Подставляя (6) в уравнение совместности деформаций (5), а (3) – в уравнение равновесия (4), получим следующую систему дифференциальных уравнений:

$$\nabla_1 W + \nabla_2 \Phi = (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) \left(T_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right); \quad \nabla_2 W = \nabla_3 \Phi, \quad (7)$$

где $\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3$ – дифференциальные операторы в частных производных четвертого порядка,

$$\begin{aligned} \nabla_1 = & \left[D_{11}(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) - B_{22}A_{11}^2 \right] \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \left[D_{22}(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) - B_{11}A_{22}^2 \right] \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \\ & + \left[2\nu D(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) - BA_{11}A_{22} + (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)(D_{13} + D_{23}) - \right. \\ & \left. - \frac{2(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)A_{33}^2}{B(1-\nu)} \right] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \nabla_2 = & \nu BA_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \nu BA_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \frac{B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2}{R} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \\ & - \left[A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11} - \frac{2A_{33}(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)}{B(1-\nu)} \right] \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}; \end{aligned} \quad (9)$$

$$\nabla_3 = B_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{2(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)}{B(1-\nu)} \cdot \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4}. \quad (10)$$

Исключая из уравнений (7) функцию напряжений Φ , получаем дифференциальное уравнение, описывающее стойкость смазочной пленки как подкрепленной цилиндрической оболочки при комбинированном нагружении:

$$(\nabla_1 \nabla_3 + \nabla_2^2)W = (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) \left(T_1 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + T_2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} + 2S \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right) \nabla_3 W. \quad (11)$$

Подставим в уравнение (11) решение в виде

$$W = A \sin(\lambda x \pm \eta y), \quad (12)$$

описывающее скошенные формы волнообразования, в котором обозначено

$$\lambda = \frac{m\pi}{l}; \quad \eta = \frac{n}{R}, \quad (13)$$

где λ – параметр, характеризующий уменьшение прочности материала при пластической деформации [16]; η – параметр уменьшения жесткости при пластической деформации [16]; m, n – целочисленные параметры, характеризующие количество волн и полуволн при выпучивании смазочной пленки.

Тогда получим следующее соотношение для определения критических нагрузок при комбинированном нагружении смазочной пленки как подкрепленной основой оболочки:

$$-(T_1\lambda^2 + T_2\eta^2 + 2S\lambda\eta)_{\text{кр}} = \left[\Psi_1 + (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) \left(\frac{\Psi_2^2}{\Psi_3} - 2 \frac{\lambda^2}{R} \cdot \frac{\Psi_2}{\Psi_3} + \frac{\lambda^4}{R^2 \Psi_3} \right) \right]. \quad (14)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Psi_1(\lambda, \eta) = & \left(D_{11} - \frac{B_{22}A_{11}^2}{B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2} \right) \lambda^4 + \left(D_{22} - \frac{B_{11}A_{22}^2}{B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2} \right) \eta^4 + \\ & + \left[2\nu D + D_{13} + D_{23} - \frac{BA_{11}A_{22}}{(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)} - \frac{2A_{33}}{B(1-\nu)} \right] \lambda^2 \eta^2; \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \Psi_2(\lambda, \eta) = & \frac{\nu BA_{11}}{B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2} \lambda^4 + \frac{\nu BA_{22}}{B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2} \eta^4 - \\ & - \left[\frac{A_{11}B_{22} + A_{22}B_{11}}{B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2} - \frac{2A_{33}}{B(1-\nu)} \right] \lambda^2 \eta^2; \end{aligned} \quad (16)$$

$$\Psi_3(\lambda, \eta) = B_{11}\lambda^4 + B_{22}\eta^4 + \frac{2(B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)}{B(1-\nu)} \lambda^2 \eta^2. \quad (17)$$

Параметры, η определяются из условия минимума критической нагрузки, то есть $T_{\text{кр}} \rightarrow \min$.

Рассмотрим некоторые частные случаи нагружения смазочной пленки.

Стойкость смазочной пленки как подкрепленной цилиндрической оболочки при осевом квазиравномерном сжатии. При осевом квазиравно-

мерном сжатии подкрепленной цилиндрической оболочки, моделирующей поведение смазочной пленки, $T_2 = S = 0$ и согласно (14) имеем:

$$(T_1)_{\text{кр}} = \left[\varphi_1 + (B_{11}B_{22} - v^2B^2) \frac{\varphi_2^2}{\varphi_3} \right] \lambda^2 + \frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{R^2\varphi_3\lambda^2} - \frac{2(B_{11}B_{22} - v^2B^2)}{R} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_3} \quad (18)$$

где

$$\varphi_i = \Psi_i(1, \varphi), \quad (i=1, 2, 3); \quad \varphi = \frac{\eta^2}{\lambda^2} = \frac{n^2l^2}{m^2\pi^2R^2}. \quad (19)$$

Наименьшее значение правой части выражения (18) относительно параметра λ имеет место при

$$\lambda = \frac{1}{R^{-1}} \sqrt[4]{\frac{B_{11}B_{22} - v^2B^2}{\varphi_1\varphi_3 + (B_{11}B_{22} - v^2B^2)\varphi_2^2}} \quad (20)$$

и определяется выражением

$$T_{\text{кр}}^{\text{вн}} = \frac{2}{R} \sqrt{(B_{11}B_{22} - v^2B^2)[\varphi_1\varphi_3 + (B_{11}B_{22} - v^2B^2)\varphi_2^2]} + \frac{2(B_{11}B_{22} - v^2B^2)}{R} \cdot \frac{\varphi_2}{\varphi_3}. \quad (21)$$

Значение параметра φ находится из условия минимума правой части.

Стойкость смазочной пленки как подкрепленной цилиндрической оболочки при действии внешнего равномерного давления. Если оболочка находится под действием внешнего равномерного давления, то $T_1 = S_0 = 0$; $T_2 = -pR$ и, в соответствии с (14), при потере стойкости оболочки в продольном направлении образуется лишь одна полуволна, то есть $m=1$ и $\lambda_1 = \pi/l$, где l – возможная длина оболочки.

Следовательно, для определения критического внешнего давления подкрепленной цилиндрической оболочки имеет место зависимость

$$(pR)_{\text{кр}} = \left[\theta_1 + (B_{11}B_{22} - v^2B^2) \frac{\theta_2 - \frac{\pi^2}{Rl^2}}{\theta_3} \right] \frac{1}{\eta^2}, \quad (22)$$

где

$$\theta_i(\lambda_1, \eta) = \Psi_i(\lambda_1, \eta), \quad (i = 1, 2, 3), \quad (23)$$

а параметр η выбирается из условия минимума правой части.

В частности, если $\eta^2 \gg \lambda^2$, то выражение (22) примет вид

$$(pR)_{\text{кр}} = \left(D_{22} - \frac{A_{22}^2}{B_{22}} \right) \eta^2 - \frac{2\pi^2}{Rl^2} \cdot \frac{\nu BA_{22}}{B_{22}} \cdot \frac{1}{\eta^2} + \frac{\pi(B_{11}B_{22} - \theta^2 B^2)}{R^2 l^4 B_{22} \eta^6}. \quad (24)$$

Наименьшее значение правой части имеет место при

$$\eta^2 = \sqrt{\frac{\sqrt{B_0^2 + 4A_0C_0} - B_0}{2A_0}} \quad (25)$$

и определяется выражением

$$(pR)_{\text{кр}}^{\text{вн}} = \sqrt{2A_0 \left(\sqrt{B_0^2 + 4A_0C_0} + B_0 \right)}, \quad (26)$$

где для удобства практического использования введены обозначения

$$A_0 = D_{22} - \frac{A_{22}^2}{B_{22}}; \quad B_0 = \frac{2\nu\pi^2}{Rl^2} \cdot \frac{BA_{22}}{B_{22}}; \quad C_0 = \frac{\pi^4 (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2)}{R^2 l^4 B_{22}}. \quad (27)$$

Стойкость смазочной пленки как подкрепленной цилиндрической оболочки при кручении. При кручении $T_1 = T_2 = 0$ и, в соответствии с (14) критический крутящий момент определяется выражением

$$\frac{M_{\text{кр}}}{2\pi R} = \frac{1}{\lambda\eta} \left[\Psi_1 + (B_{11}B_{22} - \nu^2 B^2) \frac{\Psi_2 - \frac{\lambda^2}{R}}{\Psi_3} \right]. \quad (28)$$

Параметры λ , η опять выбираются из условия минимума правой части и определяют форму потери стойкости, которая возникает при кручении такой оболочки.

Выводы.

1. Смазочная пленка, покрывающая несущие поверхности зубьев, может быть смоделирована как некоторый субстрат, наполненный частицами износа, то есть как некоторая оболочка, подкрепленная основой, на которую она нанесена.

2. Разработан математический аппарат, позволяющий определить параметры

стойкости предельных смазочных пленок в силовых зубчатых передачах.

3. Очевидно, что период формирования предельных смазочных пленок и потеря ими стойкости в значительной мере влияет на величину допускаемых контактных напряжений, так как после потери стойкости смазочной пленки начинается активный износ в зоне пятен контакта зубьев, что, в свою очередь „провоцирует” начало усталостного контактного разрушения.

Список литературы: 1. Костецкий Б.И., Носовский И.Г., Караулов А.К. и др. Поверхностная прочность материалов при трении. – Киев: Техника, 1976. – 296 с. 2. Бершадский Л.И. Структурная термодинамика трибосистемы. – Киев: О-во „Знание” УССР, 1990. – 32 с. 3. Костецкий Б.И. Структурно-энергетические основы управления трением и износом в машинах. – Киев: О-во „Знание” УССР, 1990. – 32 с. 4. Глендорф Г., Пригожин И. Термодинамическая теория структуры, устойчивости и флуктуации. – М.: Мир, 1973. – 280 с. 5. Хакен Г. Синергетика / Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах // Под ред. Ю.Л. Климонтовича. – М.: Мир, 1985. – 419 с. 6. Смазочные материалы: Антифрикционные и противоизносные свойства. Методы испытаний: Справочник / Р.М. Матвеевский, В.Л. Лашхи, И.А. Буяновский и др. – М.: Машиностроение, 1989. – 224 с. 7. Диха О.В. Принципы побудови структурно-динамічної схеми при граничному змащуванні // Тези допов. міжнар. наук.-техн. конф. „Зносостійкість і надійність вузлів тертя машин (ЗНМ-2001)”. – Хмельницький: ТУП, 2001. – С.52. 8. Материалы в триботехнике нестационарных процессов / А.В. Чичинадзе, Р.М. Матвеевский, Э.Д. Браун и др. – М.: Наука, 1986. – 221 с. 9. Противозадирная стойкость смазочных сред при трении в режиме граничной смазки / Р.М. Матвеевский, И.А. Буяновский, О.В. Лазовская. – М.: Наука, 1978. – 224 с. 10. Николис Г., Пригожин И. Самоорганизация в неравновесных системах / Пер. с англ. – М.: Мир, 1979. – 597 с. 11. Синергетика: Сб. статей. / Пер. с англ. // Под ред. Б.Б. Кадомцева. – М.: Мир, 1984. – 624 с. 12. Королев В.И. Упруго-пластические деформации оболочек. – М.: Машиностроение, 1971. – 303с. 13. Работнов Ю.Н. Ползучесть элементов конструкций. – М.: Наука, 1966. – 752 с. 14. Приймаков А.Г., Устиненко А.В., Приймаков Г.А. Математическая модель анализа напряженно-деформированного состояния поверхностного слоя и его устойчивости на поверхностях трения при определении допускаемых напряжений // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. „Проблемы механического привода”. – Харьков, 2005. – Вып.36 – С.65-77. 15. Власов В.Э. Общая теория оболочек. – М.: Гостехиздат, 1949. – 789с. 16. Бокштейн Б.С. Атомы блуждают по кристаллу. – М.: Наука, 1987. – 207 с.

Поступила в редколлегию 09.09.07